1971

УДК 519.21

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К УСТОЙЧИВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ В ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

И. И. Банис, Н. Б. Калинаускайте, П. С. Вайткус

Рассматривается последовательность независимых одинакого распределенных случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

с функцией распределения $F(x)$, принадлежащей области нормального притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$g_\alpha(t)=\exp\left\{-|t|^\alpha\left(1-i\beta \operatorname{sgn} t\,\psi(t, \alpha)\right)\right\},$$

где

$$\psi(t, \alpha)=\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha, & 0<\alpha<2,\ \alpha\neq 1,\\ \frac{2}{\pi}\ln|t|, & \alpha=1.\end{cases}$$

Далее, $G_\alpha(x)$ и $\varphi_\alpha(x)$ будем обозначать функцию распределения и плотность предельного закона, $f(t)$ – характеристическую функцию случайной величины ξ_i. Обозначим

$$F_n(x)=P\left\{n^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<x\right\} \qquad \text{при } 0<\alpha<1,$$

$$F_n(x)=P\left\{n^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k-A_n\right)<x\right\} \qquad \text{при } 1\leqslant\alpha<2.$$

$$\mu(m)=\int_{-\infty}^{\infty}x^m\,d\left(F(x)-G_\alpha(x)\right),$$

$$\nu(m)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^m\left|d\left(F(x)-G_\alpha(x)\right)\right|.$$

Далее будем рассматривать только такие случайные величины (1), для которых выполнено условие:

а) распределение $F_n(x)$ имеет ограниченную плотность $p_n(x)$ для всех n больших некоторого n_0.

Кроме того, выполнено одно из условий:

б) существует конечный абсолютный псевдомомент $\nu(r)$, $r=[\alpha]+1$ и

$$\mu(0)=\ldots=\mu(r-1)=0$$

или

в) существует конечный $\nu(1+\alpha)$ и

$$\mu(0)=\ldots=\mu(r)=0.$$

Теорема 1. *В условиях* а) *и* б) *при* $n\to\infty$ *имеет место оценка*

$$\sup_x |p_n(x)-\varphi_\alpha(x)|=O\left(n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}\right).$$

Теорема 2. *В условиях* а) *и* в) *при* $n\to\infty$ *имеет место оценка*

$$\sup_x |p_n(x)-\varphi_\alpha(x)|=O\left(n^{-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *При условии* б) *и* $\nu(r)\geqslant 1$
и

$$|t|\leqslant T=n^{\frac{1}{\alpha}}\left(12\nu(r)\right)^{-\frac{1}{r-\alpha}}$$

имеет место неравенство

$$|f_n(t)-g_\alpha(t)|\leqslant n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,6\nu(r)|t|^r\exp\left\{-\frac{1}{2}|t|^\alpha\right\}.$$

В случае $\nu(r)<1$ *это неравенство имеет место в интервале*

$$|t|\leqslant T=n^{\frac{1}{\alpha}}\,12^{-\frac{1}{r-\alpha}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta=|f_n(t)-g_\alpha(t)|=|g_\alpha(t)|\left|\left(1+\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)^n-1\right|=$$

$$=e^{-|t|^\alpha}\left|\exp\left\{n\ln\left(1+\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\right\}-1\right|,$$

где $\omega(t)=f(t)-g_\alpha(t)$.

Используя неравенство

$$|e^x-1|\leqslant|x|e^{|x|},$$

получаем, что

$$\Delta\leqslant e^{-|t|^\alpha}\exp\left\{n\left|\ln\left(1+\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\right|\right\}\times$$

$$\times n\left|\ln\left(1+\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\right|. \tag{2}$$

Воспользуемся неравенством

$$\left|e^{iy}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!}\right|\leqslant\min\left\{\frac{2|y|^n}{n!},\ \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}\right\}$$

и условием б). Получаем

$$\left|\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{itxn^{-\frac{1}{\alpha}}}d\left(F(x)-G_\alpha(x)\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|t|^r}{r!\,n^{\frac{r}{\alpha}}}\nu(r)\leqslant|t|^r\nu(r)n^{-\frac{r}{\alpha}}.$$

А так как

$$\left| g_\alpha\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|^{-1}=e^{|t|^\alpha n^{-1}},$$

то

$$\left| \omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| < \frac{1}{2} \text{ когда } |t|\leqslant T.$$

Разлагая в ряд

$$\ln\left(1+\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)$$

по степеням

$$\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$$

при $|t|\leqslant T$ получаем

$$\ln\left(1+\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\leqslant 6\nu(r)|t|^r n^{-\frac{r}{\alpha}}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует

$$\Delta(t)\leqslant n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}\, 6\nu(r)|t|^r \exp\{-|t|^\alpha+6n^{\frac{\alpha-r}{\alpha}}|t|^r\nu(r)\}.$$

Если $|t|\leqslant T$, то

$$1-12n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}\nu(r)|t|^{r-\alpha}\geqslant 0$$

и

$$\Delta(t)\leqslant 6\nu(r) n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}|t|^r\exp\left\{-\frac{1}{2}|t|^\alpha\right\}.$$

Лемма 2. *При условии* б) *и* $\nu(1+\alpha)\geqslant 1$ *и* $|t|\leqslant T=n^{\frac{1}{\alpha}}\left(6\nu(1+\alpha)\right)^{-1}$ *имеет место неравенство*

$$|f_n(t)-g_\alpha(t)|\leqslant 3\nu(1+\alpha)n^{-\frac{1}{\alpha}}|t|^{1+\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2}|t|^\alpha\right\}.$$

При $\nu(1+\alpha)<1$ *эта оценка имеет место в интервале*

$$|t|\leqslant T=\frac{1}{6}n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Доказательство леммы 2 следует схеме доказательства леммы 1.

Поэтому мы укажем только те места, где имеются различия.

Воспользуемся известным неравенством

$$\left| e^{iy}\sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!}\right|\leqslant \min\left\{\frac{2|y|^n}{n!},\ \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}\right\}.$$

Тогда в условиях леммы 2

$$\left|\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\leqslant\nu(1+\alpha)n^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}|t|^{1+\alpha},$$

и

$$\left| \omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \leqslant \frac{1}{2}, \qquad |t| \leqslant T.$$

Отсюда

$$\left| \ln\left(1+\omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g_\alpha^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right) \right| \leqslant 3\nu(1+\alpha) n^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} |t|^{1+\alpha},$$

и при (2) немедленно получаем

$$\Delta(t) \leqslant 3\nu(1+\alpha) n^{-\frac{1}{\alpha}} |t|^{1+\alpha} \exp\left\{-|t|^\alpha + 3|t|^{1+\alpha} \nu(1+\alpha) n^{-\frac{1}{\alpha}}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 3\nu(1+\alpha) n^{-\frac{1}{\alpha}} |t|^{1+\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{2}|t|^\alpha\right\}$$

при $|t| \leqslant T$.

Доказательство теоремы. В силу условия б) плотность $p_{n_0}(x)$ и характеристическая функция $f_{n_0}(t)$ интегрируемы в квадрате и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_{n_0}(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |p_{n_0}(x)|^2\, dx.$$

А так как $f_n(t) = f^n\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ и $|f(t)| \leqslant 1$, то все степени $f^n(t)$ при $n > n_0$ интегрируемы. Следовательно, все функции $|f^n(t)|$ абсолютно интегрируемы. Поэтому при всех $n \geqslant 2n_0$

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) dt.$$

Тогда

$$|p_n(x) - \varphi_\alpha(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left(f_n(t) - g_\alpha(t)\right) dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}}^{\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}} |f_n(t) - g_\alpha(t)|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geqslant \varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}} |f_n(t)|\, dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geqslant \varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}} |g_\alpha(t)|\, dt = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \left(12\nu(r)^{-\frac{1}{r-\alpha}}\right) & \text{при } \nu(r) \geqslant 1, \\ 12^{-\frac{1}{r-\alpha}} & \text{при } \nu(r) < 1. \end{cases}$$

Далее, в силу леммы 1 получаем

$$I_1 = \frac{6}{\pi} \nu(r) n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}} \int_0^{\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}} t^r e^{-\frac{1}{2} t^\alpha} dt \leqslant \frac{6}{\alpha\pi} \nu(r) 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}. \qquad (4)$$

Так как распределение $F_n(x)$ при $n > n_0$ имеет плотность, то

$$\sup_{|t|>\varepsilon} |f(t)| = e^{-c_0} < 1.$$

Поэтому в силу интегрируемости $|f(t)|^{2n_0}$ при n достаточно больших получаем

$$I_2 = \int\limits_{|t|>\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}} \left| f\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|^n dt \leqslant n^{\frac{1}{\alpha}} e^{-(n-2n_0)c_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{2n_0} dt < e^{-\frac{1}{2}nc_0}. \tag{5}$$

Далее,

$$I_3 = \int\limits_{|t|>\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}} |g_\alpha(t)|\, dt \leqslant \int\limits_{|t|>\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-|t|^\alpha} dt \leqslant \frac{4}{\alpha}\, \varepsilon^{1-\alpha} n^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-\varepsilon^\alpha n}. \tag{6}$$

Из (4) (5) и (6) следует теорема 1.

Теорема 2 доказывается таким же методом, что и теорема 1, только теперь для оценивания интеграла I_1 используется лемма 2. Действительно,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}}^{\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}} |f_n(t) - g_\alpha(t)|\, dt \leqslant \frac{3}{\pi}\, \nu(1+\alpha) n^{-\frac{1}{\alpha}} \int\limits_0^{\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}}} t^{1+\alpha} e^{-\frac{1}{2}t^\alpha} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{\alpha\pi}\, \nu(1+\alpha) 2^{\frac{2+\alpha}{\alpha}}\, \Gamma\left(\frac{2+\alpha}{\alpha}\right) n^{-\frac{1}{\alpha}},$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \left(6\nu(1+\alpha)\right)^{-1} & \text{при } \nu(1+\alpha) \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{6} & \text{при } \nu(1+\alpha) < 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|p_n(x) - \varphi_\alpha(x)| \leqslant \frac{3\nu(1+\alpha)}{\alpha\pi}\, 2^{\frac{2+\alpha}{\alpha}}\, \Gamma\left(\frac{2+\alpha}{\alpha}\right) n^{-\frac{1}{\alpha}} + e^{-\frac{1}{2}c_0 n} +$$

$$+ \frac{4}{\alpha}\, \varepsilon^{1+\alpha} n^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-\varepsilon^\alpha n},$$

откуда немедленно следует теорема 2.

Лемма 1 нам дает возможность так же получить оценку остаточного члена в интегральных теоремах с устойчивыми предельными распределениями порядка $O\left(n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}\right)$, а из леммы 2 получаем скорость сходимости $O\left(n^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
6.XI.1970

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Москва, 1965.
2. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее прим., X, 3 (1965), 519—526.

KONVERGAVIMO GREIČIO Į RIBINĮ STABILŲ DĖSNĮ LOKALINĖJE TEOREMOJE KLAUSIMU

J. Banys, N. Kalinauskaitė, P. Vaitkus

(*Reziumė*)

Straipsnyje gautos pakankamos sąlygos tam, kad liekamasis narys lokalinėje teoremoje su ribiniu stabiliu tankiu $p_\alpha(x)$ būtų $O\left(n^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ eilės arba $O\left(n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}\right)$; čia $r=1+[\alpha]$.

ON THE RATE OF CONVERGENCE IN THE LOCAL THEOREM WITH LIMITING STABLE DISTRIBUTIONS

J. Banys, N. Kalinauskaitė, P. Vaitkus

(*Summary*)

Let

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be a sequence of independent identically distributed random variables depending on the domain of normal attraction of stable distribution $G_\alpha(x)$. Let $p_n(x)$ denote the density of distribution of the normed sum of the sequence $\{\xi_i\}$, $\varphi_\alpha(x)$ is the density of limiting stable distribution and let

$$\mu(m)=\int_{-\infty}^{\infty} x^m\, d\left(P\{\xi_j<x\}-G_\alpha(x)\right),$$

$$\nu(r)=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \left| d\left(P\{\xi_j<x\}-G_\alpha(x)\right)\right|.$$

Then the following theorems are proved.

Theorem 1. *If* $\mu(0)=\ldots=\mu(r-1)=0$ *with* $r=[\alpha]+1$, $\nu(r)<\infty$ *and for every* $n>n_0$ *the density* $p_n(x)$ *exists and is bounded then*

$$\sup_x |p_n(x)-\varphi_\alpha(x)|=O\left(n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}\right) \text{ if } n\to\infty.$$

Theorem 2. *If* $\mu(0)=\ldots=\mu(r)=0$ *with* $r=[\alpha]+1$, $\nu(1+\alpha)<\infty$ *and for every* $n>n_0$ *the density* $p_n(x)$ *exists and is bounded then*

$$\sup_x |p_n(x)-\varphi_\alpha(x)|=O\left(n^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \text{ if } n\to\infty.$$