XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 518.9

НЕКОТОРЫЕ УРАВНОВЕШЕННЫЕ ПАРЫ СТРАТЕГИЙ В ИГРАХ НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ

Д. Суджюте, Л. Горелик

Настоящая работа является естественным продолжением результатов, заключенных в теоремах 2 [3], 1 [4]. Исследуются существование и вид g-уравновешенных пар стратегий для игр на единичном квадрате, в которых функции ядер на прямых $\xi=0$, $\xi=1$, $\eta=0$ и $\eta=1$ удовлетворяют некоторым условиям непрерывности и монотонности, точнее сформулированным в пунктах 1) и 2). Полностью исследованы все возможные случаи и выяснено, существуют или нет g-уравновешенные пары стратегий, а в случае существования указан их вид.

Рассматриваем игру на единичном квадрате с ограниченными ядрами $K(\xi, \eta)$, $L(\xi, \eta)$, удовлетворяющими следующим условиям:

1) функции $K(\xi, 0)$ и $L(0, \eta)$ – непрерывны и монотонно возрастают в интервале $(0, 1]$;

2) функции $K(\xi, 1)$ и $L(1, \eta)$ – непрерывны и монтонно возрастают в интервале $[0, 1)$.

Множествами стратегий для каждого игрока являются множества функций распределения. При выборе первым игроком функции распределения $x(\xi)$, а вторым – $y(\eta)$ первый выигрывает

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy(\eta),$$

а второй –

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy(\eta).$$

Здесь и далее интегралы Лебега–Стилтьеса и всюду предполагается их существование.

Уравновешенной парой назовем пару стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$, удовлетворяющую условиям

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy_0(\eta) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta),$$

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy(\eta) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta)$$

для любых стратегий $x(\xi)$ и $y(\eta)$.

Уравновешенную пару стратегий, в которой обе функции распределения постоянны на интервале (0, 1), назовем g-уравновешенной парой стратегий. Обозначать ее будем $x_0=(\alpha, 1-\alpha)$ $y_0=(\beta, 1-\beta)$, где α, β — скачки соответствующих функций распределения в точке 0, а $1-\alpha$, $1-\beta$ — в точке 1.

Когда игроки применяют в игре уравновешенную пару стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$, их выигрыши обозначаются через v и w, соответственно для I и II игроков.

Для фиксированной пары стратегий $x(\xi)$ введем следующие функции:

$$V(\xi)=\int_0^1 K(\xi, \eta)\, dy(\eta), \quad W(\eta)=\int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx(\xi).$$

Для уравновешенной пары по определению выполняются неравенства

$$V(\xi)\leqslant v, \; W(\eta)\leqslant w, \; (0\leqslant\xi, \eta\leqslant 1). \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\lim_{\xi\to 0} K(\xi, 0)=k_0, \quad \lim_{\xi\to 1} K(\xi, 1)=k_1,$$

$$\lim_{\eta\to 0} L(0, \eta)=l_0, \quad \lim_{\eta\to 1} L(1, \eta)=l_1.$$

Лемма 1. *Для того чтобы пара стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$, состоящая из дискретных функций распределения, была уравновешенной в игре на единичном квадрате, необходимо и достаточно, чтобы функция $V(\xi)$ принимала значение v в точках скачка функции $x_0(\xi)$ и была не больше v в остальных точках интервала* [0, 1], *а функция $W(\eta)$ принимала значение w в точках скачка функции $y_0(\eta)$ и была не больше w в остальных точках интервала* [0, 1].

Доказательство. Необходимость следует немедленно из неравенств (1) и лемм 1 и 2 [5].

Достаточность. Пусть дискретные функции распределения $x_0(\xi)$ и $y_0(\eta)$ имеют в точках единичного интервала, обозначаемых соответственно ξ_i, η_j, $i, j=1, 2, 3, \ldots$, скачки величины α_i и β_j. Если $V(\xi)\leqslant v$ для $\xi\in[0, 1]$, $V(\xi_i)=v$, $W(\eta)\leqslant w$ для $\eta\in[0, 1]$ и $W(\eta_j)=w$, то

$$\int_0^1\int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy_0(\eta)=\int_0^1 V(\xi)\, dx(\xi)\leqslant v,$$

$$\int_0^1\int_0^1 K(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta)=\sum_i \alpha_i V(\xi_i)=v,$$

$$\int_0^1\int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy(\eta)=\int_0^1 W(\eta)\, dy(\eta)\leqslant w,$$

$$\int_0^1\int_0^1 L(\xi, \eta)\, dx_0(\xi)\, dy_0(\eta)=\sum_j \beta_j W(\eta_j)=w,$$

а это означает, что пара стратегий $x_0(\xi)$, $y_0(\eta)$ уравновешенная.

Лемма доказана.

Лемма 2. В *g-уравновешенной паре* $x_0=(\alpha, 1-\alpha)$, $y_0=(\beta, 1-\beta)$ *величины* α *и* β *равны или не равны нулю одновременно.*

Доказательство. Для определенности пусть $\alpha=0$ и $\beta>0$. Тогда ввиду монотонности $L(1, \eta)$ по лемме 1 получаем:

$$W(0)=w=L(1, 0)<L(1, \eta)=W(\eta) \text{ для } \eta\in(0, 1),$$

что противоречит определению уравновешенной пары.

В случае $\beta=0$, $\alpha>0$ приходим к противоречию аналогично.

Лемма 3. *Если выполнено хотя бы одно из условий*

$$K(1, 1)<k_1 \tag{2}$$

или

$$L(1, 1)<l_1, \tag{3}$$

то в g-уравновешенных парах $x_0=(\alpha, 1-\alpha)$, $y_0=(\beta, 1-\beta)$ *хотя бы одна из величин* $1-\alpha$ *и* $1-\beta$ *равна нулю.*

·Доказательство. Пусть для определенности выполнено требование (2) и допустим противное утверждению леммы, т.е. что $x_0=(\alpha, 1-\alpha)$, $y_0=(\beta, 1-\beta)$, где $1-\alpha>0$, $1-\beta>0$, является уравновешенной парой. Тогда по лемме 1

$$V(1)=\beta K(1, 0)+(1-\beta)\ K(1, 1)=v.$$

Так как ввиду непрерывности $K(\xi, 0)$ и $K(\xi, 1)$ в интервале $(0, 1)$ имеем

$$\lim_{\xi\to 1} V(\xi)=\lim_{\xi\to 1}\ [\beta K(\xi,\ 0)+(1-\beta)\ K(\xi,\ 1)]=$$
$$=\beta K(1,\ 0)+(1-\beta)\ k_1>v,$$

то по определению предела найдется такая точка $\xi_0\in(0, 1)$, в которой $V(\xi_0)>v$, что противоречит определению уравновешенной пары.

Если допустить, что выполнено (3), к противоречию придем аналогично.

Лемма 4. *Если*

$$K(0, 0)<K(1, 0), \tag{4}$$

то в g-уравновешенных парах $\alpha=0$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. пусть действительно неравенство (4), но в уравновешенной паре $\alpha>0$, тогда по лемме 1

$$V(0)=\beta K\ (0, 0)+(1-\beta)\ K(0, 1)=v.$$

Ввиду непрерывности $K(\xi, 0)$ в интервале $(0, 1]$ и неравенства (4) найдется точка $\xi_0\in(0, 1)$, для которой $K(\xi_0, 0)>K(0, 0)$, и так как ввиду условия 1) выполнено неравенство $K(\xi_0, 1)>K(0, 1)$, то

$$V(\xi_0)=\beta K(\xi_0,\ 0)+(1-\beta)\ K(\xi_0,\ 1)>v,$$

что противоречит определению уравновешенной пары. Аналогично доказывается

Лемма 5. *Если*

$$L(0, 0)<L(0, 1), \tag{5}$$

то в g-уравновешенных парах $\beta=0$.

Из лемм 2–5 как следствие вытекает следующая

Теорема 1. *Если выполнено хотя бы одно из условий* (2), (3) *и хотя бы одно из условий* (4), (5), *то g-уравновешенных пар не существует.*

Введем следующие обозначения:

$$k=\max\left(K(1,\ 1),\ k_1\right),\quad l=\max\left(L(1,\ 1),\ l_1\right),$$

$$\beta_0=\frac{k-K(0,\ 1)}{k-K(0,\ 1)+K(0,\ 0)-K(1,\ 0)},\quad \alpha_0=\frac{l-L(1,\ 0)}{l-L(1,\ 0)+L(0,\ 0)-L(0,\ 1)}.$$

Обозначение β_0 будет применяться только тогда, когда $K(0, 0)\geqslant K(1, 0)$, а α_0 – когда $L(0, 0)\geqslant L(0, 1)$, так что обозначенные ими соответствующие выражения будут иметь смысл.

Лемма 6. *Пусть дана пара стратегий* $x=(\alpha, 1-\alpha)$, $y=(\beta, 1-\beta)$, *где* α, $\beta>0$. *Для того чтобы выполнялось неравенство*

$$V(0)\geqslant V(\xi),\quad \xi\in[0, 1], \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\beta\geqslant\beta_0$. *Причем равенство* $V(0)=V(1)$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\beta=\beta_0$ *и* $K(1, 1)\geqslant k_1$.

Доказательство. Необходимость. Сначала докажем, что из неравенства (6) следует неравенство

$$V(0)\geqslant\beta K(1, 0)+(1-\beta)\,k. \tag{7}$$

На самом деле, из непрерывности $V(\xi)$ в интервале (0, 1) и неравенства (6) следует, что

$$\lim_{\xi\to1} V(\xi)=\beta K(1,\ 0)+(1-\beta)\,k_1\leqslant V(0),$$

так как в противном случае существовала бы точка $\xi\in(0, 1)$, в которой $V(\xi)>V(0)$, что противоречит определению уравновешенной пары. В случае $k_1\geqslant K(1, 1)$ неравенство (7), таким образом, доказано. В случае $k_1<K(1, 1)$ будет

$$\beta K(1, 0)+(1-\beta)\,k=V(1)\leqslant V(0),$$

где последнее неравенство получается по определению уравновешенной пары.

Неравенство (7) можно записать так:

$$\beta K(0, 0)+(1-\beta)K(0, 1)\geqslant\beta K(1, 0)+(1-\beta)\,k,$$

отсюда получается, что $\beta\geqslant\beta_0$.

Достаточность. Пусть $\beta\geqslant\beta_0$ и допустим противное, т.е. что существует значение $\xi\in[0, 1]$, для которого

$$V(\xi)>V(0).$$

Тогда

$$\beta K(0, 0)+(1-\beta)\,K(0, 1)<\beta K(\xi, 0)+(1-\beta)\,K(\xi, 1)\leqslant$$
$$\leqslant\beta K(1, 0)+(1-\beta)\,k,$$

где последнее неравенство получено ввиду монотонного возрастания $K(\xi, 0)$ и $K(\xi, 1)$, а из этого неравенства следует, что $\beta<\beta_0$.

Теперь докажем последнее утверждение леммы.

Пусть $V(0)=V(1)$, т.е.

$$\beta K(0,0)+(1-\beta)K(0,1)=\beta K(1,0)+(1-\beta)K(1,1). \qquad (8)$$

Отсюда немедленно следует, что $K(1,1)\geqslant k_1$, так как в противном случае в некоторой точке $\xi\in(0,1)$ выполнялось бы неравенство $V(\xi)>V(0)$, что противоречит неравенству (6). Далее, так как при $K(1,1)\geqslant k_1$ в неравенстве (8) можно заменить $K(1,1)$ на k, следует, что $\beta=\beta_0$.

Пусть теперь $\beta=\beta_0$ и $K(1,1)\geqslant k_1$. Тогда $k=K(1,1)$, и, подставив значение β_0 в выражение

$$V(1)=\beta_0 K(1,0)+(1-\beta_0)k,$$

простыми алгебраическими преобразованиями придем к выражению $\beta_0 K(0,0)+(1-\beta_0)K(0,1)=V(0)$. Аналогично доказывается

Лемма 7. *Пусть дана пара стратегий $x=(\alpha,1-\alpha)$, $y=(\beta,1-\beta)$, где $\alpha,\beta>0$. Для того чтобы выполнялось неравенство*

$$W(0)\geqslant W(\eta),\quad \eta\in[0,1],$$

необходимо и достаточно, чтобы $\alpha\geqslant\alpha_0$. Причем равенство $W(0)=W(1)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha=\alpha_0$ и $L(1,1)\geqslant l_1$.

Теорема 2. *Пусть выполнено хотя бы одно из условий (2) и (3). Тогда:*

а) *если* $K(0,0)>K(1,0)$ *и* $L(0,0)>L(0,1)$ *или*

$K(0,0)=K(1,0)$ *и* $L(0,0)=L(0,1)$,

то пара стратегий $x_0=(1,0)$, $y_0=(1,0)$ является уравновешенной;

б) *если $K(0,0)>K(1,0)$ и $L(0,0)=L(0,1)$, то пара стратегий $x_0=(1,0)$, $y_0(\beta,1-\beta)$, где $\beta\geqslant\beta_0$, является уравновешенной;*

в) *если $K(0,0)=K(1,0)$ и $L(0,0)>L(0,1)$, то пара стратегий $x_0=(\alpha,1-\alpha)$, где $\alpha\geqslant\alpha_0$, $y_0=(1,0)$, является уравновешенной.*

Других g-уравновешенных пар в этих случаях не существует.

Доказательство. Из лемм 2 и 3 следует, что при условиях (2) и (3) g-уравновешенные пары могут иметь вид только

$$x_0=(1,0),\ y_0=(\beta,1-\beta),\ \beta>0;$$

$$x_0=(\alpha,1-\alpha),\ y_0=(1,0),\ \alpha>0.$$

Если $K(0,0)>K(1,0)$ и $L(0,0)\geqslant L(0,1)$, то пара стратегий $x_0=(\alpha,1-\alpha)$, $y_0=(1,0)$, α, $1-\alpha>0$ быть уравновешенной не может, так как в противном случае для $\xi\in(0,1]$ будет $V(\xi)<V(0)=v$, и тогда $\alpha=1$. Таким образом, в этом случае g-уравновешенной парой может быть только пара $x_0=(1,0)$, $y_0=(\beta,1-\beta)$, $\beta>0$, и ввиду леммы 6, условия леммы 1 для $V(\xi)$ удовлетворяются тогда и только тогда, когда $\beta\geqslant\beta_0$. Если $1-\beta>0$, то условия леммы 1 для функции $W(\eta)$ выполнены тогда и только тогда, когда $L(0,0)=L(0,1)$. Если $L(0,0)>L(0,1)$, то должно быть $1-\beta=0$.Таким образом, утверждение б) доказано. Очевидно, что пара $x_0=(1,0)$, $y_0=(1,0)$ в случае $K(0,0)>K(1,0)$, $L(0,0)>L(0,1)$ является уравновешенной.

Если $K(0,0)=K(1,0)$ и $L(0,0)>L(0,1)$, то аналогично, применяя лемму 7 и лемму 1, докажем, что пары стратегий $x_0=(\alpha, 1-\alpha)$, $y_0=(1,0)$, $\alpha \geqslant \alpha_0$ и только они являются g-уравновешенными.

Остается случай, когда $K(0,0)=K(1,0)$ и $L(0,0)=L(0,1)$. Допустим, что в этом случае пара стратегий $x_0=(1,0)$, $y_0=(\beta, 1-\beta)$, $\beta>0$, $1-\beta>0$ является уравновешенной. Тогда, ввиду монотонного возрастания $K(\xi, 1)$, непрерывности $K(\xi, 0)$ в интервале $(0, 1]$ и равенства $K(0,0)=K(1,0)$ существует точка $\xi_0 \in (0,1)$, в которой

$$v=V(0)=\beta K(0,0)+(1-\beta)K(0,1)<\beta K(\xi_0, 0)+(1-\beta)K(\xi_0, 1)= \\ =V(\xi_0),$$

что противоречит определению уравновешенной пары. Аналогично доказывается, что пара $x_0=(\alpha, 1-\alpha)$, $y_0=(1,0)$, $\alpha>0$, $1-\alpha>0$ не является уравновешенной.

Таким образом, остается пара $x_0=(1,0)$, $y_0=(1,0)$. Она на самом деле является уравновешенной, так как

$$V(0)=K(0,0)\leqslant K(\xi, 0)=V(\xi), \quad \xi \in (0, 1],$$
$$W(0)=L(0,0)\leqslant L(0,\eta)=W(\eta), \quad \eta \in (0, 1],$$

что означает, что условия леммы 1 выполнены.

Теорема 3. *Если выполнено хотя бы одно из условий* (4), (5) *и оба неравенства* $K(1,1)\geqslant k_1$, $L(1,1)\geqslant l_1$, *то существует единственная g-уравновешенная пара стратегий*

$$x_0=(0,1), \quad y_0=(0,1).$$

Доказательство. Из лемм 4 и 5 следует, что в g-уравновешенной паре или $\alpha=0$, или $\beta=0$. Но, так как по лемме 2 эти величины равны нулю одновременно, то g-уравновешенной может быть только пара $x_0=(0,1)$, $y_0=(0,1)$. То, что эта пара действительно является уравновешенной, доказывают следующие соотношения:

$$V(1)=K(1,1)>K(\xi, 1)=V(\xi), \quad \xi \in [0, 1),$$
$$W(1)=L(1,1)>L(1,\eta)=W(\eta), \quad \eta \in [0, 1).$$

Теорема 4. *Если*

$$K(1,1)\geqslant k_1, \tag{9}$$
$$L(1,1)\geqslant l_1, \tag{10}$$

$K(0,0)\geqslant K(1,0)$ *и* $L(0,0)\geqslant L(0,1)$, *то g-уравновешенными являются пары*

$$x_0=(1,0), \quad y_0=(1,0);$$
$$x_0=(0,1), \quad y_0=(0,1);$$
$$x_0=(\alpha_0, 1-\alpha_0), \quad y_0=(\beta_0, 1-\beta_0).$$

Если

$$K(0,0)>K(1,0), \quad L(0,0)=L(0,1),$$

то существуют еще g-уравновешенные пары вида $x_0=(1,0)$, $y_0=(\beta, 1-\beta)$, *где* $\beta\geqslant\beta_0$.

Если

$$K(0,0)=K(1,0) \text{ и } L(0,0)>L(0,1),$$

то существуют еще g-уравновешенные пары вида $x_0=(\alpha, 1-\alpha)$, $y_0=(1,0)$, *где* $\alpha\geqslant\alpha_0$.

Других g-уравновешенных пар стратегий не существует.

Доказательство. Для пары $x_0=(0,1)$, $y_0=(0,1)$ ввиду монотонности $L(1,\eta)$, $K(\xi,1)$ и неравенств (9), (10) выполняются соотношения

$$w=W(1)=L(1,1)<W(\eta),\ \eta\in[0,1),$$
$$v=V(1)=K(1,1)<V(\xi),\ \xi\in[0,1),$$

так, что по лемме 1 эта пара является уравновешенной.

В силу леммы 2 остается исследовать случай, когда $\alpha>0$, $\beta>0$. В этом случае из лемм 6 и 7 и леммы 1 следует, что g-уравновешенными могут быть только пары $x_0=(\alpha, 1-\alpha)$, $y_0=(\beta, 1-\beta)$, где $\beta\geqslant\beta_0$, $\alpha\geqslant\alpha_0$.

Если $1-\alpha>0$, $1-\beta>0$, то по лемме 1 g-уравновешенными являются такие и только такие пары стратегий, для которых выполнены соотношения

$$V(1)=V(0),\ V(\xi)\leqslant V(0),\ \xi\in[0,1],$$
$$W(1)=W(0),\ W(\eta)\leqslant W(0),\ \eta\in[0,1],$$

а по леммам 6 и 7 это выполнимо тогда и только тогда, когда $\alpha=\alpha_0$ и $\beta=\beta_0$.

Таким образом, доказано, что в условиях теоремы имеется только одна уравновешенная пара, в которой $1-\alpha>0$, $1-\beta>0$ (кроме ранее найденной). Это пара

$$x_0=(\alpha_0,\ 1-\alpha_0),\ y_0=(\beta_0,\ 1-\beta_0).$$

Если в уравновешенной паре $1-\alpha=0$, $1-\beta>0$, то должно выполняться соотношение $K(0,0)>K(1,0)$ и $L(0,0)=L(0,1)$. При выполнении этих последних соотношений то, что пара $x_0=(1,0)$, $y_0=(\beta, 1-\beta)$, $\beta\geqslant\beta_0$ является уравновешенной и других g-уравновешенных пар не существует, доказывается так же, как и в теореме 2.

Аналогично доказывается, что в случае, когда $L(0,0)>L(0,1)$ $K(0,0)=K(1,0)$, существуют еще g-уравновешенные пары вида

$$x_0=(\alpha,\ 1-\alpha),\ y_0=(1,0), \text{ где } \alpha\geqslant\alpha_0.$$

Далее, как и в теореме 2, доказывается, что пара $x_0=(1{,}0)$, $y_0=(1{,}0)$ является уравновешенной.

Так как исчерпаны все возможности для величин α, $1-\alpha$, β, $1-\beta$, можем заключить, что других g-уравновешенных пар не существует.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
23.IX.1970

Литература

1. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, „Мир“, М., 1964.
2. Р. Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, ИЛ, М., 1961.
3. Д. Суджюте, Вид спектров равновесных стратегий некоторых неантагонистических игр двух лиц на единичном квадрате, Лит. матем. сб., **IX**, № 3 (1969), 687–694.
4. Д. Суджюте, Существование и вид равновесных стратегий некоторых неантагонистических игр двух лиц с выбором момента времени, Лит. матем. сб., **X**, № 2 (1970), 375–390.

KAI KURIOS PUSIAUSVIROS STRATEGIJOS LOŠIMUOSE VIENETINIAME KVADRATE

D. Sūdžiūtė, L. Gorelik

(*Reziumė*)

Nagrinėjamas dviejų asmenų neantagonistinis lošimas vienetiniame kvadrate, kai lošimo branduoliai patenkina sąlygas 1), 2). Nustatoma, kokiais atvejais egzistuoja pusiausviros strategijų poros, kuriose pasiskirstymo funkcijos pastovios intervale (0, 1). Egzistencijos atveju nurodomas jų pavidalas.

SOME EQUILIBRIUM STRATEGIES IN THE GAMES ON THE UNITE SQUARE

D. Sūdžiūtė, L. Gorelik

(*Summary*)

A non-zero sum two-person game on the unite square, when the kernels fulfil the requirements 1), 2) has been considered. The conditions for existing of the equilibrium strategies with the spectra in the set (0, 1) are given. In case, when these equilibrium strategies, exist, their shapes are given.