1971

УДК 519.21

ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ДО ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ В СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДАНИИ

А. К. Алешкявичене

Пусть имеется последовательность ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Не нарушая общности, можем предполагать, что ξ_l не равны константе с вероятностью единица.

Положим

$$\mathbf{M}\xi_l = a > 0, \quad \mathbf{M}(\xi_l - a)^2 = \sigma^2, \quad \mathbf{M}|\xi_l - a|^3 = \beta_3, \quad \rho_3 = \frac{\beta_3}{\sigma_3},$$

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{l=1}^{n} \xi_l, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \bar{S}_n = \max_{1 \leqslant l \leqslant n} S_l, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{S}_n = \max[0, \bar{S}_n], \quad N(x) = \max\{n : \bar{S}_n \leqslant x\}$$

и $F_n(x)$, $\bar{F}_n(x)$, $\tilde{F}_n(x)$ – функции распределения соответственно сумм S_n, $\bar{S}_n$ и $\tilde{S}_n$.

Нас будет интересовать предельное поведение случайного процесса $N(x)$ при $x \to \infty$. О ранних работах по этому вопросу можно узнать из [10]–[13].

Сформулируем основные наши результаты.

Теорема 1. *Если случайные величины ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, являются решетчатыми с максимальным шагом распределения равным 1 или имеют ограниченную плотность и, кроме того, если $\mathbf{M}|\xi_l|^3 < \infty$, то при $n \to \infty$*

$$\sqrt{n}\,\mathbf{P}\{N(x) = n\} = \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-na)^2}{2\sigma^2 n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по x, $0 < \delta < x < \infty$.

Теорема 2. *Если случайные величины ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, являются нерешетчатыми и $\mathbf{M}|\xi_l|^3 < \infty$, то при $n \to \infty$*

$$\sqrt{n}\,\mathbf{P}\{N(x) = n\} = \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-na)^2}{2\sigma^2 n}} + o(1)$$

равномерно относительно x, $0 < x < \infty$.

Как следствие теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если случайные величины ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, являются решетчатыми с максимальным шагом распределения равным 1 или имеют ограниченную плотность и, кроме того, если $\mathbf{M}|\xi_l|^3 < \infty$, то при $x \to \infty$*

$$\sqrt{x}\,\mathbf{P}\{N(x) = n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/a^3}}\, e^{-\frac{\left(n-\frac{x}{a}\right)^2}{2x\sigma^2/a^3}}\left(1 + O\left(\frac{\left|n - \frac{x}{a}\right|^3}{x^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

равномерно по n, $0 \leqslant n < \infty$.

Следующая теорема является следствием теоремы 2.

Теорема 4. *Если случайные величины* ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, *являются нерешетчатыми и* $\mathbf{M}|\xi_l|^3<\infty$, *то при* $x\to\infty$

$$\sqrt{x}\,\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/a^3}}\,e^{-\frac{\left(n-\frac{x}{a}\right)^2}{2x\sigma^2/a^2}}+o(1)$$

равномерно по n, $0\leqslant n<\infty$.

При доказательстве теоремы 2 мы пользовались следующей теоремой.

Теорема 5. 1) *Если* $\mathbf{M}|\xi_l|^3<\infty$, *то существует абсолютная постоянная* L *такая, что*

$$\bar F_n(x\sigma\sqrt{n}+an)-\Phi(x)|<\frac{L\rho_3}{\sqrt{n}\,(1+x^2)},$$

где $\Phi(x)$ — *нормальное распределение с параметрами* (0, 1).

2) *Если случайные величины* ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, *являются нерешетчатыми и* $\mathbf{M}|\xi_l|^3<\infty$, *то при* $n\to\infty$

$$\left|\bar F_n(x\sigma\sqrt{n}+an)-\Phi(x)-\frac{\alpha_3}{6\sigma\sqrt{2\pi n}}(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\frac{\bar a_{n-k}}{\sigma\sqrt{2\pi k}}\exp\left\{-\frac{\left[x-\frac{(k-n)a}{\sigma\sqrt{n}}\right]^2}{2\frac{k}{n}}\right\}\right|=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+x^2)}\right),$$

где $\alpha_3=\mathbf{M}(\xi_l-a)^3$ *и* $\bar a_k=\int\limits_{-\infty}^{0}x\,d\bar F_k(x)$.

Заметим, что первое утверждение теоремы 5 только с равномерной оценкой получено в работе [9].

Доказательство теоремы 5. Пусть

$$F^*(x)=\begin{cases}-F(x), & x<0,\\ 1-F(x), & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Тогда (см. [3])

$$x^2[\bar F_n(x\sigma\sqrt{n}+an)-\Phi(x)]=V_1(x)-V_2(x), \tag{1}$$

где

$$V_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}y^2d\bar F_n(y\sigma\sqrt{n}+an)+2\int\limits_{-\infty}^{x}y\Phi^*(y)\,dy$$

и

$$V_2(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}y^2d\Phi(y)+2\int\limits_{-\infty}^{x}y\bar F_n^*(y\sigma\sqrt{n}+an)\,dy.$$

Если $\bar h_n(t)$ и $g(t)$ характеристические функции, соответствующие функциям $\bar F_n(x\sigma\sqrt{n}+an)$ и $\Phi(x)$, то преобразование Фурье—Стилтьеса для функции $V_1(x)-V_2(x)$ будет

$$v(t)=-\bar h_n''(t)+g''(t)+\frac{2\left(\bar h_n'(t)-g'(t)\right)}{t}-\frac{2\left(\bar h_n(t)-g(t)\right)}{t^2}. \tag{2}$$

С другой стороны, функция $V_1(x)$ является неубывающей, а $V_2(x)$ – функцией ограниченной вариации. Кроме того,

$$V_1(-\infty)=V_2(-\infty)$$

и $V_2'(x)$ существует при всех x и $|V_2'(x)|\leqslant A$. Следовательно, чтобы можно было воспользоваться теоремой 2 работы [3], осталось только оценить величину

$$\int_{-T_n}^{T_n}\left|\frac{v(t)}{t}\right|dt, \quad \text{где} \quad T_n=\frac{\sqrt{n}}{5\rho_3}.$$

Обозначим через $f(t)$, $f_n(t)$, $\varphi_n(t)$ и $h_n(t)$ характеристические функции, соответствующие распределениям $F(x)$, $F_n(x)$, $\tilde{F}_n(x)$ и $\bar{F}_n(x)$. Известно (см. [1]), что

$$h_n(t)=\varphi_{n-1}(t)f(t), \tag{3}$$

где

$$\varphi_n(t)=f^n(t)+\sum_{k=0}^{n-1}f^k(t)\bar{\varphi}_{n-k}(t) \tag{4}$$

и

$$\bar{\varphi}_n(t)=\mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\}-\int_{-\infty}^{0}e^{itx}\,d\bar{F}_n(x). \tag{5}$$

Следовательно,

$$\bar{h}_n(t)=e^{-\frac{iant}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_{n-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\bar{f}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right), \tag{6}$$

где

$$\bar{f}(t)=e^{-iat}f(t).$$

Тогда согласно (2) и (6)

$$\int_{-T_n}^{T_n}\left|\frac{v(t)}{t}\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-T_n}^{T_n}\left|\left\{\frac{2\left[g(t)-\bar{f}_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]}{t^3}+\frac{2\left[\bar{f}_n'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-g'(t)\right]}{t^2}-\frac{\bar{f}_n''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-g''(t)}{t}\right\}\right|dt+$$

$$+\int_{-T_n}^{T_n}\left|\left\{-\frac{2}{t^3}\sum_{k=1}^{n-1}\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{2}{t^2\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\left[k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{f}'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\right.$$

$$-\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)[ia(n-k)]\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}'_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\Big]e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}-$$

$$-\frac{1}{t\sigma^2 n}\sum_{k=1}^{n-1}\Big[k(k-1)\bar{f}^{k-2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{f}'^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{f}''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-$$

$$-2k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{f}'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)[ia(n-k)]\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+2k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{f}'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}'_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)[ia(n-k)]^2\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-$$

$$-2\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)[ia(n-k)]\bar{\varphi}'_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}''_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\Big]e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\Big\}\Big|\,dt=I_1+I_2, \tag{7}$$

где через I_1 и I_2 обозначены первый и второй интегралы соответственно.

Воспользовавшись оценками величин

$$\left|\frac{\bar{f}_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-g(t)}{t^3}\right|,\quad \left|\frac{\bar{f}'_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-g'(t)}{t^2}\right|\quad \text{и}\quad \left|\frac{\bar{f}''_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-g''(t)}{t}\right|,$$

полученными в работе [3] (см. доказательство теоремы 5), получаем

$$I_1\leqslant\frac{C_1\rho_3}{\sqrt{n}}. \tag{8}$$

(Здесь и в дальнейшем через C_1, C_2, ... обозначены абсолютные постоянные.)

Для оценки интеграла I_2 и в дальнейшем необходимы несколько вспомогательных лемм, к доказательству которых теперь и приступим.

Пусть

$$\Psi(t;\ z)=\big(1-zf(t)\big)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)z^n. \tag{9}$$

Тогда (см. [7])

$$\Psi(t;\ z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}_n(t)z^n=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\int_{-\infty}^{0}(1-e^{itx})\,dF_n(x)\right\}. \tag{10}$$

Обозначим

$$\bar{a}_n=\int_{-\infty}^{0}x\,d\bar{F}_n(x),\qquad a_n^-=\int_{-\infty}^{0}x\,dF_n(x),$$

$$\bar{b}_n=\int_{-\infty}^{0}x^2\,d\bar{F}_n(x),\qquad b_n^-=\int_{-\infty}^{0}x^2\,dF_n(x)$$

и

$$\bar{c}_n = \int_{-\infty}^{0} x^3 d\bar{F}_n(x).$$

Лемма 1. *Если* $\mathbf{M}|\xi_i|^3 < \infty$, *то*

$$\bar{a}_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Доказательство. Согласно (5) и (10) производящая функция для $\bar{a}_n$ равна $i\Psi_t'(t;\ z)$. Далее, из (10) получаем

$$\Psi_t'(t;\ z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n'(t) \frac{z^n}{n} \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_{-\infty}^{0} (1 - e^{itx})\, dF_n(x)\right\}, \tag{11}$$

где

$$\psi_n(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{itx} dF_n(x).$$

Следовательно

$$\Psi_t'(0;\ z) = -i\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \frac{z^n}{n},$$

а отсюда (см. также [7])

$$\bar{a}_n = \frac{a_n^-}{n}. \tag{12}$$

С другой стороны,

$$a_n^- = \int_{-\infty}^{0} x dF_n(x) = -\int_{-\infty}^{-na} \hat{F}_n(x)\, dx, \tag{13}$$

где $\hat{F}_n(x) = F_n(x + na)$. Но при $x < -\frac{3}{2}(\beta_3 K_3)^{1/3}\sqrt{n}\ln n$ имеет место неравенство (см. [2] следствие 1 из теоремы 1)

$$\hat{F}_n(x) < n\hat{F}\left(\frac{2x}{3}\right) + \exp\left\{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 3^2\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{2K_3^{1/3}}\right)^2 + 1\right\}\left[\frac{n\beta_3\left(\frac{3}{2}\right)^3 K_3}{x^3}\right]^{3/2} =$$

$$= n\hat{F}\left(\frac{2x}{3}\right) + C_0\frac{n^{3/2}}{x^{9/2}}, \tag{14}$$

где

$$K_3 = 1 + 4^5 e^{-3}$$

и

$$C_0 = \left[\beta_3\left(\frac{3}{2}\right)^3 K_3\right]^{3/2}\cdot\exp\left\{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 3^2\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{2K_3^{1/3}}\right)^2 + 1\right\}. \tag{15}$$

Так как согласно (14)

$$\int_{-\infty}^{-na} \hat{F}_n(x)\, dx \leqslant n\int_{-\infty}^{-na} \hat{F}\left(\frac{2x}{3}\right) dx + C_0 n^{3/2}\int_{-\infty}^{-na} \frac{dx}{|x|^{9/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3^2 n}{(2na)^2}\int_{-\infty}^{-na}\left(\frac{2}{3}x\right)^2 \hat{F}\left(\frac{2x}{3}\right) dx + C_0\frac{n^{3/2}}{(na)^{7/2}} = o\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{C_0}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то из соотношений (12)–(14) следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Если* $\mathbf{M}|\xi_l|^3<\infty$, *то*

$$\bar{b}_n=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Из (10) следует, что производящей функцией для $\bar{b}_n$ является $\Psi_t''(0;\ z)$. Из (12) получаем (см. также [7], доказательство леммы 3)

$$\Psi_t''(t;\ z)=\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n'(t)\ \frac{z^n}{n}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n''(t)\ \frac{z^n}{n}\right]\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\int_{-\infty}^{0}(1-e^{itx})\,dF_n(x)\right\}, \tag{16}$$

и отсюда

$$\Psi_t''(0;\ z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^-}{n}\ z^n-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^-}{n}\ z^n\right)^2. \tag{17}$$

Далее имеем

$$b_n^-=\int_{-\infty}^{0-}x^2\,dF_n(x)=-2\int_{-\infty}^{0}xF_n(x)\,dx=-2\int_{-\infty}^{-na}(x+na)\,\hat{F}_n(x)\,dx. \tag{18}$$

Из (14) и (18) получаем, что

$$b_n^-=o(1). \tag{19}$$

Далее, так как согласно (12) (см. также [7]) и лемме 1 коэффициент при z^n в разложении функции $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^-}{n}\ z^n\right)^2$ равен

$$\sum_{k=1}^{n-1}\bar{a}_k\bar{a}_{n-k}\leqslant\bar{a}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\bar{a}_k=O\left(\bar{a}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)=o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{20}$$

то из (17), (19) и (20) следует справедливость леммы 2.

Лемма 3. *Если* $\mathbf{M}|\xi_l|^3<\infty$, *то*

$$\bar{c}_n=o(1).$$

Доказательство. Согласно (5) и (10), производящей функцией для $\bar{c}_n$ является $i^3\Psi_t'''(0;\ z)$. Из (17) получаем, что

$$\Psi_t'''(t;\ z)=\left[3\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n''(t)\ \frac{z^n}{n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n'(t)\ \frac{z^n}{n}-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n'(t)\ \frac{z^n}{n}\right)^3-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n'''(t)\ \frac{z^n}{n}\right]\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\int_{-\infty}^{0}(1-e^{itx})\,dF_n(x)\right\}.$$

Отсюда

$$\Psi_t'''(0;\ z)=3i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^-}{n}\ z^n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^-}{n}\ z^n+i\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^-}{n}\ z^n\right)^3+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^-}{n}\ z^n. \tag{21}$$

Далее имеем

$$c_n^- = \int_{-\infty}^{0-} x^3 dF_n(x) = -3 \int_{-\infty}^{0} x^2 F_n(x)\,dx =$$

$$= -3 \int_{-\infty}^{-na} (x+na)^2 F_n(x+na)\,dx = -3 \int_{-\infty}^{-na} (x+na)^2 \hat{F}(x)\,dx. \tag{22}$$

Из (15), (22) и того, что

$$\int_{-\infty}^{-na} (x+na)^2 \hat{F}_n(x)\,dx < 4 \int_{-\infty}^{-na} x^2 \hat{F}_n(x)\,dx,$$

следует, что

$$c_n^- = o(n). \tag{23}$$

Согласно (13), (20) и леммам 1 и 2 коэффициент при z^n в разложении функции $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^-}{n} z^n\right)^3$ равен

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_j \bar{a}_{i-j}\right) \bar{a}_{n-i} = O\left(\bar{a}_{\left[\frac{n}{4}\right]}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{24}$$

а коэффициент при z^n в разложении функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^-}{n} z^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^-}{n} z^n$$

равен

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k^-}{k} \bar{a}_{n-k} = O\left(\left|\bar{a}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right| \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{b_k^-}{k} + \frac{2b^-_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} |\bar{a}_{n-k}|\right) = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{25}$$

Из соотношений (21) и (23)—(25) следует утверждение леммы 3.

Теперь мы уже в состоянии оценить интеграл I_2 в соотношении (7). Имеем

$$\int\limits_{|t|\leqslant T_n} \Bigg| \sum_{k=1}^{n-1} \bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}} \Bigg[-\frac{2}{t^3}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+\frac{2}{t^2\sigma\sqrt{n}}\bar{\varphi}'_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{t\sigma^2 n}\bar{\varphi}''_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\Bigg]\Bigg|\,dt =$$

$$= \frac{3}{\sigma^3 n^{3/2}} \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \bar{c}_{n-k} \right| dt. \tag{26}$$

Поскольку при $|t| \leqslant \frac{3\sqrt{n}}{2\rho_3}$ (см. [1], формула (27))

$$\left|\bar{f}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| < e^{-\frac{t^2}{4n}}, \tag{27}$$

то из леммы 3 следует, что

$$\frac{3}{\sigma^3 n^{3/2}} \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \bar{f}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^k |\bar{c}_{n-k}|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{\sigma^3 n^{3/2}} \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{c}_{n-k}|\, e^{-\frac{kt^2}{4n}}\, dt \leqslant \frac{3\sqrt{2\pi}}{\sigma^3 n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\bar{c}_{n-k}|}{\sqrt{k}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{28}$$

Далее, используя леммы 1 и 2 и неравенство (27) получаем

$$\frac{2}{\sigma\sqrt{n}} \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) [ia(n-k)]\, e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}} \left[\frac{1}{t\sigma\sqrt{n}}\bar{\varphi}'_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{t^2}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right| dt \leqslant \frac{2a}{\sigma^3 n^{3/2}} \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\bar{b}_{n-k} e^{-\frac{kt^2}{4n}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\sqrt{\pi}\, a}{\sigma^3 n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)\,\bar{b}_{n-k}}{\sqrt{k}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{29}$$

$$\frac{2}{\sigma\sqrt{n}} \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \left| \sum_{k=1} k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \bar{f}'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}} \left[\frac{1}{t^2}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{t\sigma\sqrt{n}}\bar{\varphi}'_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right| dt \leqslant \frac{5}{\sigma^2 n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k\bar{b}_{n-k} \int\limits_{|t|\leqslant T_n} |t|\, e^{-\frac{(k-1)t^2}{4n}}\, dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_{n-k} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \tag{30}$$

$$\int\limits_{|t|\leqslant T_n} \frac{1}{\sigma^2 nt} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) [ia(n-k)]^2 - \right.$$

$$\left. - 2k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \bar{f}'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) [ia[n-k)] \right\} e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}} \bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\Big| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \frac{1}{\sigma^3 n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{a}_{n-k}| \left[a^2(n-k)^2 e^{-\frac{kt^2}{4n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{4a\sigma}{\sqrt{n}} k(n-k)|t|\, e^{-\frac{(k-1)t^2}{4n}}\right] dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}\, a^2}{\sigma^3 n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^2 |\bar{a}_{n-k}|}{\sqrt{k}} + \frac{8a}{\sigma^2 n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)|\bar{a}_{n-k}| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{31}$$

и

$$\int\limits_{|t|\leqslant T_n} \left| \frac{1}{\sigma^2 nt} \sum_{k=0}^{n-1} \left[k(k-1)\bar{f}^{k-2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \bar{f}'^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \bar{f}''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}} \bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \frac{1}{\sigma^3 n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{a}_{n-k}| \left[\frac{\sigma^2}{n} k(k-1)t^2 e^{-\frac{(k-2)t^2}{4n}} + \sigma^2 k e^{-\frac{(k-1)t^2}{4n}}\right] dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} (\sqrt{2\pi}+1) \sum_{k=2}^{n-1} |\bar{a}_{n-k}| + \frac{2\sqrt{\pi}}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{a}_{n-k}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} (2+\sqrt{2\pi}) \sum_{k=1}^{n-1} |\bar{a}_{n-k}| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{32}$$

Из соотношений (7), (26) и (28)–(32) получаем, что

$$I_2 \leqslant C_3 \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{33}$$

Далее, из (7), (8) и (33) следует

$$\int\limits_{-T_n}^{T_n} \left|\frac{v(t)}{t}\right| dt \leqslant \frac{C_4}{\sqrt{n}}, \tag{34}$$

а из (1), (34) и теоремы 2 работы [3] – первое утверждение теоремы 5.

Перейдем к доказательству второй части теоремы 3. Имеем

$$x^2 [\bar{F}_n(x\sigma\sqrt{n}+an) - \Phi_n(x)] = V_1(x) - \bar{V}_2(x), \tag{35}$$

где

$$\Phi_n(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6\sigma\sqrt{2\pi n}} (1-x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} -$$

$$- \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1} \frac{\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{2\pi k}} \exp\left\{-\frac{\left[x - \frac{(k-n)a}{\sigma\sqrt{n}}\right]^2}{2\frac{k}{n}}\right\},$$

$$\bar{V}_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} y^2 \Phi_n(y) + 2 \int\limits_{-\infty}^{x} y\bar{F}_n^*(y\sigma\sqrt{n}+an)\,dy + 2 \int\limits_{-\infty}^{x} yR_n(y)\,dz$$

и

$$R_n(x) = \Phi_n(x) - \Phi(x).$$

Тогда преобразование Фурье—Стилтьеса для функции $V_1(x) - \bar{V}_2(x)$ будет

$$\bar{v}(t) = -\bar{h}_n''(t) + g_n''(t) + \frac{2\left(\bar{h}_n'(t) - g_n'(t)\right)}{t} - \frac{2\left(\bar{h}_n(t) - g_n(t)\right)}{t^2},$$

где

$$g_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_n(x).$$

Далее, функция $\bar{V}_2(x)$ является функцией ограниченной вариации, $V_1(-\infty) = \bar{V}_2(-\infty)$, $\bar{V}_2'(x)$ существует при всех x и $|\bar{V}_2'(x)| \leqslant A_1$, A_1 – абсолютная постоянная. Следовательно, чтобы можно было воспользоваться теоремой 2 работы [3], осталось еще оценить величину

$$\int\limits_{-T_n\lambda(n)}^{T_n\lambda(n)} \left|\frac{\bar{v}(t)}{t}\right| dt, \qquad \lambda(n)\to\infty \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Пусть

$$U_n(x) = -\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1} \frac{\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{2\pi k}} \exp\left\{-\frac{\left[x-\frac{(k-n)a}{\sigma\sqrt{n}}\right]^2}{2\frac{k}{n}}\right\},$$

$$u_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dU_n(x) \quad \text{и} \quad \bar{g}_n(t) = g_n(t) - u_n(t).$$

Тогда, ввиду того, что

$$u_n(t) = \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1} \frac{it\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{kt^2}{2n}} e^{-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}},$$

имеем

$$\int_{-T_n}^{T_n} \left|\frac{\bar{v}(t)}{t}\right| dt \leqslant \int_{-T_n}^{T_n} \left| \frac{2\left[\bar{g}_n(t) - \bar{f}_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]}{t^3} + \frac{2\left[\bar{f}_n'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \bar{g}_n'(t)\right]}{t^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{f}_n''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \bar{g}_n''(t)}{t} \right| dt +$$

$$+ \int_{-T_n}^{T_n} \left| \left\{ \frac{2}{t^3} \left[\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1} \frac{it\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{kt^2}{2n}} e^{-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}} - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n-1} \bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}} \bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{2}{t^2}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{f}'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \right.\right.$$

$$- \bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)[ia(n-k)]\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) +$$

$$\left. + \bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}_{n-k}'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}} -$$

$$- \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1} i\bar{a}_{n-k}\left(e^{-\frac{kt^2}{2n}} - \frac{kt^2}{n} e^{-\frac{kt^2}{2n}} - \right.$$

$$\left.\left. - t\,\frac{i(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{kt^2}{2n}}\right) e^{-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}}\right] -$$

$$- \frac{1}{t}\left[\frac{1}{\sigma^2 n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(k(k-1)\bar{f}^{k-2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{f}'^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \right.\right.$$

$$+ k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{f}''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) -$$

$$-2kf^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)f'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)[ia(n-k)]\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+2kf^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)f'\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}'_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+f^{k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)[ia(n-k)]^2\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-$$

$$-2f^{k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)[ia(n-k)]\bar{\varphi}'_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+f^{k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\bar{\varphi}''_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\Bigg)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}-$$

$$-\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\frac{i\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}}\left(-2\frac{kt}{n}-2\frac{i(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}-\frac{k}{n}t+t\left(\frac{kt}{n}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\frac{i(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}\frac{kt^2}{n}+t\left[\frac{i(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}\right]^2\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{kt^2}{2n}-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\Bigg]\Bigg\}\Bigg|\,dt=J_1+J_2, \tag{36}$$

где через J_1 и J_2 обозначены первый и второй интегралы соответственно.

Чтоб оценить интеграл J_2 сначала оценим отдельно несколько интегралов. Имеем

$$\int\limits_{|t|\leqslant T_n}\Bigg|\frac{1}{t\sigma^2 n}\sum_{k=1}^{n-1}k(k-1)f^{k-2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)f'^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\times$$

$$\times e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-$$

$$-\frac{1}{t}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\left[\frac{it\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}}\left(\frac{kt}{n}\right)^2e^{-\frac{kt^2}{2n}}e^{-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}}\right]\Bigg|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant T_n}\Bigg|\frac{1}{t\sigma^2 n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}k(k-1)f^{k-2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)f'^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\times$$

$$\times e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\Bigg|\,dt+$$

$$+\int\limits_{|t|\leqslant T_n}\Bigg|\frac{1}{t\sigma^2 n}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1}k(k-1)f^{k-2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)f'^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\times$$

$$\times e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-$$

$$-\frac{1}{t}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1}\frac{it\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}}\left(\frac{kt}{n}\right)^2\exp\left\{-\frac{kt^2}{2n}-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\Bigg|\,dt=J_2'+J_2'',$$

где J_2' и J_2'' обозначают первый и второй интегралы соответственно и

$$J_2' \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \frac{1}{\sigma^2 n^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} k(k-1) \frac{|\bar{a}_{n-k}|}{\sigma\sqrt{n}} t^2 e^{-\frac{(k-2)t^2}{2n}} dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{38}$$

$$J_2'' \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \left| \frac{1}{t\sigma^2 n} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} k(k-1) \left\{ \left[\bar{f}^{k-2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left. - e^{-\frac{(k-2)t^2}{2n}} \right] \bar{f}'^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) +$$

$$+ e^{-\frac{(k-2)t^2}{2n}} \left[\bar{f}'^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{\sigma^4 t^2}{\sigma^2 n} \right] \bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) +$$

$$\left.\left. + \frac{\sigma^2 t^2}{n} \left[\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{it\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}} \right] \exp\left\{ -\frac{(k-2)t^2}{2n} - \frac{it\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}} \right\} \right\} \right| dt +$$

$$+ \int\limits_{|t|\leqslant T_n} \left| \frac{1}{n^2} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \left[k(k-1) \frac{i\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}} t e^{-\frac{(k-2)t^2}{2n}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{i\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}} \left(\frac{kt}{n}\right)^2 e^{-\frac{kt^2}{2n}} \right] e^{-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}} \right| dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{39}$$

Далее,

$$\int\limits_{-T_n}^{T_n} \left| \left[-\frac{1}{t\sigma^2 n} \sum_{k=1}^{n-1} k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \bar{f}''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}} \bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{t} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \frac{it\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}} \frac{k}{n} \exp\left\{ -\frac{kt^2}{2n} - \frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}} \right\} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-T_n}^{T_n} \left| \left[-\frac{1}{t\sigma^2 n} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} k\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \bar{f}''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times e^{-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}} \bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right] \right| dt +$$

$$+ \int\limits_{-T_n}^{T_n} \left| \frac{1}{t\sigma^2 n} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \left\{ -k \left[\bar{f}^{k-1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left. - e^{-\frac{(k-1)t^2}{2n}} \right] \bar{f}''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) +$$

$$+ e^{-\frac{(k-1)t^2}{2n}} \left[-\bar{f}''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \sigma^2 \right] \bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) +$$

$$\left.\left. + e^{-\frac{(k-1)t^2}{2n}} \sigma^2 \left[\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{it\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}} \right] \right\} e^{-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}} \right| dt = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{40}$$

и

$$\int_{-T_n}^{T_n}\left|\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\frac{it\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{n}}\left[\frac{i(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}\frac{kt}{n}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{i(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right]\exp\left\{-\frac{kt^2}{2n}-\frac{it(n-k)a}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right|dt=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (41)$$

Из соотношений (26), (28)—(31) и (36)—(41) следует, что,

$$J_2=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (42)$$

а из работы [4] (см. доказательство теоремы 5), что

$$J_1=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (43)$$

Еще осталось оценить интеграл

$$\int\limits_{T_n<|t|<\sqrt{n}\lambda(n)}\left|\frac{\bar{v}(t)}{t}\right|dt=\int\limits_{T_n<|t|<\sqrt{n}\lambda(n)}\left|\frac{\bar{v}_1(t)}{t}\right|dt+$$

$$+\int\limits_{T_n<|t|<\sqrt{n}\lambda(n)}\left|\frac{\bar{v}_2(t)}{t}\right|dt=J_3+J_4, \quad (44)$$

где $\frac{\bar{v}_1(t)}{t}$ и $\frac{\bar{v}_2(t)}{t}$ соответственно обозначают подынтегральные выражения интегралов J_1 и J_2 в соотношении (36). Из работы [4] (см. доказательство теоремы 5) следует, что

$$J_3=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Для оценки интеграла J_4 нам будет нужна следующая лемма К. Г. Эссеена (см. [6] или [4]): если распределение нерешетчатое, то для любого $\omega>0$ существует такая функция $\bar{\lambda}(n)$, что $\bar{\lambda}(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и

$$\int_{\omega}^{\bar{\lambda}(n)}\frac{|f(t)|^n}{t}dt<e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}\ln\frac{n}{\omega}.$$

Так как согласно этой лемме существует такая функция $\bar{\lambda}(k)\to\infty$ при $k\to\infty$, что

$$\int\limits_{\frac{\sigma^2}{5\beta_3}\leqslant|t|\leqslant\bar{\lambda}(k)}\frac{|f(t)|^k}{|t|}dt<e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}}\ln\frac{5\beta_3 k}{\sigma^2}$$

и согласно леммам 1 – 3 при $\psi(n)=\left[\frac{n}{\ln n}\right]$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\psi(n)}[k^2\bar{a}_{n-k}+k\bar{b}_{n-k}+(n-k)^2\bar{a}_{n-k}+(n-k)\bar{b}_{n-k}+\bar{c}_{n-k}]=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right),$$

то при $\lambda(n)=\min\left(\bar{\lambda}(\psi(n)),\ n\right)$

$$J_4=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (46)$$

Из соотношений (42)—(46) имеем

$$\int\limits_{-T_n\lambda(n)}^{T_n\lambda(n)} \left| \frac{v(t)}{t} \right| dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{47}$$

а из (35), (47) и теоремы 2 работы [3] следует второе утверждение теоремы 5. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Имеем

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\} = \mathbf{P}\{\bar{S}_n \leqslant x\} - \mathbf{P}\{\bar{S}_{n+1} \leqslant x\} = \bar{F}_n(x) - \bar{F}_{n+1}(x). \tag{48}$$

Пусть $x \geqslant 0$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_n \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\tilde{S}_n \leqslant x\}$$

и (см. [1], стр. 615)

$$\bar{F}_{n+1}(x) = \int\limits_{\infty}^{\infty} \tilde{F}_n(x-y)\, dF(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, d\tilde{F}_n(y) =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y)\, d_y \tilde{F}_n(x-y).$$

С другой стороны, так как

$$\tilde{F}_n(x) = -\int\limits_0^x d_y \tilde{F}_n(x-y) = -\int\limits_0^{\infty} d_y \tilde{F}_n(x-y),$$

то, согласно (48), при $x \geqslant 0$ имеем

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} F^*(y)\, d_y \tilde{F}_n(x-y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F^*(x-y)\, d\tilde{F}_n(y), \tag{49}$$

где

$$F^*(y) = \begin{cases} -F(y), & y < 0, \\ 1 - F(y), & y \geqslant 0. \end{cases}$$

Согласно (49) в случае, когда случайные величины ξ_l имеют ограниченную плотность, при $x > \delta > 0$ имеет место соотношение (см. [8], теорема 23)

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixt} \frac{f(t)-1}{it} \varphi_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \frac{f(t)-1}{it} \varphi_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx_n} \frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}} \varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{itna}{\sigma\sqrt{n}}}\, dt,$$

где

$$x_n = \frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Далее, так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x_n^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx_n-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

то

$$\sigma\sqrt{n}\,\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_n^2}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant T_n} e^{-itx_n}\left\{\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}\left[e^{\frac{itna}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}-a\right]e^{-\frac{t^2}{2}}\right\}dt+\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}\int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} e^{-ixt}\,\frac{f(t)-1}{it}\,\varphi_n(t)\,dt-$$

$$-\frac{a}{2\pi}\int\limits_{|t|>T_n} e^{-itx_n-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_n^2}{2}}+I_1+I_2+I_3, \tag{50}$$

где через I_1, I_2 и I_3 обозначены первый, второй и третий интегралы соответственно.

Оценим I_1. Воспользовавшись оценкой (см. [6], § 40, теорема 2)

$$\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\leqslant\frac{7}{6}\,\rho_3\,\frac{|t|^3}{\sqrt{n}}\,e^{-\frac{t^2}{4}}, \tag{51}$$

верной при $|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{5\rho_3}$, из (4), (5), (27) и леммы 1 получаем, что при $|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{5\rho_3}$

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{7\rho_3}{6\sqrt{n}}\cdot a\int\limits_{|t|\leqslant T_n}|t|^3 e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt+$$

$$+\frac{a}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_n}\sum_{k=0}^{n-1}|\bar{a}_{n-k}|\,|t|\,e^{-\frac{kt^2}{4n}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{b}{2\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_n}|t|\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{52}$$

Здесь $b=\mathbf{M}\xi_j^2$.

Перейдем к оценке интеграла I_2. Согласно (4), (5) и (50)

$$I_2=\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}\int\limits_{|t|<\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} e^{-itx}\,\frac{f(t)-1}{it}\left[f^n(t)+\sum_{k=1}^{n-1}f^k(t)\,\bar{\varphi}_{n-k}(t)+\right.$$

$$\left.+\mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\}-\psi_n(t)\right]dt. \tag{53}$$

Так как распределение $F(x)$ имеет плотность, то

$$\sup_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}}|f(t)|=e^{-c}<1. \tag{54}$$

Поэтому в силу интегрируемости $|f(t)|^2$ имеем

$$\left| \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} e^{-itx} \frac{f(t)-1}{it} f^n(t)\,dt \right| \leqslant \frac{\sigma\sqrt{n}}{\pi} \int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} \frac{|f(t)|^n}{|t|}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma\sqrt{n}}{\pi} e^{-c(n-1)} \int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt = O(\sqrt{n}\,e^{-c(n-1)}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{55}$$

Воспользовавшись (54) и оценкой

$$|\bar{\varphi}_n(t)| \leqslant 2\mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\} < 2\mathbf{P}\{S_n<0\} =$$

$$= 2\mathbf{P}\{S_n - na < -na\} = 2\hat{F}(-na) \leqslant \frac{2B_3\beta_3 n}{(an)^3}, \tag{56}$$

где B_3 – абсолютная постоянная (см. [2], теорема 2 и следствие 2 из теоремы 1), получаем

$$\left| \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} e^{-itx} \frac{f(t)-1}{it} \sum_{k=1}^{n-1} \bar{f}^k(t)\,\bar{\varphi}_{n-k}(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sigma\sqrt{n}}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-c(k-1)} \mathbf{P}\{\bar{S}_{n-k}<0\} \int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{57}$$

Далее, из (56) и того, что

$$\int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} e^{-itx} \frac{dt}{it} = -\frac{e^{-itx}}{ix} \cdot \frac{1}{it} \Bigg|_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} + \frac{1}{i^2 x} \int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} \frac{e^{itx}}{t^2}\,dt,$$

имеем

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} \mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\} \left| \int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} e^{-itx} \frac{dt}{it} \right| = o\left(\frac{1}{x\sqrt{n}}\right). \tag{58}$$

Используя (56) и тот факт, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(t)|^2\,dt < \infty,$$

получаем

$$\left| \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} e^{-itx} \frac{\psi_n(t)}{it}\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma\sqrt{n}}{\pi} [\mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\}]^{1-\varepsilon_1} \int\limits_{|t|>\frac{\sigma^2}{5\beta_3}} \frac{|\psi_n(t)|^{\varepsilon_1}}{|t|}\,dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \ \left(0<\varepsilon_1<\frac{1}{2}\right). \tag{59}$$

Таким образом, из (53), (55) и (57)—(59) следует, что при $x>\delta>0$

$$|I_2| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{60}$$

Далее, так как $|I_3| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, то из (51), (52) и (60) следует утверждение теоремы 1 для нерешетчатого случая.

Перейдем к доказательству теоремы 1 для решетчатого случая. Для удобства будем считать x целым. Тогда, согласно (49),

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\sum_{k=0}^{x}\mathbf{P}\{\xi_1>k\}\mathbf{P}\{\tilde{S}_n=x-k\}-$$
$$-\sum_{k=-\infty}^{-1}\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant k\}\mathbf{P}\{\tilde{S}_n=x-k\}.$$

Но

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\mathbf{P}\{\xi_1>k\}-\sum_{k=-\infty}^{-1}e^{itk}\,\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant k\}=\frac{1-f(t)}{1-e^{it}}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itx}\,\frac{1-f(t)}{1-e^{it}}\,\varphi_n(t)\,dt.$$

Отсюда, как и в нерешетчатом случае, получаем

$$\sigma\sqrt{n}\,\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_n^2}{2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n}}e^{-itx_n}\left\{\frac{1-f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{1-e^{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}}\left[e^{-\frac{itna}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1-f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{1-e^{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}}-a\right]e^{-\frac{t^2}{2}}\right\}dt+\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}\int\limits_{\pi\geqslant|t|>\varepsilon}e^{-itx}\,\frac{1-f(t)}{1-e^{it}}\,\varphi_n(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}}e^{-itx_n-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_n^2}{2}}+I_1+I_2+I_3,\quad 0<\varepsilon\leqslant\frac{\sigma^2}{5\beta_3}.$$

Интегралы I_1 и I_3 оцениваем также как и в нерешетчатом случае, а оценивая интеграл I_2 следует воспользоваться тем, что для решетчатой случайной величины

$$|f(t)|<e^{-c_0}<1$$

при $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant2\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Согласно (49) и теореме 5 при $x\geqslant0$ имеем

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\}=-\int_0^{\infty}\tilde{F}_n(y)\,dF^*(x-y)=-\int_0^{\infty}\left[\Phi\left(\frac{y-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\right.$$
$$+\frac{\alpha_3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}}\left(1-\left(\frac{y-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)e^{-\frac{(y-na)^2}{2\sigma^2 n}}-$$
$$\left.-\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\frac{\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{2\pi k}}\exp\left\{-\frac{(y-ka)^2}{2\sigma^2k}\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left[1+\left(\frac{y-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right]}\right)\right]dF^*(x-y).\quad(61)$$

Далее, если $\Phi_{na,\sigma\sqrt{n}}(x)$ — нормальное распределение с параметрами $(na, \sigma\sqrt{n})$, то, используя тождество Парсеваля, имеем

$$-\int_0^\infty \Phi\left(\frac{y-na}{\sigma\sqrt{n}}\right) dF^*(x-y) = \int_{-\infty}^\infty \Phi_{na,\sigma\sqrt{n}}(x-y)\, dF^*(y) +$$

$$+\int_{-\infty}^0 \Phi_{na,\sigma\sqrt{n}}(y)\, dF^*(x-y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-itx}\frac{f(t)-1}{it}\exp\left\{iant - \frac{\sigma^2 nt^2}{2}\right\} dt + O\left(\frac{\sigma^2}{a^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma^2}n}\right) =$$

$$= \frac{a}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-\infty}^\infty e^{-itx_n - \frac{t^2}{2}} dt + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x_n^2}{2}} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{62}$$

$$-\frac{\alpha_3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}}\int_0^\infty \left[1-\left(\frac{y-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right] e^{-\frac{(y-na)^2}{2\sigma^2 n}} dF^*(x-y) =$$

$$= \frac{\alpha_3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}}\int_{-\infty}^\infty F^*(x-y)\, d\left\{\left[1-\left(\frac{y-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right] e^{-\frac{(y-na)^2}{\sigma^2 n}}\right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-itx}\frac{f(t)-1}{it}(it\sigma\sqrt{n})^3\exp\left\{itna - \frac{1}{2}\sigma^2 nt^2\right\} dt +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha_3}{6\sigma^2 n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-itx_n}\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}(it)^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{63}$$

и

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\frac{\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{2\pi k}}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{[y-ka]^2}{2\sigma^2 k}\right\} dF^*(x-y) =$$

$$= \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\frac{\bar{a}_{n-k}}{\sigma\sqrt{2\pi k}}\int_{-\infty}^\infty F^*(x-y)\frac{[y-ka]}{\sigma^2 k}\exp\left\{-\frac{[y-ka]^2}{2\sigma^2 k}\right\} dy +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{a^2}{4\sigma^2}n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\bar{a}_{n-k}\int_{-\infty}^\infty e^{-ixt}[f(t)-1]\exp\left\{itak - \frac{\sigma^2 kt^2}{2}\right\} dt + o\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\bar{a}_{n-k}\int_{|t|\le T_n} e^{\frac{itx}{\sigma\sqrt{n}}}\left[f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1\right]\exp\left\{\frac{itak}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{kt^2}{2n}\right\} dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\bar{a}_{n-k}\int\limits_{|t|>T_n} e^{-\frac{itx}{\sigma\sqrt{n}}}\left[f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1\right]\exp\left\{\frac{itak}{\sigma\sqrt{n}}-\frac{kt^2}{2n}\right\}dt+$$

$$+o\left(\frac{1}{n}\right)=I_1+I_2+o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{64}$$

где

$$|I_1|\leqslant\frac{a}{\pi\sigma^2 k}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\bar{a}_{n-k}\int\limits_{|t|\leqslant T_n} e^{-\frac{kt^2}{2n}}\,d\,\frac{kt^2}{2n}=O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{65}$$

и

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{\pi\sigma\sqrt{k}}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1}\bar{a}_{n-k}\int\limits_{|t|>T_n} e^{-\frac{kt^2}{2n}}\,d\,\frac{t\sqrt{k}}{\sqrt{n}}=o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{66}$$

Наконец, из (61)—(66) и того, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left[1+\frac{(y-na)^2}{\sigma^2 n}\right]}\right)dF^*(x-y)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

следует утверждение теоремы 2.

Рассуждая так, как и А. В. Нагаев (см. [5], § 2), можем показать, что теоремы 3 и 4 следуют соответственно из теорем 1 и 2.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
24.XII.1970

Литература

1. С. В. Нагаев, Оценка скорости сходимости распределения максимума сумм независимых случайных величин, Сиб. матем. ж., X, № 3(1969).
2. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее прим., X, № 2(1965).
3. Л. Д. Мешалкин, Б. А. Рогозин, Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме, Сб. „Предельные теоремы", Ташкент, 1963.
4. С. Х. Сираждинов, М. Маматов, О глобальных предельных теоремах для плотностей и функций распределения, Сб. „Предельные теоремы", Ташкент, 1963.
5. А. В. Нагаев, Локальная предельная теорема для числа восстановления, Лит. матем. сб., X, 1(1970).
6. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949.
7. С. В. Нагаев, О скорости сходимости в одной граничной задаче. I, Теория вероятн. и ее прим., XV, № 2(1970).
8. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М.-Л., 1948.
9. Б. А. Рагозин, Скорость сходимости распределения максимума сумм независимых случайных величин к предельному закону, Теория вероятн. и ее прим., XI, № 3(1966).
10. А. А. Боровков, Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I, Теория вероятн. и ее прим., V, № 2(1960).
11. А. А. Боровков, Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых, Сиб. матем. ж., 3, 5(1962).

12. А. А. Боровков, В. С. Королюк, О результатах асимптотического анализа в задачах с границами, Теория вероятн. и ее прим., X, № 2(1965).
13. C. C. Heyde, Asymptotic Renewal Results for a Natural Generalization of Classical Renewal Theory, Journal of the Royal Statistical, Society, 29, 1 (1967).

LOKALINĖS TEOREMOS PIRMO PATEKIMO LAIKUI ATSITIKTINIAME KLAIDŽIOJIME

A. Aleškevičienė

(*Reziumė*)

Sakykime, turime seką ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su neišsigimusia pasiskirstymo funkcija $F(x)$.

Pažymėkime

$$a=\mathbf{M}\,\xi_l, \quad \sigma^2=\mathbf{D}\,\xi_l,$$

$$S_0=0, \quad S_n=\sum_{l=1}^{n}\xi_l, \quad n=1, 2, \ldots, \quad \bar{S}_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i,$$

$$N(x)=\max\{n:\bar{S}_n\leqslant x\}.$$

Šio darbo pagrindinis rezultatas yra įrodymas šitokio tvirtinimo: jei $a>0$ ir $\mathbf{M}\,|\,\xi_l\,|^3<\infty$, tai, kai $n\to\infty$,

$$\sqrt{n}\,\mathbf{P}\{N(x)=n\}-\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-na)^2}{2\sigma^2 n}}\to 0 \tag{1}$$

tolygiai x atžvilgiu, $0<\delta<x<\infty$.

Tuo atveju, kai pasiskirstymas $F(x)$ yra rėtinis arba turi aprėžtą tankį, surastas (1) priklausomybėje konvergavimo greitis.

LOCAL LIMIT THEOREMS FOR THE STOPPING TIME

A. Aleškevičienė

(*Summary*)

Let ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, be a sequence of independent random variables with the same nondegenerate distribution function $F(x)$.

Let

$$a=\mathbf{M}\,\xi_l, \quad \sigma^2=\mathbf{D}\,\xi_l,$$

$$S_0=0, \quad S_n=\sum_{l=1}^{n}\xi_l, \quad n=1, 2, \ldots, \quad \bar{S}_n=\max_{1\leqslant l\leqslant n} S_l, \quad n=1, 2, \ldots,$$

$$N(x)=\max\{n:\bar{S}_n\leqslant x\}.$$

The main result of this paper is the following: if $a>0$ and $\mathbf{M}\,|\,\xi_l\,|^3<\infty$, then as $n\to\infty$

$$\sqrt{n}\,\mathbf{P}\{N(x)=n\}-\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-na)^2}{2\sigma^2 n}}\to 0 \tag{1}$$

uniformly in x, $0<\delta<x<\infty$.

In cases when the distribution $F(x)$ is lattice or has bounded density, the rate of convergence in (1) is obtained as well.