XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3

1971

УДК 519.21

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В СЛУЧАЕ СХОДИМОСТИ К УСТОЙЧИВОМУ СИММЕТРИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ

И. И. Банис

Рассматривается последовательность

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов.

Пусть $F(n^{\frac{1}{\alpha}} x)$ – функция распределения величины $\xi_i n^{-\frac{1}{\alpha}}$ и $F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}} x)$ – – функция распределения суммы S_n, где

$$S_n = n^{-\frac{1}{\alpha}} (\xi_1 + \ldots + \xi_n) \tag{2}$$

и α $(0 < \alpha \leqslant 2)$. Обозначим через $G(x)$ функцию распределения k-мерного невырожденного симметрического устойчивого закона с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 2)$ и характеристической фукцией

$$f(t_1, \ldots, t_k) = e^{-(t_1^2 + \ldots + t_k^2)^{\frac{\alpha}{2}}}. \tag{3}$$

Пусть $\mu_{ijl}(m)$ – псевдомоменты и $\nu_i(m)$ – абсолютные псевдомоменты, где

$$\mu_{ijl}(m) = \int\limits_{R_k} x_i^{k_i} x_j^{k_j} x_l^{k_l} d\left(F(x) - G(x)\right), \tag{4}$$

$$k_i + k_j + k_l = m, \quad k_i \geqslant 0, \quad k_j \geqslant 0, \quad k_l \geqslant 0,$$

$$i, j, l = 1, 2, \ldots, k.$$

и

$$\nu_i(m) = \int\limits_{R_k} |x_i|^m \left| d\left(F(x) - G(x)\right)\right|, \qquad \nu(m) = \sum_{j=1}^{k} \nu_j(m). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть последовательность* (1) *такова, что при* $r = 1 + [\alpha]$, $\mu_{ijl}(0) = \ldots = \mu_{ijl}(r-1) = 0$ *и существуют конечные абсолютные псевдомоменты* $\nu(r)$. *Тогда имеют место оценки*:

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}} x) - G(x)| \leqslant \frac{c_1(k)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}, \tag{6}$$

если $\nu(r) \leqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 2$, *и*

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}} x) - G(x)| \leqslant \frac{c_1(k)\,\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}, \tag{7}$$

если $\nu(r)>1,\ \frac{1}{2}<\alpha\leqslant 2$.

Лемма 1. *Пусть* $G(x)$ — *функция распределения* k-*мерного устойчивого симметрического закона с показателем* α $(0<\alpha\leqslant 2)$ *и плотностью* $g(x)\cdot F(x)$ — k-*мерная функция распределения и* $\tilde{G}(x)$ — k-*мерная функция, которая равна функции* $F(x)$ *при* $x=(-\infty,\ldots,-\infty)$ *и* $x=(\infty,\ldots \ldots,\infty)$; *в каждой конечной точке существует ограниченная производная*

$$|\tilde{G}'_{x_i}(x)|\leqslant A,\qquad i=1,2,\ldots,k.$$

Если для всех x

$$\left|[F(x)-\tilde{G}(x)]*G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\leqslant M(\varepsilon) \tag{8}$$

и $p(k)$, $q(k)$ — *положительные числа, удовлетворяющие соотношению*

$$\frac{3\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^{p(k)}\rho^{k-1}g(\rho)\,d\rho=1+\frac{1}{q(k)}, \tag{9}$$

то

$$|F(x)-\tilde{G}(x)|\leqslant\max\,[q(k)M(\varepsilon),\ 2\varepsilon kAp(k)] \tag{10}$$

для всех x.

Доказательство леммы 1. Оно проводится аналогично доказательству леммы 1 работы [1]. Пусть верхний предел

$$|F(x)-\tilde{G}(x)| \tag{11}$$

будет δ и для каждого $\eta>0$ в какой-то точке $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$, поэтому следует, что

$$|F(x^{(0)})-\tilde{G}(x^{(0)})|>\delta-\eta. \tag{12}$$

Применяя формулу Тейлора, для функции $\tilde{G}(x)$ получаем

$$\tilde{G}(x)=\tilde{G}(x^{(0)})+(x_1-x_1^{(0)})\,\tilde{G}'_{x_1}[x^{(0)}+\Theta(x-x^{(0)})]+\ldots+$$
$$+(x_k-x_k^{0})\,\tilde{G}'_{x_k}[x^{(0)}+\Theta(x-x_k^{(0)})],\qquad 0<\Theta<1. \tag{13}$$

Согласно предположению

$$|\tilde{G}(x)-\tilde{G}(x^{(0)})|\leqslant A\sum_{m=1}^{k}|x_m-x_m^{(0)}|. \tag{14}$$

Предположим, что верхний предел $F(x)-\tilde{G}(x)$ совпадает с $|F(x)-\tilde{G}(x)|$, тогда в точке $x^{(0)}$

$$F(x^{(0)})>\tilde{G}(x^{(0)})+\delta-\eta. \tag{15}$$

Так как $F(x)$ — функция распределения, то для каждого x_i следует, что

$$F(x)-\tilde{G}(x)\geqslant F(x^{(0)})-\tilde{G}(x)>\delta-\eta+\tilde{G}(x^{(0)})-\tilde{G}(x)>$$
$$>\delta-\eta-A\sum_{m=1}^{k}(x_m-x_m^{(0)}), \tag{16}$$

где

$$x_i^{(0)}\leqslant x_i\leqslant x_i^{(0)}+\frac{\delta-\eta}{kA},\qquad i=1,2,\ldots,k.$$

Рассмотрим выражение

$$[F(x) - \tilde{G}(x)] * G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{17}$$

$$M(\varepsilon) \geqslant \left| [F(x) - \tilde{G}(x)] * G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| = \frac{1}{\varepsilon^k} \int\limits_{R_k} [F(t) - \tilde{G}(t)]\, g\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^k} \left| \int\limits_{R_k^{(\delta-\eta)}} [F(t) - \tilde{G}(t)]\, g\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{R_k \setminus R_k^{(\delta-\eta)}} [F(t) - \tilde{G}(t)]\, g\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) dt \right|, \tag{18}$$

где $R_k^{(\delta-\eta)}$ — множество точек $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$, удовлетворяющих условию

$$x_i^{(0)} \leqslant t_i \leqslant x_i^{(0)} + \frac{\delta-\eta}{kA}, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Так как для всех x $|F(x) - \tilde{G}(x)| \leqslant \delta$, то

$$M(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\varepsilon^k} \left\{ \int\limits_{R_k^{(\delta-\eta)}} \left[\delta - \eta - A \sum_{m=1}^{k} (t_m - t_m^{(0)}) \right] g\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) dt - \right.$$

$$\left. - \delta \int\limits_{R_k \setminus R_k^{(\delta-\eta)}} g\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) dt \right\}. \tag{19}$$

После замены переменных

$$\frac{x_i - t_i}{\varepsilon} = -v_i$$

и подбора $x_i - x_i^{(0)}$, равным

$$\frac{\delta}{2kA}, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

получаем

$$M(\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\bar{R}_k^{(\delta-\eta)}} \left[\frac{1}{2}\, \delta - \eta - \varepsilon A \sum_{m=1} v_m \right] g(v)\, dv - \delta \int\limits_{R_k \setminus \bar{R}_k^{(\delta-\eta)}} g(v)\, dv, \tag{20}$$

где $\bar{R}_k^{(\delta-\eta)}$ — множество точек, удовлетворяющих

$$-\frac{\delta}{2\varepsilon kA} \leqslant v_i \leqslant \frac{\delta - 2\eta}{2\varepsilon kA}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Используя соотношение

$$\int\limits_{R_k \setminus \bar{R}_k^{(\delta-\eta)}} g(v)\, dv = 1 - \int\limits_{\bar{R}_k^{(\delta-\eta)}} g(v)\, dv \tag{21}$$

для (20), получаем

$$M(\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\bar{R}_k^{(\delta-\eta)}} \left[\frac{3}{2}\, \delta - \eta - \varepsilon A \sum_{m=1}^{k} v_m \right] g(v)\, dv - \delta. \tag{22}$$

Полученное неравенство верно для данных δ, k, ε, A и для всех η. Тогда при $\eta=0$ следует, что

$$M(\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\bar{R}_k} \left[\frac{3}{2}\,\delta - \varepsilon A \sum_{m=1}^{k} v_m\right] g(v)\,dv - \delta, \tag{23}$$

где $\bar{R}_k$ — множество точек $v=(v_1, v_2, \ldots, v_k)$

$$-\frac{\delta}{2k\varepsilon A} \leqslant v_i \leqslant \frac{\delta}{2k\varepsilon A}, \qquad i=1, \ldots, k. \tag{23'}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\bar{R}_k} \sum_{m=1}^{k} v_m g(v)\,dv = 0, \tag{24}$$

тогда

$$M(\varepsilon) \geqslant \delta \left[\int\limits_{\bar{R}_k} \frac{3}{2}\, g(v)\,dv - 1\right],$$

или

$$M(\varepsilon) \geqslant \delta \left[\frac{3}{2} \int\limits_{-\frac{\delta}{2k\varepsilon A}}^{\frac{\delta}{2k\varepsilon A}} \cdots \int\limits_{-\frac{\delta}{2k\varepsilon A}}^{\frac{\delta}{2k\varepsilon A}} g(v)\,dv - 1\right]. \tag{25}$$

В k-мерный куб (23′) впишем сферу радиуса $\frac{\delta}{2k\varepsilon A}$ и, используя выражение плотности симметрического устойчивого закона

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}\, |x|^{\frac{s}{2}-1}} \int\limits_0^{\infty} \rho^{\frac{s}{2}} J_{\frac{s}{2}-1}(\rho\,|x|)\, f(\rho)\,d\rho, \tag{26}$$

которое дается в работе [2], (25) представим в виде

$$M(\varepsilon) \geqslant \delta \left[\frac{3\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_0^{\frac{\delta}{2k\varepsilon A}} \rho^{k-1} g(\rho)\,d\rho - 1\right]. \tag{27}$$

$p(k)$ подберем настолько большим, чтобы $q(k)>0$.

Возможны два случая:

1) $\frac{\delta}{2k\varepsilon A} \leqslant p(k)$, тогда $\delta \leqslant 2p(k)\cdot k\varepsilon A$

и

2) $\frac{\delta}{2k\varepsilon A} > p(k)$, тогда $\delta < q(k)\, M(\varepsilon)$.

В случае, когда верхний предел $|F(x)-\tilde{G}(x)|$ равен $\tilde{G}(x)-F(x)$, доказательство проводится аналогично данному выше, получаем утверждение леммы 1.

$$|F(x) - \tilde{G}(x)| \leqslant \max\{q(k)\, M(\varepsilon),\quad 2k\varepsilon A\, p(k)\}.$$

Доказательство теоремы. Проведем его методом математической индукции. Сначала рассмотрим случай $\nu(r) \leqslant 1$. Покажем, что при $n=1$ имеет место (6). Оценим сверху следующее выражение:

$$[F(x)-G(x)] * G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{28}$$

Оно равно:

$$\left|[F(x)-G(x)] * G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| = \left|\int\limits_{R_k} G\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) d[F(t)-G(t)]\right|. \tag{29}$$

Разлагаем $G\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right)$ в ряд Тейлора

$$G\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) = G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\left(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + t_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \ldots +$$

$$+(-1)^r \frac{1}{r!\, \varepsilon^r}\left(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + t_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^r G\left(\frac{x-\Theta t}{\varepsilon}\right), \quad 0<\Theta<1. \tag{30}$$

Пользуясь тем, что

$$\mu_{ijl}(0) = \ldots = \mu_{ijl}(r-1) = 0, \qquad i, j, l = 1, \ldots, k, \tag{31}$$

и неравенством

$$(|t_1| + \ldots + |t_k|)^r \leqslant k^{r-1}(|t_1|^r + \ldots + |t_k|^r), \tag{32}$$

получаем

$$\left|[F(x)-G(x)] * G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^r} \sum_{m=1}^{k} \nu_m(r) \max_{x \in R_k} \left|\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_k^{m_k}} G(x)\right|, \tag{33}$$

где $m_1 + \ldots + m_k = r$.

Для оценки

$$\left|\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_k^{m_k}} G(x)\right| \tag{34}$$

воспользуемся тем, что

$$G(x) = G\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) * G\left(\frac{x}{\sigma_2}\right), \qquad \sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha = 1. \tag{35}$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_k^{m_k}} G(x)\right| = \left| \frac{1}{\sigma_2^{k+m_1+\ldots+m_k}} \int\limits_{R_k} G\left(\frac{t}{\sigma_1}\right) \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_k^{m_k}} g\left(\frac{x-t}{\sigma_2}\right)\right| dt. \tag{36}$$

После замены переменных получаем

$$\left|\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_k^{m_k}} G(x)\right| \leqslant \frac{2}{\sigma_2^r} \int\limits_{R_k} \left|\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial v_1^{m_1} \ldots \partial v_k^{m_k}} g(v)\right| dv. \tag{37}$$

Предположим, что σ_2 стремится к 1. Тогда

$$\left| \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_k^{m_k}} G(x) \right| \leqslant 2c_2(k), \tag{38}$$

где

$$c_2(k) = \int\limits_{R_k} \left| \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial v_1^{m_1}\ldots\partial v_k^{m_k}} g(v) \right| dv. \tag{39}$$

Имея в виду (38) и (5), окончательно получаем

$$\left| [F(x)-G(x)] * G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leqslant \frac{2\nu(r)\, c_2(k)\, k^{r-1}}{\varepsilon^r}. \tag{40}$$

Применяя лемму 1 и подбирая

$$\varepsilon = c_3(k)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}},$$

получаем:

$$|F(x)-G(x)| \leqslant \frac{2c_2(k)\, q(k)\, [\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}\, k^{r-1}}{c_3^r(k)} + 2k\, c_3(k) p(k)\, \tilde{c}_7\, [\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}} =$$

$$= [\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}} \left[\frac{2c_2(k)\, q(k)\, k^{r-1}}{c_3^r(k)} + 2k\, c_3(k) p(k)\, \tilde{c}_7 \right], \tag{41}$$

где

$$\tilde{c}_7 = \max_{x\in R_k} \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}.$$

Обозначая выражение в квадратных скобках $c_1(k)$, получаем

$$|F(x)-G(x)| \leqslant c_1(k)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}. \tag{42}$$

Допустим, что имеет место оценка

$$|F^{*s}(s^{\frac{1}{\alpha}}x) - G(x)| \leqslant \frac{c_1(k)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{s^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \tag{43}$$

для всех $s \leqslant n-1$, и докажем, что (43) она имеет место и для $s=n$.

Оценим сверху выражение

$$\Phi = [F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x) - G^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)] * G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{44}$$

Для этого представим его в виде

$$\Phi = \sum_{m=0}^{n-1} F^{*n-m-1}(n^{\frac{1}{\alpha}}x) * [F(n^{\frac{1}{\alpha}}x) - G(n^{\frac{1}{\alpha}}x)] * G\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right), \tag{45}$$

где

$$\varepsilon_m^\alpha = \varepsilon_{m-1}^\alpha + \frac{1}{n}, \qquad \varepsilon_m > 0, \qquad \varepsilon_0 = \varepsilon, \qquad F^{*0}(n^{\frac{1}{\alpha}}x) \doteq 1.$$

Пусть

$$F^{*n-m-1}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)=G^{*n-m-1}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)+\tilde{R}_m(x). \tag{46}$$

Тогда Φ перепишется так:

$$\Phi=\sum_{m=0}^{n-1}[G^{*n-m-1}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)+\tilde{R}_m(x)]*$$

$$*[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(n^{\frac{1}{\alpha}}x)]*G\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right)=$$

$$=n[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(n^{\frac{1}{\alpha}}x)]*G\left(\frac{x}{\varepsilon_{n-1}}\right)+$$

$$+\sum_{m=0}^{n=2}R_m(x)*[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(n^{\frac{1}{\alpha}}x)]*G\left(\frac{x}{x_m}\right), \tag{47}$$

где

$$G\left(\frac{x}{\varepsilon_{n-1}}\right)=G^{*n-m-1}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)*G\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right).$$

Для краткости обозначим

$$H_m(x)=\tilde{R}_m(x)*G\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right), \tag{48}$$

$$H_{n-1}(x)=G\left(\frac{x}{\varepsilon_{n-1}}\right). \tag{49}$$

Тогда (47) запишем в таком виде:

$$\Phi=n[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(n^{\frac{1}{\alpha}}x)]*H_{n-1}(x)+$$

$$+\sum_{m=0}^{n-2}[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(n^{\frac{1}{\alpha}}x)]*H_m(x). \tag{50}$$

Применив формулу Тейлора, получаем

$$H_m(x-t)=H_m(x)-\left(t_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+t_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)H_m(x)+\ldots+$$

$$+(-1)^r\frac{1}{r!}\left(t_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+t_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^r H_m(x-\Theta t),\quad 0<\Theta<1. \tag{51}$$

Принимая во внимание (5), (31) и (32), получаем

$$|[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(n^{\frac{1}{\alpha}}x)]*H_m(x)|\leqslant\frac{k^{r-1}N_m\nu(r)}{n^{\frac{r}{\alpha}}} \tag{52}$$

где

$$N_m=\max_{x\in R_k}\left|\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_k^{m_k}}H_m(x)\right|. \tag{53}$$

Следовательно,

$$|\Phi|\leqslant\frac{k^{r-1}N_{n-1}\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}+\frac{k^{r-1}\nu(r)}{n^{\frac{r}{\alpha}}}\sum_{m=0}^{n-2}N_m, \tag{54}$$

где

$$N_{n-1}=\max_{x\in R_k}\left|\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_k^{m_k}}H_{n-1}(x)\right|. \tag{55}$$

Оценим N_m:

$$N_m\leqslant\max_{v\in R_k}|\tilde{R}_m(v)|\cdot\frac{1}{\varepsilon_m^{k+r}}\int\limits_{R_k}\left|\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_k^{m_k}}g\left(\frac{x-v}{\varepsilon_n}\right)\right|dv \tag{56}$$

и после замены переменных

$$\frac{x-v}{\varepsilon}=t,$$

получаем

$$N_m\leqslant\max_{v\in R_k}|\tilde{R}_m(v)|\cdot\frac{1}{\varepsilon_m^r}\int\limits_{R_k}\left|\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_k}}{\partial t_1^{m_1}\ldots\partial t_k^{m_k}}g(t)\right|dt. \tag{57}$$

Принимая во внимание (39) и предположение индукции (43), получаем

$$N_m\leqslant\frac{c_1(k)\,c_2(k)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{(n-m-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,\varepsilon_m^r}. \tag{58}$$

А пользуясь (38), получаем оценку для

$$N_{n-1}\leqslant\frac{2c_2(k)}{\varepsilon_{n-1}^r}. \tag{59}$$

Из (58) и (59) следует, что

$$|\Phi|\leqslant\frac{2k^{r-1}c_2(k)\,\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,\varepsilon_{n-1}^r}+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{k^{r-1}c_1(k)\,c_2(k)\,[\nu(r)]^{-\frac{1}{r+1}+1}}{n^{\frac{r}{\alpha}}\,(n-m-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,\varepsilon_m^r}. \tag{60}$$

Оценим сумму сверху

$$\sum_{m=0}^{n-2}\frac{1}{n^{\frac{r}{\alpha}}(n-m-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{m}{n}+\varepsilon_n\right)^{\frac{r}{\alpha}}}=\frac{1}{(n-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,n^{\frac{r}{\alpha}}\,\varepsilon^r}+$$

$$+\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{(n-m-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,(m+n\varepsilon^\alpha)^{\frac{r}{\alpha}}}. \tag{61}$$

Оценим второе слагаемое в (61). Имеем

$$\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{(n-m-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,(m+n\varepsilon^\alpha)^{\frac{r}{\alpha}}}=\sum_{m=1}^{n-2}\frac{n-m-1}{[(n-m-1)\,(m+n\varepsilon^\alpha)]^{\frac{r}{\alpha}}}=$$

$$=\frac{1}{(n-1+n\varepsilon^\alpha)^{\frac{r}{\alpha}}}\sum_{m=1}^{n-2}\left[\left(\frac{1}{n-m-1}+\frac{1}{m+n\varepsilon^\alpha}\right)^{\frac{r}{\alpha}}(n-m-1)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}{(n-1+n\varepsilon^\alpha)^{\frac{r}{\alpha}}}\left[\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{(n-m-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}+(n-2)\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{(m+n\varepsilon^\alpha)^{\frac{r}{\alpha}}}\right]. \tag{62}$$

Для окончательной оценки (62) рассмотрим следующие случаи:

1) $\frac{r-\alpha}{\alpha} < 1,$

тогда получаем, что

$$\sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{(n-m-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \leqslant \int_0^{n-1} \frac{dx}{(n-x-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \leqslant \frac{\alpha}{2\alpha-r} n^{\frac{2\alpha-r}{\alpha}}, \tag{63}$$

и

$$\sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{(m+n\varepsilon^{\alpha})^{\frac{r}{\alpha}}} \leqslant \int_0^{n} \frac{dx}{(x+n\varepsilon^{\alpha})^{\frac{r}{\alpha}}} \leqslant \frac{\alpha}{r-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}} \varepsilon^{r-\alpha}}. \tag{64}$$

2) $\frac{r-\alpha}{\alpha} = 1,$

тогда получаем

$$\sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{n-m-1} \leqslant 2 \ln(n+1) \tag{65}$$

и

$$\sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{(m+n\varepsilon^{\alpha})^2} \leqslant \frac{2}{n\varepsilon^{\alpha}}. \tag{66}$$

3) $\frac{r-\alpha}{\alpha} > 1,$

тогда для сумм (62) получаются следующие оценки:

$$\sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{(n-m-1)^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \leqslant \tilde{c}_1 \tag{67}$$

и

$$\sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{(m+n-\varepsilon^{\alpha})^{\frac{r}{\alpha}}} \leqslant \frac{\alpha}{r-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}} \cdot \varepsilon^{r-\alpha}}. \tag{68}$$

Замечание. Через $\tilde{c}_i$ и $i=1, 2, \ldots$ будут обозначаться константы $\tilde{c}=\tilde{c}(\alpha)$.

Окончательно при $\frac{r-\alpha}{\alpha} < 1$ и (63), (64) получаем

$$|\Phi| \leqslant \frac{[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \left[\frac{2k^{r-1} c_2(k) [\nu(r)]^{\frac{r}{r+1}}}{\varepsilon_{n-1}^{r}} + \frac{2^{\frac{r-\alpha}{\alpha}} k^{r-1} c_1(k) c_2(k) \nu(r)}{n^{\frac{r}{\alpha}} \varepsilon^{r}} + \right.$$
$$\left. + \frac{k^{r-1} c_1(k) c_2(k) \tilde{c}_2 \nu(r)}{\left(\frac{n-1}{n} + \varepsilon^{\alpha}\right)^{\frac{r}{\alpha}} n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} + \frac{k^{r-1} c_1(k) c_2(k) \tilde{c}_3 \nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}} \varepsilon^{r-\alpha}} \right], \tag{69}$$

где

$$\tilde{c}_2 = \frac{2^{\frac{r-\alpha}{\alpha}} \cdot \alpha}{2\alpha-r}, \quad \tilde{c}_3 = \frac{2^{\frac{2r-\alpha}{\alpha}} \cdot \alpha}{r-\alpha}.$$

При $\frac{r-\alpha}{\alpha}=1$ и в силу (65) и (66) получаем

$$|\Phi|\leqslant\frac{[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}\left[\frac{2k^{r-1}c_2(k)[\nu(r)]^{\frac{r}{r+1}}}{\varepsilon_{n-1}^{r}}+\frac{2k^{r-1}c_1(k)c_2(k)\nu(r)}{n^2\varepsilon^r}+\right.$$
$$\left.+\frac{4k^{r-1}c_1(k)c_2(k)\ \ln(n+1)\nu(r)}{\left(\frac{n-1}{n}+\varepsilon^{\alpha}\right)^2 n}+\frac{8k^{r-1}c_1(k)c_2(k)\nu(r)}{n\,\varepsilon^{\alpha}}\right]. \qquad (70)$$

При $\frac{r-\alpha}{\alpha}>1$ и в силу (65) и (66) получаем

$$|\Phi|\leqslant\frac{[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}\left[\frac{2k^{r-1}c_2(k)[\nu(r)]^{\frac{r}{r+1}}}{\varepsilon_{n-1}^{r}}+\frac{2^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}k^{r-1}c_1(k)c_2(k)\nu(r)}{n^{\frac{r}{\alpha}}\varepsilon^r}+\right.$$
$$\left.+\frac{k^{r-1}2^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}c_1(k)c_2(k)\tilde{c}_1\nu(r)}{\left(\frac{n-1}{n}+\varepsilon^{\alpha}\right)^{\frac{r}{\alpha}}\cdot n}+\frac{k^{r-1}c_1(k)c_2(k)\tilde{c}_3\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\varepsilon^{r-\alpha}}\right]. \qquad (71)$$

Пусть

$$\varepsilon=\frac{c_3(k)[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}.$$

Для завершения доказательства используем лемму 1, предполагая

$$\tilde{\tilde{G}}(x)=G(x).$$

Если $\frac{r-\alpha}{\alpha}<1$, то, используя (69), получаем:

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(x)|\leqslant\frac{c_1(k)[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}\left[q(k)\left(\frac{k^{r-1}c_2(k)\tilde{c}_4}{c_1(k)}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{k^{r-1}c_2(k)\tilde{c}_5}{c_3^r(k)}+\frac{k^{r-1}c_2(k)\tilde{c}_6}{c_3(k)}+\frac{k^{r-1}c_2(k)\tilde{c}_3}{c_3^{r-\alpha}(k)}\right)+$$
$$\left.+\frac{2c_3(k)\cdot kp(k)\tilde{c}_7}{c_1(k)}\right], \qquad (72)$$

где

$$\tilde{c}_4=2^{\frac{r+\alpha}{\alpha}},\qquad \tilde{c}_5=2^{\frac{r-\alpha}{\alpha}},\qquad \tilde{c}_6=2^{\frac{r-1}{\alpha}}\tilde{c}_2.$$

В (72) $c_1(k)$ и $c_3(k)$ можно подобрать достаточно большими так, чтобы выражение в квадратных скобках было меньше 1.

В случае $\frac{r-\alpha}{\alpha}=1$ в силу леммы 1 и (70) получаем

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(x)|\leqslant\frac{c_1(k)[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n}\left[q(k)\left(\frac{k^{r-1}c_2(k)\tilde{c}_4}{c_1(k)}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{2k^{r-1}c_2(k)}{c_3^r(k)}+\frac{16k^{r-1}\ln(n+1)c_2(k)}{(2c_3^{\alpha}(k)n^{\alpha-r}-1)^2 n}+\frac{8k^{r-1}c_2(k)}{c_3^{\alpha}(k)}\right)+$$
$$\left.+\frac{2c_3(k)kp(k)\tilde{c}_7}{c_1(k)}\right]. \qquad (73)$$

Здесь $c_1(k)$ и $c_3(k)$ можно подобрать такими, чтобы выражение в квадратных скобках было меньше 1.

Случай $\frac{r-\alpha}{\alpha} > 1$. В силу леммы 1 и (71) имеем

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}} x) - G(x)| \leqslant \frac{c_1(k)[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \left[q(k) \left(\frac{k^{r-1} c_3(k) \tilde{c}_4}{c_1(k)} + \right.\right.$$
$$+ \frac{k^{r-1} c_2(k) \tilde{c}_5}{c_3^r(k)} + \frac{k^{r-1} c_3(k) \tilde{c}_8}{\left(2c_3^{\alpha}(k) n^{\frac{\alpha+r\alpha-r^2}{\alpha}} + n^{\frac{\alpha}{r}}\right)^{\frac{r}{\alpha}}} + \left. \frac{k^{r-1} c_3(k) \tilde{c}_3}{c_3^{r-\alpha}(k)} \right) +$$
$$\left. + \frac{2c_3(k) \cdot k \cdot p(k) \tilde{c}_7}{c_1(k)} \right], \tag{74}$$

где

$$\tilde{c}_8 = 2^{\frac{2r-\alpha}{\alpha}} \tilde{c}_1.$$

При достаточно больших $c_1(k)$ и $c_3(k)$ выражение в квадратных скобках будет меньше 1.

Из (72)–(74) следует первая часть теоремы.

Приступим к доказательству второй части теоремы, когда $\nu(r) > 1$. Для этого берем

$$\varepsilon = \frac{c_4(k)\,\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}.$$

Из леммы 1 и (69) получаем

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}} x) - G(x)| \leqslant \frac{c_1(k)\,\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \left[q(k) \left(\frac{k^{r-1} c_3(k) \tilde{c}_4}{c_1(k)} + \right.\right.$$
$$+ \frac{k^{r-1} c_3(k) \tilde{c}_5}{c_4^r(k)} + \frac{k^{r-1} c_2(k) \tilde{c}_6}{c_4(k)} +$$
$$+ \frac{k^{r-1} c_2(k) \tilde{c}_3 \nu(r)}{\left(\frac{c_4^{\alpha}(k)[\nu(r)]^{\alpha}}{n^{r-\alpha}} + \frac{n-1}{n}\right)^{\frac{r}{\alpha}} n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}(1+\alpha-r)} [\nu(r)]^{r-\alpha} c_4^{r-\alpha}(k)} +$$
$$\left. + \frac{2c_4(k) \cdot k \cdot p(k)}{c_1(k)} \right]. \tag{75}$$

Покажем, что $c_1(k)$ и $c_4(k)$ можно подобрать такими большими, чтобы выражение в квадратных скобках было меньше 1. В (75) только для четвертого слагаемого факт возможности подобрать такие постоянные не очевиден. Рассмотрим это слагаемое отдельно. Имеем:

$$\frac{k^{r-1} c_2(k) \tilde{c}_3}{\left(c_4^{\alpha}(k)[\nu(r)^{\alpha} n^{\alpha-r} + \frac{n-1}{n}\right)^{\frac{r}{\alpha}} n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}(1+\alpha-r)} [\nu(r)]^{r-\alpha-1} c_4^{r-\alpha}(k)}. \tag{76}$$

Заметим, что если

$$n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}(1+\alpha-r)} [\nu(r)]^{r-\alpha-1} \geqslant 1, \tag{77}$$

то константу $c_4(k)$, независящую от $\nu(r)$ и n, можно подобрать так, чтобы (76) было меньше 1/8.

Покажем, что и в случае, если

$$n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}(1+\alpha-r)}[\nu(r)]^{r-\alpha-1}<1, \qquad n<[\nu(r)]^{\frac{\alpha}{r-\alpha}},$$

эту же константу можно подобрать так, чтобы (76) было меньше 1/8. Для этого (76) преобразуем следующим образом:

$$\frac{k^{r-1}c_2(k)\,\tilde{c}_3}{\left(c_4^{\alpha}(k)\,[\nu(r)]^{\frac{\alpha}{r}(2r-\alpha-1)}\,n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}(1+\alpha-r)}+\frac{n-1}{n}\cdot n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}(1+\alpha-r)}[\nu(r)]^{\frac{\alpha}{r}(r-\alpha-1)}\right)^{\frac{r}{\alpha}}c_4^{r-\alpha}(k)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{k^{r-1}c_2(k)\,\tilde{c}_3}{c_4^{r}(k)\,[\nu(r)]^{2r-\alpha-1}\,n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}(1+\alpha-2r)}\,c_4^{r-\alpha}(k)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{k^{r-2}c_2(k)\,\tilde{c}_3}{c_4^{2r-\alpha}(k)\,[\nu(r)]^{2r-\alpha-1}\,[\nu(r)]^{1+\alpha-2r}}=\frac{k^{r-1}c_2(k)\,\tilde{c}}{c_4^{2r-\alpha}(k)}\,. \tag{78}$$

Теперь очевидно, что $c_1(k)$ и $c_4(k)$ можно подобрать такими, чтобы выражение в квадратных скобках в (75) было меньше 1.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
14.XI.1970

Литература

1. H. Bergström, On the central limit theorem in R_k, $k>1$, Skand. Aktuarietidskrift, 28 (1945), 106–127.
2. Н. Калинаускайте, Некоторые разложения многомерных симметрических устойчивых плотностей., Лит. матем. сб., X, 4 (1970), 727–732.
3. V. V. Sazonov, On the multi-dimensional central limit theorem, Sankhya, Ser. A, 30, part 2 (1968), 168–204.
4. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., X, вып. 3 (1965), 519-526.
5. H. Bergström, Eine Theorie der stabilen Verteilungsfunktionen, Archiv der Mathematik, 1953, 4, No 5–6.

KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTINIMAS DAUGIAMATĖJE INTEGRALINĖJE TEOREMOJE STABILAUS SIMETRINIO RIBINIO DĖSNIO ATVEJU

J. Banys

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjama atsitiktinių nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių k-mačių dydžių (1) seka. Gautas konvergavimo greičio įvertinimas, kai $\mu_{ijl}(0)=\ldots=\mu_{ijl}(r-1)=0$ ir egzistuoja (5); tuomet:

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(x)|\leqslant\frac{c_1(k)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}},$$

jeigu $\nu(r) \leqslant 1$, $0<\alpha\leqslant 2$, ir

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(x)| \leqslant \frac{c_1(k)\,\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}},$$

jeigu $\nu(r)>1$, $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 2$; čia $G(x)$ – daugiamačio simetrinio stabilaus ribinio dėsnio pasiskirstymo funkcija, $F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)$ – pasiskirstymo funkcija S_n, $S_n=n^{-\frac{1}{\alpha}}(\xi_1+\ldots+\xi_n)$.

ON ESTIMATION OF RATE OF CONVERGENCE IN MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL THEOREM IN THE CASE OF STABLE SYMMETRIC LIMIT LAW

J. Banys

(*Summary*)

The article deals with the sequence (1) of k-dimensional independent and identically distributed random variables. The estimation of rate of convergence is received when $\mu_{ijl}(0)=\ldots=\mu_{ijl}(0)(r-1)=0$ and exists (5), then:

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(x)| \leqslant \frac{c_1(k)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}},$$

if $\nu(r)\leqslant 1$, $0<\alpha\leqslant 2$, and

$$|F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G(x)| \leqslant \frac{c_1(k)\,\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}},$$

if $\nu(r)>1$, $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 2$, where $G(x)$ is the distribution function of multidimensional stable symmetric limit law. $F^{*n}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)$ is the distribution function of S_n, $S_n=n^{-\frac{1}{\alpha}}(\xi_1+\ldots+\xi_n)$.