XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3

1971

УДК 519.21

К ВОПРОСУ О ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИКАХ ДЛЯ ЗАДАЧ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Б. И. Григелионис

1. Большинство в явном виде решенных задач в теории оптимальной остановки случайных процессов относится к случаю оптимальной остановки марковских процессов как с дискретным, так и с непрерывным временем. Это, конечно, объясняется тем, что в случае марковских процессов при решении этих задач удается использовать удобные и мощные аналитические методы. Все же многие важные задачи, например, нахождение байесовских решений задачи Вальда о различении статистических гипотез или задачи о „разладке" случайных процессов в последовательном статистическом анализе и др., формулируются как задачи об оптимальной остановке немарковских процессов. В связи с этим важно исследовать условия существования и вид марковских достаточных статистик. Именно, использование принципа достаточности и теории оптимальной остановки марковских процессов позволяет найти явные решения широкого класса задач оптимальной остановки случайных процессов.

В работе [1] были введены общие понятия систем достаточных σ-алгебр, достаточных статистик и марковских достаточных статистик, а также найдены соответствующие критерии достаточности в задачах оптимальной остановки случайных последовательностей (см. там же библиографию более ранних работ других авторов, относящихся к этим вопросам). В настоящей работе аналогичные результаты получены в случае непрерывного времени.

2. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{P})$ задано система полных относительно меры $\mathbf{P}$ σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t,\ t\in\mathbf{T}\}$, такая что $\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$ для всех $s<t$, $s,\ t\in\mathbf{T}$, и случайный процесс $\{Z_t,\ t\in\mathbf{T}\}$, согласованный с этой системой, т.е. при каждом $t\in\mathbf{T}$ случайные величины Z_t $\mathscr{F}_t$-измеримы; $\mathbf{T}$ — некоторое множество действительных чисел.

Обозначим $\mathfrak{M}$ класс случайных величин τ, называемых моментами остановки (м. о.), таких, которые принимают значения в $\mathbf{T}$, $\mathbf{P}\{\tau<\infty\}=1]$ и $\{\omega:\tau(\omega)\leqslant \leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$ для всех $t\in\mathbf{T}$.

Далее, мы всюду будем предполагать, что выбрано некоторое разложение $Z_t=Z'_t+Z''_t$, $t\in\mathbf{T}$, такое, что случайный процесс $\{Z''_t,\ \mathscr{F}_t,\ t\in\mathbf{T}\}$ является регулярным мартингалом, т.е. для каждого $\tau\in\mathfrak{M}$ $\mathbf{E}\,Z''_\tau$ существует и $\mathbf{E}(Z''_\tau|\mathscr{F}_t)= =Z''_t$ почти всюду по мере $\mathbf{P}$ (п.в.) на множестве $\{\omega:\tau(\omega)\geqslant t\}$ для всех $t\in\mathbf{T}$.

Определение 1. *Система σ-алгебр* $\{\mathscr{F}'_t,\ t\in\mathbf{T}\}$, *такая, что* $\mathscr{F}'_s\subset\mathscr{F}'_t\subset\mathscr{F}_t$, $s<t$, $s, t\in\mathbf{T}$, *называется системой достаточных σ-алгебр, если случайный процесс* $\{Z'_t,\ t\in\mathbf{T}\}$ *согласован с этой системой и*

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}}\mathbf{E}\,Z_\tau=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}'}\mathbf{E}\,Z_\tau{}^{*)},$$

где $\mathfrak{M}'$ — *класс м.о.* τ, *таких, что при каждом* $t\in\mathbf{T}$ $\{\omega:\tau(\omega)\leqslant t\}\in\mathscr{F}'_t$.

Определение 2. *Случайный процес* $\{X'_t,\ t\in\mathbf{T}\}$, *принимающий значения в измеримом пространстве* $(\mathscr{X}'.\ \mathscr{B}')$ *и согласованный с системой σ-алгебр* $\{\mathscr{F}_t,\ t\in\mathbf{T}\}$, *называется системой достаточных статистик, если σ-алгебры* $\mathscr{F}'_t=\sigma(X'_s,\ s\in[-\infty,t]\cap\mathbf{T})$, $t\in\mathbf{T}$, *составляют систему достаточных σ-алгебр.*

Определение 3. *Система достаточных статистик* $\{X'_t,\ t\in\mathbf{T}\}$ *называется системой марковских достаточных статистик, если случайный процесс* $\{X'_t,\ t\in\mathbf{T}\}$ *обладает марковским свойством, т.е. для всех* $\Gamma\in\mathscr{B}'$, $s<t$, $s, t\in\mathbf{T}$, *п.в.*

$$\mathbf{P}\{X'_t\in\Gamma\mid\mathscr{F}'_s\}=\mathbf{P}\{X'_t\in\Gamma\mid X'_s\}.$$

Далее будем рассматривать случаи дискретного и непрерывного времени.

3. В случае, когда $\mathbf{T}=\{0,\ 1,\ldots\}$, предположим, что $\mathbf{E}\,|Z_n|<\infty$ при каждом $n\geqslant 0$ и $\mathbf{E}(\sup\limits_{n\geqslant 0} Z'^{+}_n)<\infty$, где $z^+=\max(0,z)$.

Теорема 1. *Система σ-алгебр* $\mathscr{F}'_0\subset\mathscr{F}'_1\subset\ldots,\mathscr{F}'_n\subset\mathscr{F}_n$, $n\geqslant 0$, *является системой достаточных σ-алгебр, если для всех* $n\geqslant 0$ *случайные величины* Z'_n $\mathscr{F}'_n$-*измеримы и для всех* $A\in\mathcal{C}_{n+1}$ *п.в.*

$$\mathbf{P}\{A\mid\mathscr{F}_n\}=\mathbf{P}\{A\mid\mathscr{F}'_n\},$$

где $\mathcal{C}_n$ — *любая π-система***) *множеств, такая, что* $\mathscr{F}'_n=\sigma(\mathcal{C}_n)$.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{H}_{n+1}$ класс $\mathscr{F}'_{n+1}$-измеримых суммируемых случайных величин Z, таких, что п.в.

$$\mathbf{E}(Z\mid\mathscr{F}_n)=\mathbf{E}(Z\mid\mathscr{F}'_n).\tag{2}$$

В силу условия (1), классу $\mathcal{H}_{n+1}$ принадлежат характеристические функции множеств π-системы $\mathcal{C}_{n+1}$. Кроме того, класс $\mathcal{H}_{n+1}$ линеен, $1\in\mathcal{H}_{n+1}$ и, если $Z_k\in\mathcal{H}_{n+1}$, $k=1,\ 2,\ldots,\ 0\leqslant Z_k\uparrow Z$, где Z — суммируемая случайная величина, то $Z\in\mathcal{H}_{n+1}$. Отсюда и леммы 1.2 в [2] следует, что классу $\mathcal{H}_{n+1}$ принадлежат все суммируемые $\mathscr{F}'_{n+1}$-измеримые случайные величины. Утверждение теоремы теперь следует из теоремы 2 в [1].

Замечание 1. Условие (1) является аналогом условия транзитивности по Бахадуру [3].

Пусть существует случайная последовательность $\{X'_n,\ n\geqslant 0\}$, такая, что X'_n принимают значения в измеримом пространстве $(\mathscr{X}',\ \mathscr{B}')$, $\mathscr{F}_n$-измеримы, а случаные величины Z'_n $\mathscr{F}'_n$-измеримы, для всех $n\geqslant 0$, где $\mathscr{F}'_n=\sigma(X'_0,\ldots,X'_n)$. При этих предположениях из теоремы 1 немедленно вытекает следующее утверждение, близкое к следствиям 1 и 2 в [1].

Следствие 1. *Если при каждом* $n\geqslant 0$ *и* $\Gamma\in\mathscr{B}'$ *п.в.*

$$\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in\Gamma\mid\mathscr{F}_n\}=\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in\Gamma\mid\mathscr{F}'_n\},$$

---

*) Мы предполагаем, конечно, что $\mathbf{E}\,Z_\tau$ существует при всех $\tau\in\mathfrak{M}$.

**) Система множеств $\mathcal{C}$ называется π-системой, если для всех $A_1,\ A_2\in\mathcal{C}$ имеем, что $A_1\cap A_2\in\mathcal{C}$; $\sigma(\mathcal{C})$ — наименьшая σ-алгебра в Ω, содержащая $\mathcal{C}$.

то $\{X'_n,\ n\geqslant 0\}$ *является системой достаточных статистик.*

Если же при каждом $n\geqslant 0$ *и* $\Gamma\in\mathscr{B}'$ *п.в.*

$$\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in\Gamma\mid\mathscr{F}_n\}=\mathbf{P}\{X'_{n+1}\in\Gamma\mid X'_n\},$$

то $\{X'_n,\ n\geqslant 0\}$ — *система марковских достаточных статистик.*

4. Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{T}=[0,\infty]$.

Мы будем далее предполагать, что для всех $t\geqslant 0$ $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+0}=\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\mathscr{F}_{t+\varepsilon}$, почти все траектории случайных процессов $\{Z_t,\ t\geqslant 0\}$ и $\{Z'_t,\ t\geqslant 0\}$ непрерывны справа и $\mathbf{E}(\sup\limits_{t\geqslant 0}|Z'_t|)<\infty$.

Следующее утверждение является аналогом теоремы 1.

Теорема 2. *Система σ-алгебр* $\{\mathscr{F}'_t,\ t\geqslant 0\}$, *такая, что* $\mathscr{F}'_s\subset\mathscr{F}'_t\subset\mathscr{F}_t$, $0\leqslant s<t$, *является системой достаточных σ-алгебр, если случайный процесс* $Z'_t,\ t\geqslant 0\}$ *согласован с ней и при каждом* $A\in\mathcal{C}_{t+s}$, $s,\ t\geqslant 0$ *п.в.*

$$\mathbf{P}\{A\mid\mathscr{F}_t\}=\mathbf{P}\{A\mid\mathscr{F}'_t\},\tag{3}$$

где $\mathcal{C}_t$*-любая π-система множеств, такая, что* $\mathscr{F}'_t=\sigma(\mathcal{C}_t)$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{T}^{(n)}=\{k2^{-n},\ k=0,1,\ldots\}$,

$$X_t^{(0)}=Z'_t,\quad X_t^{(1)}=\sup_{s\in\mathbf{T}^{(1)}}\mathbf{E}(Z'_{t+s}\mid\mathscr{F}_t),$$

$$X_t^{(n)}=\sup_{s\in\mathbf{T}^{(n)}}\mathbf{E}(X_{t+s}^{(n-1)}\mid\mathscr{F}_t)\quad t\geqslant 0,\quad n\geqslant 1,\tag{4}$$

и положим

$$X'_t=\lim_{n\to\infty}X_t^{(n)},\quad t\geqslant 0.\tag{5}$$

По индукции легко убедится, что для всех $n\geqslant 0$ и $t\geqslant 0$

$$|X_t^{(n)}|\leqslant\mathbf{E}(\sup_{s\geqslant 0}|Z'_s|\,\big|\,\mathscr{F}_t)\tag{6}$$

и следовательно,

$$|X'_t|\leqslant\mathbf{E}(\sup_{s\geqslant 0}|Z'_s|\,\big|\,\mathscr{F}_t).$$

Отсюда и того, что последовательность $\{X_t^{(n)},\ n\geqslant 0\}$ — монотонно возрастающая, имеем, что конструкция процесса $\{X'_t,\ t\geqslant 0\}$ корректна.

Докажем теперь, что случайный процесс $\{X'_t,\ \mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$ — наименьший супермартингал, мажорирующий случайный процесс $\{Z'_t,\ t\geqslant 0\}$.

Заме́тим, что для всех $t\geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\lim_{s\downarrow 0}X'_{t+s}\geqslant X'_t\}=1,\tag{7}$$

поскольку таким свойством, очевидно, обладает процесс $\{Z'_t,\ t\geqslant 0\}$ и оно сохраняется при всех операциях, использованных при конструкции процесса $\{X'_t,\ t\geqslant 0\}$.

В силу (4), для всех $m=0,1,\ldots$

$$X_t^{(n)}\geqslant\mathbf{E}(X_{t+m2^{-n}}^{(n-1)}\mid\mathscr{F}_t),\ t\geqslant 0.\tag{8}$$

Взяв $m=l2^{n-k}$, $k\leqslant n$, и имея в виду (6), после перехода к пределу в неравенстве (8) находит, что

$$X'_t\geqslant\mathbf{E}(X'_{t+l2^{-k}}\mid\mathscr{F}_t,\quad t\geqslant 0.\tag{9}$$

Для произвольного $s \geqslant 0$ выберем последовательность двоично-рациональных чисел $r_i \downarrow s$ при $i \to \infty$. Используя лемму Фату, из (7) и (9) выводим, что для всех s, $t \geqslant 0$

$$X'_t \geqslant \mathbf{E}(X'_{t+s} \mid \mathscr{F}_t).$$

Итак, случайный процесс $\{X'_t,\ \mathscr{F}_t\ t \geqslant 0\}$ является супермартингалом Очевидно, что $X'_t \geqslant X^{(0)}_t = Z_t$, $t \geqslant 0$. Пусть $\{Y'_t,\ \mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ – произвольный супермартингал, такой, что для всех $t \geqslant 0$ $Y'_t \geqslant Z'_t$ п.в. Покажем, что тогда для всех $t \geqslant 0$ $Y'_t \geqslant X'_t$ п.в. Действительно, в силу (4), для всех $t \geqslant 0$ п.в.

$$X^{(1)}_t = \sup_{s \in \mathbf{T}^{(1)}} \mathbf{E}(Z'_{t+s} \mid \mathscr{F}_t) \leqslant \sup_{s \in \mathbf{T}^{(1)}} \mathbf{E}(Y'_{t+s} \mid \mathscr{F}_t) \leqslant Y'_t$$

и по индукции для всех $t \geqslant 0$ п.в.

$$X^{(n)}_t \leqslant Y'_t.$$

Отсюда и получаем, что для всех $t \geqslant 0$ п.в.

$$X'_t = \lim_{n \to \infty} X^{(n)}_t \leqslant Y'_t.$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 1 из (3) следует, что для произвольной $\mathscr{F}'_{t+s}$-измеримой суммируемой величины Z для всех $t \geqslant 0$ п.в.

$$\mathbf{E}(Z \mid \mathscr{F}_t) = \mathbf{E}(Z \mid \mathscr{F}'_t). \tag{10}$$

Из условий теоремы и равенств (4), (5) и (10) вытекает, что при каждом $t \geqslant 0$ случайные величины X'_t $\mathscr{F}'_t$-измеримы.

Так как в силу вышесказанного супермартингал $\{X'_t + Z''_t,\ \mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ является наименьшим супермартингалом, мажорирующим случайный процесс $\{Z_t,\ t \geqslant 0\}$, то по теореме 4 в [4] находим, что при каждом $\varepsilon > 0$ существует ε-оптимальный м. о. $\tau_\varepsilon \in \mathfrak{M}'$. Это означает, что

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{E}\, Z_\tau = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}'} \mathbf{E}\, Z_\tau,$$

т. е. система σ-алгебр $\{\mathscr{F}'_t,\ t \geqslant 0\}$ достаточна. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Предположение теоремы 2, что $\mathbf{E}\,(\sup_{t \geqslant 0} |Z'_t|) < \infty$, по-видимому, можно существенно ослабить.

Пусть далее существует случайный процесс $\{X'_t,\ t \geqslant 0\}$, согласованный с системой σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ и принимающий значения в измеримом пространстве $(\mathscr{X}',\ \mathscr{B}')$. Обозначим $\mathscr{F}'_t = \sigma(X'_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t)$ и предположим, что случайный процесс $\{Z'_t,\ t \geqslant 0\}$ согласован с системой σ-алгебр $\{\mathscr{F}'_t,\ t \geqslant 0\}$.

Частным случаем теоремы 2 является следующий удобный критерий достаточности.

Следствие 2. *При вышесделанных предположениях, если для всех* $0 \leqslant t < t_1 < \ldots < t_n$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathscr{B}'$, $n \geqslant 1$, п.в.

$$\mathbf{P}\{X'_{t_1} \in \Gamma_1, \ldots, X'_{t_n} \in \Gamma_n \mid \mathscr{F}_t\} = \mathbf{P}\{X'_{t_1} \in \Gamma_1, \ldots, X'_{t_n} \in \Gamma_n \mid \mathscr{F}'_t\}, \tag{11}$$

то $\{X'_t,\ t \geqslant 0\}$ *– система достаточных статистик.*

Если же для всех $0 \leqslant s < t$ *и* $\Gamma \in \mathscr{B}'$ *п.в.*

$$\mathbf{P}\{X'_t \in \Gamma \mid \mathscr{F}_s\} = \mathbf{P}\{X'_t \in \Gamma \mid X'_s\}, \tag{12}$$

то $\{X'_t,\ t \geqslant 0\}$ *– система марковских достаточных статистик.*

5. Как видно из следствия 2, для проверки того, что некоторая система статистик $\{X'_t,\ t \geqslant 0\}$ является системой марковских достаточных статистик, основной трудностью является проверка марковского свойства процесса $\{X'_t,\ t \geqslant 0\}$ относительно системы σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\}$. Критерий марковости такого рода, основанный на понятии транзитивности фурнкционала от случайного процесса и удобный для приложений в статистике частично наблюдаемых случайных процессов, содержится в работе [5]. Проверку условий (11) и (12) в широком классе случаев можно также свести к проверке условий, при которых случайный процесс $\{X'_t,\ t \geqslant 0\}$ является решением определенного стохастического уравнения К. Ито (по этому поводу см., например, работу [6]).

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
25.VIII.1970

Литература

1. Б. Григелионис, Достаточность в задачах оптимальной остановки, Лит. матем. сб. IX, 3(1969), 471–480.
2. Е. Б. Дынкин, Основания теории марковских процессов, Физматгиз, М., 1959.
3. R. R. Bahadur, Sufficiency and statistical decision functions, Ann. Math. Statist., 25, 3 (1954), 423–462.
4. А. Г. Факеев, Об оптимальной остановке случайных процессов с непрерывным временем, Теория вероятностей и ее применен., XV, 2(1970), 336–344.
5. Б. Григелионис, Об одном критерии марковости для случайных процессов, Лит. матем. сб., X, 2(1970), 253–258.
6. Б. Григелионис, О представлении целочисленных случайных мер как стохастических интегралов по пуассоновской мере, Лит. матем. сб., XI, 1(1971), 93–108.

PAKANKAMŲ STATISTIKŲ ATSITIKTINIŲ PROCESŲ OPTIMALAUS SUSTABDYMO UŽDAVINIAMS KLAUSIMU

B. Grigelionis

Reziumė)

Darbe rastas bendras kriterijus, kai duota σ-algebrų sistema yra pakankama optimalaus sustabdymo uždaviniui tolydinio laiko atveju. Taip pat gautas kriterijus, kai duota statistikų sistema yra pakankamų arba Markovo pakankamų statistikų sistema. Diskretinio laiko atveju analogiški rezultatai buvo gauti [1] darbe.

ON SUFFICIENT STATISTICS FOR OPTIMAL STOPPING PROBLEMS OF STOCHASTIC PROCESSES

B. Grigelionis

(*Summary*)

In the paper a general criterion has been found when the given system of б-algebras is sufficient for optimal stopping problem in the case of continuous time. The criterion has been also obtained when the given system of statistics is either sufficient or Markov sufficient system of statistics. In the case of discrete time analogical results were received in the paper [1].