XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
1971

УДК 517.941

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА

Ю. Э. Дегутис, Ш. И. Стрелиц

Настоящая работа посвящена установлению существования бесконечной последовательности собственных значений у линейного дифференциального уравнения n-го порядка, коэффициенты которого—полиномы от параметра λ. Коэффициентами этих полиномов являются непрерывные вещественные функции на некотором конечном отрезке $[0, a]$. Наш результат не перекрывается результатами, полученными в работе [4]. Метод не требует никаких условий сопряжения.

В статье рассматривается частная краевая задача с простейшими краевыми условиями. Ее решением мы воспользуемся для исследования более общей задачи – задачи с краевыми условиями, зависящими от параметра. Соответствующие результаты опубликованы в следующей работе.

1. Мы решаем следующую задачу: определить собственные значения системы уравнений:

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{m_1}\lambda^j p_j^{(1)}(x)y^{(n-1)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{m_2}\lambda^j p_j^{(2)}(x)y^{(n-2)}+\ldots+\sum_{j=0}^{m_n}\lambda^j p_j^{(n)}(x)y=0, \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &y^{(j)}(0)=0, \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\\ &y^{(k)}(a)=0, \quad n-1>k=\text{const}.\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Справедливо следующее предложение.

Теорема. *Пусть в уравнении* (1.1) *все функции* $(-1)^{m_k}p_{m_k}^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ *непрерывны и положительны, а* $p_j^{(k)}(x)$ $(j=0,\ 1,\ \ldots,\ m_k-1;\ k=1,\ 2,\ldots,\ n)$ – *непрерывны на отрезке* $[0, a]$. *Пусть, далее,*

$$\rho=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{m_j}{j}\right\}. \tag{3.1}$$

Тогда при ρ – *нецелом существует бесконечная последовательность собственных значений* $\{\lambda_j\}$ *задачи* (1.1)–(2.1), *показатель сходимости которой равен* ρ.

Кроме того,

$$cp^{\frac{1}{\rho}}<|\lambda_p|<Cp^{\frac{1}{\rho}},$$

где $C>c>0$ – *постоянные, независящие от* p.

Если же ρ — целое число, то можно указать такое дифференциальное уравнение типа (1.1), *чтобы задача* (1.1)—(2.1) *не имела ни одного собственного значения.*

2. Для доказательства этого предложения мы рассмотрим задачу с более жесткими условиями, наложенными на функции $p_j^{(k)}(x)$ $(j=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ m_k;$ $k=1,\ 2,\ \dots,\ n)$, а именно, мы предполагаем, что в уравнении

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{m_1}(-1)^{j+1}\lambda^j p_j^{(1)}(x)\,y^{(n-1)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{m_2}(-1)^{j+1}\lambda^j p_j^{(2)}(x)\,y^{(n-2)}+\dots+\sum_{j=0}^{m_n}(-1)^{j+1}\lambda^j p_j^{(n)}(x)\,y=0 \qquad (1.2)$$

все

$$p_j^{(k)}(x)>0 \quad (j=0,\ 1,\ \dots,\ m_k;\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n) \qquad (2.2)$$

и непрерывны на отрезке $[0,\ a]$. Это ограничение не уменьшает общности: к этому случаю, очевидно, сводится и сформулированный в теореме случай. Чтобы в этом убедиться, введем в уравнение (1.1) вместо λ новый параметр μ, связанный соотношением $\mu=\lambda+\lambda_0$ $(\lambda=\mu-\lambda_0)$, с достаточно большим положительным числом λ_0. Так как непрерывная функция $(-1)^{m_k}p_{m_k}^{(k)}(x)>0$, то существует такая постоянная α, что

$$(-1)^{m_k}p_{m_k}^{(k)}(x)\geqslant\alpha>0$$

и поэтому при достаточно большом постоянном λ_0

$$\sum_{i=j}^{m_k}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\lambda_0^{i-j}p_j^{(k)}(x)=(-1)^j p_j^{(k)*}(x), \quad j=0,\ 1,\ \dots,\ n,$$

где $p_j^{(k)*}(x)>0$. Иными словами, мы приходим к уравнению (1.2).

Доказательству теоремы с упрощенными условиями и посвящена настоящая работа.

3. Найдем сначала решение задачи Коши, с начальными данными $y(0)=0$, $y'(0)=0,\dots,$ $y^{(n-2)}(0)=0$, $y^{(n-1)}(0)=1$, уравнения (1.2). Будем его искать в виде степенного ряда от λ:

$$y(x,\ \lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\varphi_i(x). \qquad (1.3)$$

От функций $\varphi_i(x)$ потребуем выполнения следующих начальных условий:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0^{(k)}(0)=0, \quad k=0,\ 1,\ \dots,\ n-2, \quad \varphi_0^{(n-1)}(0)=1,\\ &\varphi_i^{(k)}(0)=0, \quad k=0,\ 1,\ \dots,\ n-1; \quad i=1,\ 2,\ \dots\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Формальным дифференцированием ряда (1.3) находим:

$$y^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\varphi_i^{(k)}(x), \qquad k=1,\ 2,\ \dots,\ n. \qquad (3.3)$$

Подставив выражения (3.3) в уравнение (1.2), легко получаем:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\varphi_i^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{m_1}(-1)^{j+1}\lambda^j p_j^{(1)}(x)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\varphi_i^{(n-1)}(x)+\ldots+$$
$$+\sum_{j=0}^{m_n}(-1)^{j+1}\lambda^j p_j^{(n)}(x)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\varphi_i(x)=0. \tag{4.3}$$

Соберем теперь в (4.3) члены с одинаковыми степенями λ и приравним их затем к нулю. В результате этого, для определения функций $\varphi_j(x)$, $j=0,\ 1,\ \ldots$, находим бесконечную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0^{(n)}(x)-p_0^{(1)}(x)\varphi_0^{(n-1)}(x)-p_0^{(2)}(x)\varphi_0^{(n-2)}(x)-\ldots-\\&-p_0^{(n)}(x)\varphi_0(x)=0,\\&\varphi_m^{(n)}-p_0^{(1)}(x)\varphi_m^{(n-1)}-p_0^{(2)}(x)\varphi_m^{(n-2)}-\ldots-p_0^{(n)}(x)\varphi_m=\\&=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}(-1)^k p_k^{(\nu)}(x)\varphi_{m-k}^{(n-\nu)*)},\quad m=1,\ 2,\ \ldots\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Функция $\varphi_0(x)$ в силу (2.3) является решением задачи Коши с условиями $\varphi_0^{(j)}(0)=0$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2$, $\varphi_0^{(n-1)}(0)=1$ первого из уравнений системы (5.3). Найдя $\varphi_0(x)$, мы сможем затем найти $\varphi_1(x)$ из второго уравнения системы (5.3) ($m=1$) при условиях (2.3) и т. д.

Перейдем теперь к исследованию первого уравнения системы (5.3).

Лемма 1.3. *Пусть* $\psi_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *фундаментальная система решений уравнения*

$$\psi^{(n)}-p_0^{(1)}(x)\psi^{(n-1)}-p_0^{(2)}(x)\psi^{(n-2)}-\ldots-p_0^{(n)}(x)\psi=0, \tag{6.3}$$

удовлетворяющая условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\psi_i^{(j-1)}(0)=\delta_{ij},\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\quad \delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j,\end{cases}\\&\psi_i^{(n-1)}(0)=1,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

При этих условиях каждая из функций $\psi_i(x)$ *возрастает на отрезке* $[0,\ a]$.

Доказательство. Решения, указанные в лемме, всегда существуют, единственны и линейно независимы [3].

Так как $\psi_i^{(n-1)}(0)=1$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, то функция $\psi_i^{(n-2)}(x)$ возрастает в некоторой окрестности Δ_i^0 точки $x=0$ при $x>0$. Но $\psi_i^{(n-2)}(0)\geqslant 0$. Поэтому $\psi_i^{(n-2)}(x)>0$ в Δ_i^0. Повторяя наши рассуждения, найдем последовательно, что в достаточно малой окрестности Δ_i точки $x=0$ при $x>0$ $\psi_i^{(j)}(x)>0$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

Допустим сейчас, что лемма не верна, т. е. что на интервале $(0,\ a)$ хотя бы одна из функций $\psi_j(x)$ не возрастает. Пусть это будет функция $\psi_i(x)$. Обозначим через $x^{(1)}$ нижнюю грань нулей производной этой функции на интервале $(0,\ a)$. Так как в $\Delta_i\ \psi_i'(x)>0$, то $x^{(1)}>0$. К функции $\psi_i''(x)$

*) Здесь $\varphi_j^{(s)}(x)=0$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, если $j<0$.

применимы все только что приведенные рассуждения относительно $\psi_i'(x)$, так что найдется такая точка $x^{(2)}$, в которой $\psi_i''(x^{(2)})=0$, причем $0<x^{(2)}<x^{(1)}$, а $\psi_i'(x)>0$, $x\in(0,\ x^{(2)})$. Повторяя рассуждения, мы в конце концов найдем точки $x^{(j)}$, в которых $\psi_i^{(j)}(x^{(j)})=0$, $0<x^{(j)}<x^{(j-1)}$, а функция $\chi_i^{(j-1)}(x)$, $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$, достигает максимума, причем $\psi_i^{(j-1)}(x)>0$, $x\in(0,\ x^{(j)})$. В точке максимума $x^{(n-1)}$ функции $\psi_i^{(n-2)}(x)$ производная $\psi_i^{(n)}(x)$ не больше нуля, т. е.

$$\psi_i^{(n)}(x^{(n-1)})\leqslant 0. \tag{8.3}$$

Но, $\psi_i^{(n)}(x)$ удовлетворяет уравнению (6.3). Поэтому в силу условий (2.2)

$$\psi_i^{(n)}(x^{(n-1)})=p_0^{(1)}(x^{(n-1)})\,\psi_i^{(n-1)}(x^{(n-1)})+p_0^{(2)}(x^{(n-1)})\,\psi_i^{(n-2)}(x^{(n-2)})+$$
$$+\ldots+p_0^{(n)}(x^{(n-1)})\,\psi_i(x^{(n-1)})>0,$$

что несовместимо с (8.3).

Полученное противоречие и доказывает нашу лемму.

4. Исследуем неоднородные уравнения системы (5.3):

$$\varphi_m^{(n)}-p_0^{(1)}(x)\,\varphi_m^{(n-1)}-\ldots-p_0^{(n)}(x)\,\varphi_m=f_m(x),\quad m=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.4}$$

Через $f_m(x)$ мы здесь обозначаем правые части уравнений системы (5.3).

Докажем следующее предложение.

Лемма 1.4. *Если непрерывные функции $f_m(x)$ не обращаются в нуль на отрезке $[0,\ a]$, причем*

$$C_m\,\frac{x^\nu}{\nu!}\leqslant|f_m(x)|\leqslant C^{(m)}\,\frac{x^\nu}{\nu!}\,, \tag{2.4}$$

где $0<C_m<C^{(m)}$ — некоторые постоянные, $\nu\geqslant 0$ — целое число, то решение $\varphi_m(x)$ уравнения (1.4), обращающееся в нуль в точке $x=0$ вместе со всеми своими производными до порядка $n-1$ включительно, удовлетворяет неравенству:

$$C_m\,\frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)\,!}\leqslant|\varphi_m^{(s)}(x)|\leqslant C^{(m)}D\,\frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)\,!} \tag{3.4}$$

с некоторой постоянной $D>0$. Кроме того, все $\varphi_m^{(s)}(x)$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ сохраняют знак функции $f_m(x)$ на отрезке $[0,\ a]$.

Доказательство. Будем решать уравнение (1.4) методом итераций. Строим последовательные приближения:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{m0}^{(n)}(x)=f_m(x),\\&\varphi_{mk}^{(n)}(x)=p_0^{(1)}(x)\,\varphi_{mk-1}^{(n-1)}(x)+\ldots+p_0^{(n)}(x)\,\varphi_{mk-1}(x)=g_{mk}(x),\\&k=1,\ 2,\ \ldots;\ m=1,\ 2,\ \ldots\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Потребуем чтобы искомые функции $\varphi_{mk}(x)$ удовлетворяли однородным начальным условиям $\varphi_{mk}^{(s)}(0)=0$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Тогда формальным решением уравнения (1.4), удовлетворяющим условиям (2.3), будет ряд

$$\varphi_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{mk}(x),\quad m=1,\ 2,\ \ldots \tag{5.4}$$

Нулевое приближение $\varphi_{m0}(x)$ равно

$$\varphi_{m0}(x)=\int_0^x dx_{n-1}\int_0^{x_{n-1}} dx_{n-2}\ldots\int_0^{x_1} f_m(x_0)\,dx_0\,, \tag{6.4}$$

а его производные –

$$\varphi_{m0}^{(s)}(x)=\int_0^x dx_{n-s-1}\int_0^{x_{n-s-1}} dx_{n-s-2}\ldots\int_0^{x_1} f_m(x_0)\,dx_0, \tag{7.4}$$

причем знак $\varphi_{m0}^{(s)}(x)$ определяется знаком функции $f_m(x)$.

При условии (2.4) по (7.4)

$$C_m\,\frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!}\leqslant|\varphi_{m0}^{(s)}(x)|\leqslant C^{(m)}\,\frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!}\,. \tag{8.4}$$

Далее, по второму уравнению $(k=1)$ из (4.4)

$$\varphi_{m1}^{(s)}(x)=\int_0^x dx_{n-s-1}\int_0^{x_{n-s-1}} dx_{n-s-2}\ldots\int_0^{x_1} g_{m1}(x_0)\,dx_0. \tag{9.4}$$

Из непрерывности функций $p_j^{(k)}(x)$ и того, что $p_j^{(k)}(x)\neq 0$ в замкнутом интервале $[0,\ a]$ следует, что они в нем ограниченны, т. е. найдутся такие постоянные $S>0$ и K, что

$$S<|p_j^{(k)}(x)|<K,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ m_k;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{10.4}$$

Из (4.4) следует, что $g_{m1}(x)$ имеет знак функции $\varphi_{m0}(x)$ т. е. функции $f_m(x)$.

На основании (8.4), из (4.4) для $g_{m1}(x)$ получаем:

$$\begin{aligned}|g_{m1}(x)|&=|p_0^{(1)}(x)\,\varphi_{m0}^{(n-1)}(x)+\ldots+p_0^{(n)}(x)\,\varphi_{m0}(x)|\leqslant\\ &\leqslant KC^{(m)}\left(\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}+\ldots+\frac{x^{n+\nu}}{(n+\nu)!}\right)\leqslant KC^{(m)}\,\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\times\\ &\times\left(1+\frac{a}{\nu+2}+\ldots+\frac{a^{n-1}}{(\nu+2)(\nu+3)\ldots(\nu+n)}\right)\leqslant KC^{(m)}M\,\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\,,\end{aligned} \tag{11.4}$$

где

$$M=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{k-1}}{k!}\,.$$

С другой стороны, так как все $p_0^{(j)}(x)>0,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, то

$$\begin{aligned}|g_{m1}(x)|&\geqslant SC_m\,\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\left(1+\frac{x}{\nu+2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(\nu+2)(\nu+3)\ldots(\nu+n)}\right)\geqslant\\ &\geqslant SC_m\,\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\,.\end{aligned}$$

Как видно из (9.4), $\varphi_{m1}^{(s)}(x)$ будет на отрезке [0, a] того же знака, что и функция $g_{m1}(x)$, т. е. что и функция $f_m(x)$.

По (9.4)

$$SC_m\,\frac{x^{n-s+\nu+1}}{(n-s+\nu+1)!}\leqslant|\varphi_{m1}^{(s)}(x)|\leqslant KMC^{(m)}\,\frac{x^{n-s+\nu+1}}{(n-s+\nu+1)!}\,.$$

Допустим сейчас, что имеет место соотношение

$$S^k C_m \frac{x^{n-s+\nu+k}}{(n-s+\nu+k)!} \leqslant |\varphi_{mk}^{(s)}(x)| \leqslant (MK)^k C^{(m)} \frac{x^{n-s+\nu+k}}{(n-s+\nu+k)!}, \qquad (12.4)$$

при $k=0, 1, 2, \ldots, p-1$. Как мы видим, оно справедливо при $k=0, 1, 2$, причем все $\varphi_{mk}^{(s)}(x)$ того же знака, что и функция $f_m(x)$.

Покажем, что

$$S^p C_m \frac{x^{n-s+\nu+p}}{(n-s+\nu+p)!} \leqslant |\varphi_{mp}^{(s)}(x)| \leqslant (MK)^p C^{(m)} \frac{x^{n-s+\nu+p}}{(n-s+\nu+p)!}, \qquad (13.4)$$

$k=1, 2, \ldots$

Действительно,

$$\varphi_{mp}^{(s)}(x) = \int\limits_0^x dx_{n-s-1} \int\limits_0^{x_{n-s-1}} dx_{n-s-2} \ldots \int\limits_0^{x_1} g_{mp}(x_0)\, dx_0.$$

По (4.4) $g_{mp}(x)$ имеет знак $g_{m,p-1}$, а поэтому и знак $f_m(x)$. Причем по (12.4) имеют место неравенства:

$$|g_{mp}(x)| = \left| \sum_{j=1}^{n} p_0^{(j)}(x)\, \varphi_{m,p-1}^{(n-j)}(x) \right| \leqslant K(MK)^{p-1} C^{(m)} \frac{x^{\nu+p}}{(\nu+p)!} \left(1 + \frac{x}{\nu+p+1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(\nu+p+1)\ldots(\nu+p+n-1)}\right) \leqslant K(MK)^{p-1} C^{(m)} \frac{x^{\nu+p}}{(\nu+p)!} \left(1 + \frac{a}{\nu+k+1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{a^{n-1}}{(\nu+p+1)\ldots(\nu+p+n-1)}\right) \leqslant (KM)^p C^{(m)} \frac{x^{\nu+p}}{(\nu+p)!};$$

$$|g_{mp}(x)| = \left| \sum_{j=1}^{n} p_0^{(j)}(x)\, \varphi_{m,p-1}^{(n-j)}(x) \right| \geqslant SS^{p-1} C_m \frac{x^{\nu+p}}{(\nu+p)!} \left(1 + \frac{x}{\nu+p+1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(\nu+p+1)\ldots(\nu+p+n-1)}\right) \geqslant S^p C_m \frac{x^{\nu+p}}{(\nu+p)!}, \qquad (14.4)$$

что и требовалось доказать.

Из (13.4) немедленно вытекает равномерная сходимость ряда (5.4) и его производных до $n-1$-го порядка:

$$|\varphi_m^{(s)}(x)| \leqslant C^{(m)} \frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(KM)^k x^k}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ k\neq 0}}^{k} (n-s+\nu+j)} \leqslant$$

$$\leqslant C^{(m)} \frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aKM)^k}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ k\neq 0}}^{k} (n-s+\nu+j)} \leqslant C^{(m)} e^{aKM} \frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!} \leqslant$$

$$\leqslant C^{(m)} D \frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!}; \qquad m=1, 2, \ldots; \ s=0, 1, \ldots, n-1, \qquad (15.4)$$

где $D=e^{aKM}$.

Кроме того, справедливы и следующие оценки снизу:

$$|\varphi_m^{(s)}(x)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{mk}^{(s)}(x)\right| \geqslant C_m \frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!} \sum_{k=0}^{\infty} S^k \times$$

$$\times \frac{x^k}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ k\neq 0}}^{k} (n-s+\nu+j)} \geqslant C_m \frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!} . \qquad (16.4)$$

Равномерная сходимость n-ой производной функции следует из того, что

$$|\varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant f_m(x) + \left|\sum_{k=1}^{\infty} g_{mk}(x)\right|$$

и из неравенств (14.4).

Из проведенных рассуждений следует, что знаки функции $\varphi_m(x)$ и ее производных совпадает со знаком функции $f_m(x)$.

Лемма доказана.

Справедлива и следующая.

Лемма 2.4. *При m четном $\varphi_m^{(s)}(x)>0$, при m нечетном $\varphi_m^{(s)}(x)<0$ для* $0<x\leqslant a$, $s=0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Пусть $m=1$, в силу того что $\varphi_0^{(s)}(x)>0$, $s=0,1, \ldots, n-1$, имеем

$$f_1(x)=\sum_{\nu=1}^{n} -p_1^{(\nu)}(x)\,\varphi_0^{(n-\nu)}(x)<0.$$

Так как знак функции $\varphi_1^{(s)}(x)$ определяется знаком функции $f_1(x)$ (лемма 1.4), то $\varphi_1^{(s)}(x)<0$, $s=0, 1, \ldots, n-1$.

При $m=2$

$$f_2(x)=\sum_{\nu=1}^{n} -p_1^{(\nu)}(x)\,\varphi_1^{(n-\nu)}(x)+\sum_{\nu=1}^{n} p_2^{(\nu)}(x)\,\varphi_0^{(n-\nu)}(x)>0 ,$$

поэтому $\varphi_2^{(s)}(x)>0$, $s=0, 1, \ldots, n-1$.

Пусть $m=2k$ и $\varphi_{2k}^{(s)}(x)>0$, а $\varphi_{2k-1}^{(s)}(x)<0$, $k=1, 2, \ldots, l$; $s=0, 1, \ldots, n-1$. Следовательно, т. к. $(-1)^j\varphi_{2l-j}^{(s)}(x)>0$, то

$$f_{2l}(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_\nu}(-1)^j p_j^{(\nu)}(x)\,\varphi_{2l-j}^{(n-\nu)}(x)>0,$$

а затем, очевидно, и

$$f_{2l+1}(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_\nu}(-1)^j p_j^{(\nu)}(x)\,\varphi_{2l+1-j}^{(n-\nu)}(x)<0,$$

что и требовалось доказать.

5. Докажем равномерную сходимость рядов (1.3)–(3.3). Для этого построим мажоранты этих рядов. Имеем $\left(\varphi_0(x) -\right.$ решение первого уравнения системы $\left.(5.3)\right)$:

$$1 \leqslant |\varphi_0^{(n-1)}(x)| \leqslant C^{(0)},$$

где

$$C^{(0)} = \max_{0<x\leqslant a} \varphi_0^{(n-1)}(x).$$

Интегрируя последнее неравенство $n-1$ раз от 0 до x и, замечая что $\varphi_0^{(s)}(0)=0$, $s=0, 1, \ldots, n-2$, получаем:

$$\frac{x^{n-s-1}}{(n-s-1)!} \leqslant |\varphi_0^{(s)}(x)| \leqslant C^{(0)} \frac{x^{n-s-1}}{(n-s-1)!}, \quad s=0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.5}$$

По (1.5) получаем следующее неравенство (напомним: $|p_j^{(k)}(x)| < K$):

$$|f_1(x)| = \sum_{\nu=1}^{n} |p_1^{(\nu)}(x)\, \varphi_0^{(n-\nu)}(x)| \leqslant KC^{(0)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \leqslant$$

$$\leqslant KC^{(0)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \leqslant KC^{(0)} e^a = C^{(1)}.$$

Напомним еще полученную нами в п. 4 при условии (2.4) оценку

$$|\varphi_m^{(s)}(x)| \leqslant N^{(m)} \frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!}, \quad m=1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

где

$$N^{(m)} = C^{(m)} D.$$

В частности, при $m=1$ в соответствии с вышеуказанной оценкой для функции $f_1(x)$

$$|\varphi_1^{(s)}(x)| \leqslant N^{(1)} \frac{x^{n-s}}{(n-s)!}, \quad s=0, 1, \ldots, n-1,$$

где

$$N^{(1)} = C^{(1)} D \leqslant AC^{(0)}, \quad A = KDae^a + 1.$$

Пусть $i \leqslant m_1 \neq 0$, где m_1 – степень полинома по λ коэффициента при $y^{(n-1)}$ в уравнении (1.2), и

$$|f_i(x)| \leqslant C^{(i)},$$

где

$$C^{(i)} \leqslant Ke^a A^{i-1} C^{(0)},$$

а

$$|\varphi_i^{(s)}(x)| \leqslant N^{(i)} \frac{x^{n-s}}{(n-s)!}, \quad s=0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$N^{(i)} \leqslant A^{(i)} C^{(0)}.$$

Тогда

$$|\varphi_{i+1}^{(s)}(x)| \leqslant N^{(i+1)} \frac{x^{n-s}}{(n-s)!}, \quad s=0, 1, \ldots, n-1, \tag{4.5}$$

$$N^{(i+1)} \leqslant A^{i+1} C^{(0)}, \quad i \leqslant m_1 - 1,$$

если $i=m_1$

$$|\varphi^{(s)}_{m_1+1}(x)|\leqslant N^{(m_1+1)}\frac{x^{n+1-s}}{(n+1-s)!},\quad s=0,\ 1,\ \dots,\ n-1, \tag{5.5}$$

$$N^{(m_1+1)}\leqslant A^{m_1+1}C^{(0)}.$$

Действительно, при $i\leqslant m_1-1$

$$|f_{i+1}(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{i+1-k}(x)|\leqslant K\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi_i^{(n-\nu)}(x)|+$$

$$+K\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=2}^{m_\nu}|\varphi^{(n-\nu)}_{i+1-k}(x)|\leqslant KN^{(i)}e^a a+C^{(i)}\leqslant$$

$$\leqslant KDC^{(i)}e^a a+C^{(i)}\leqslant(KDe^a a+1)\,C^{(i)}=AC^{(i)}\leqslant Ke^a A^i C^{(0)}=C^{(i+1)}.$$

По формулам (2.5):

$$|\varphi^{(s)}_{i+1}(x)|\leqslant DC^{(i+1)}\frac{x^{n-s}}{(n-s)!}=N^{(i+1)}\frac{x^{n-s}}{(n-s)!},\quad s=0,\ 1,\ \dots,\ n-1,$$

$$N^{(i+1)}=DC^{(i+1)}=KDe^a A^i C^{(0)}\leqslant A^{i+1}C^{(0)}.$$

Далее,

$$|f_{m_1+1}(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{m_1+1-k}(x)|\leqslant K\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi^{(n-\nu)}_{m_1}(x)|+$$

$$+K\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=2}^{m_\nu}|\varphi^{(n-\nu)}_{m_1+1-k}(x)|.$$

Как видно, ($\nu=1$) правая часть уже не содержит $\varphi_0^{(n-1)}(x)$, которая давала при оценках производных от $\varphi_j^{(s)}(x)$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ m_1,\ s=0,\ 1,\ \dots,\ n-1)$ самый низкий показатель степени x-а. Поэтому по (4.5):

$$|f_{m_1+1}(x)|\leqslant KN^{(m_1)}xe^a+C^{(m_1)}x\leqslant(KMDC^{(m_1)}e^a+C^{(m_1)})\,x=$$

$$=(KMDe^a+1)\,C^{(m_1)}x\leqslant AC^{(m_1)}x\leqslant Ke^a A^{m_1}C^{(0)}x=C^{(m_1+1)}x,$$

где

$$C^{(m_1+1)}=Ke^a A^{m_1}C^{(0)}.$$

В оценке для функции $f_{m_1+1}(x)$ появился x, т. е. степень x повысилась на единицу.

По формулам (2.5) получаем неравенства:

$$|\varphi^{(s)}_{m_1+1}(x)|\leqslant N^{(m_1+1)}\frac{x^{n+1-s}}{(n+1-s)!},\quad s=0,\ 1,\ \dots,\ n-1,$$

с

$$N^{(m_1+1)}=DC^{(m_1+1)}=Ke^a A^{m_1}DC^{(0)}\leqslant A^{m_1+1}C^{(0)},$$

т. к.

$$Ke^a D<A,\quad (A=KDe^a a+1).$$

Для оценок дальнейших функций $\varphi_j^{(s)}(x)\,(s=0,\ 1,\ \dots,\ n-1;\ i>m_1+1)$ обозначим

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{m_j}{j}\right\}=\rho \tag{*}$$

и рассмотрим несколько случаев возможных достижений максимума ρ числами $m_j\,(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

1) Пусть $\rho=m_1$. Предположим, что имеют место неравенства:

$$|f_{pm_1+1}(x)|\leqslant C^{(pm_1+1)}\ \frac{x^p}{p!}\ ,$$

$$|\varphi^{(s)}_{pm_1+1}(x)|\leqslant N^{(pm_1+1)}\ \frac{x^{n+p-s}}{(n+p-s)!},\quad p=0,1,\ldots;\ s=0,1,\ldots,n-1, \tag{6.5}$$

$$C^{(pm_1+1)}=Ke^a\,A^{pm_1}\,C^{(0)};\quad N^{(pm_1+1)}\leqslant A^{pm_1+1}\,C^{(0)}.$$

Тогда, как мы покажем,

$$|f_{pm_1+q}(x)|\leqslant C^{(pm_1+q)}\ \frac{x^p}{p!}\ ;$$

$$|\varphi^{(s)}_{pm_1+q}(x)|\leqslant N^{(pm_1+q)}\ \frac{x^{n+p-s}}{(n+p-s)!},\quad s=0,1,\ \ldots,\ n-1, \tag{7.5}$$

$$C^{(pm_1+q)}=Ke^a\,A^{pm_1+q-1}\,C^{(0)};\quad N^{(pm_1+q)}\leqslant A^{pm_1+q}\,C^{(0)},\quad q=1,2,\ \ldots,\ m_1,$$

а

$$|f_{(p+1)m_1+1}(x)|\leqslant C^{((p+1)m_1+1)}\ \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}\ ,$$

$$|\varphi^{(s)}_{(p+1)m_1+1}(x)|\leqslant N^{((p+1)m_1+1)}\ \frac{x^{n+p-s+1}}{(n+p-s+1)!}\ , \tag{8.5}$$

$$C^{((p+1)m_1+1)}=Ke^a\,A^{(p+1)m_1}\,C^{(0)};\quad N^{((p+1)m_1+1)}\leqslant A^{(p+1)m_1+1}\,C^{(0)}.$$

Действительно, для $1\leqslant q\leqslant m_1$, по (6.5)

$$|f_{pm_1+q}(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{pm_1+q-k}(x)|\leqslant K\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi^{(n-\nu)}_{pm_1+q-1}(x)|+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=2}^{m_\nu}|\varphi^{(n-\nu)}_{pm_1+q-k}(x)|\leqslant KN^{(pm_1+q-1)}\ \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}\ e^a+$$

$$+C^{(pm_1+q-1)}\ \frac{x^p}{p!}\leqslant\Big[KN^{(pm_1+q-1)}\ \frac{a}{p+1}\cdot e^a+$$

$$+C^{(pm_1+q-1)}\Big]\ \frac{x^p}{p!}\leqslant\Big[KMDC^{(pm_1+q-1)}\ \frac{a}{p+1}\ e^a+$$

$$+C^{(pm_1+q-1)}\Big]\ \frac{x^p}{p!}\leqslant AC^{(pm_1+q-1)}\ \frac{x^p}{p!}\leqslant$$

$$\leqslant Ke^a\,A^{pm_1+q-1}\,C^{(0)}\ \frac{x^p}{p!}=C^{(pm_1+q)}\ \frac{x^p}{p!}\ .$$

Следовательно, по (2.5)

$$|\varphi^{(s)}_{pm_1+q}(x)|\leqslant DC^{(pm_1+q)}\ \frac{x^{n+p-s}}{(n+p-s)!}=$$

$$=N^{(pm_1+q)}\ \frac{x^{n+p-s}}{(n+p-s)!}\leqslant A^{pm_1+q}\,C^{(0)}\ \frac{x^{n+p-s}}{(n+p-s)!}\ . \tag{9.5}$$

Если же $q=m_1+1$, то

$$|f_{(p+1)m_1+1}(x)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_\nu} |p_k^{(\nu)}(x)\, \varphi_{(p+1)m_1+1-k}^{(n-\nu)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{\nu=1}^{n} |\varphi_{(p+1)m_1}^{(n-\nu)}(x)| + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=2}^{m_\nu} |p_k^{(\nu)}(x)\, \varphi_{(p+1)m_1+1-k}^{(n-\nu)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant KN^{((p+1)m_1)} e^a \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + C^{((p+1)m_1)} \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \leqslant [KDC^{((p+1)m_1)} \times$$

$$\times e^a + C^{((p+1(m_1)}] \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \leqslant AC^{((p+1)m_1)} \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \leqslant$$

$$\leqslant C^{((p+1)m_1+1)} \frac{x^{p+1}}{(p+1)!},$$

и по (2.5)

$$|\varphi_{(p+1)m_1+1}^{(s)}(x)| \leqslant DC^{((p+1)m_1+1)} \frac{x^{n+p-s+1}}{(n+p-s+1)!} =$$

$$= N^{((p+1)m_1+1)} \frac{x^{n+p-s+1}}{(n+p-s+1)!} \leqslant A^{(p+1)m_1+1}\, C^{(0)} \frac{x^{n+p-s+1}}{(n+p-s+1)!}.$$

Итак, формулы (7.5) и (8.5) действительно верны.

2) Пусть

$$\rho = \frac{m_l}{l}, \quad (l>1)$$

и

$$\frac{m_k}{k} \leqslant m_1, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1.$$

Тогда имеют место следующие оценки:

$$|f_{pm_l+i}(x)| \leqslant C^{(pm_l+i)} \frac{x^{pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]}}{\left(pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]\right)!},$$

$$|\varphi_{pm_l+i}^{(s)}(x)| \leqslant N^{(pm_l+i)} \frac{x^{n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s}}{\left(n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s\right)!}, \tag{9.5}$$

$$C^{(pm_l+i)} = Ke^a A^{pm_l+i-1} C^{(0)};\quad N^{(pm_l+i)} \leqslant A^{pm_l+i} C^{(0)}; \tag{10.5}$$

$$p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad 1 \leqslant i \leqslant (l-1)m_1;\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;$$

$$|f_{pm_l+(l-1)m_1+i}(x)| \leqslant C^{(pm_l+(l-1)m_1+i)} \frac{x^{pl+l+1}}{(pl+l+1)!},$$

$$|\varphi_{pm_l+(l-1)m_1+i}^{(s)}(x)| \leqslant N^{(pm_l+(l-1)m_1+i)} \frac{x^{n+(p+1)l-s-1}}{(n+(p+1)l-s-1)!}, \tag{11.5}$$

$$C^{(pm_l+(l-1)m_1+i)} = Ke^a A^{pm_l+(l-1)m_1+i-1} C^{(0)},$$

$$N^{(pm_l+(l-1)m_1+i)} \leqslant A^{pm_l+(l-1)m_1+i} C^{(0)},$$

$$p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad (l-1)m_1 \leqslant i \leqslant m_l;\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Докажем сначала неравенства (9.5)–(10.5). Когда $p=0$, $1\leqslant i\leqslant m_1$ эти оценки даются формулами (4.5).

Для использования индукции допустим теперь, что при $p\leqslant p_0$ и

$$(l-j-1)m_1\leqslant i\leqslant (l-j)m_1,\quad j=2,\ 3,\ \ldots,\ l-1$$

справедливы соотношения:

$$\begin{gathered}
|f_{pm_l+1}(x)|\leqslant C^{(pm_l+i)}\frac{x^{pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]}}{\left(pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]\right)!},\\
|\varphi^{(s)}_{pm_l+i}(x)|\leqslant N^{(pm_l+i)}\frac{x^{n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s}}{\left(n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s\right)!},\\
C^{(pm_l+i)}=Ke^a A^{pm_l+i-1}C^{(0)};\quad N^{(pm_l+i)}\leqslant A^{(pm_l+i)}C^{(0)}.
\end{gathered}\tag{12.5}$$

В этих предположениях покажем, что

$$\begin{gathered}
|f_{pm_l+i+q}(x)|\leqslant C^{(pm_l+i+q)}\frac{x^{pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]}}{\left(pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]\right)!},\\
|\varphi^{(s)}_{pm_l+i+q}(x)|\leqslant N^{(pm_l+i+q)}\frac{x^{n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s}}{\left(n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s\right)!};\\
N^{(pm_l+i+q)}\leqslant A^{pm_l+i+q}C^{(0)};\\
(l-j-1)m_1\leqslant i\leqslant (l-j)m_1,\quad 0\leqslant q\leqslant (l-j)m_1-i,\ j=2,\ 3,\ \ldots,\ l-1;
\end{gathered}\tag{13.5}$$

и

$$\begin{gathered}
|f_{pm_l+(l-j)m_1+1}(x)|\leqslant C^{\left(pm_l+(l-j)m_1+1\right)}\frac{x^{pl+l-j}}{(pl+l-j)!},\\
|\varphi^{(s)}_{pm_l+(l-j)m_1+1}(x)|\leqslant N^{\left(pm_l+(l-j)m_1+1\right)}\frac{x^{n+pl+l-j-s}}{(n+pl+l-j-s)!},
\end{gathered}\tag{14.5}$$

$$N^{\left(pm_l+(l-j)m_1+1\right)}\leqslant A^{pm_l+(l-j)m_1+1}C^{(0)}.\tag{15.5}$$

Действительно, по (12.5) для $0\leqslant q\leqslant (l-j)m_1-i$

$$\begin{gathered}
|f_{pm_l+i+q}(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{pm_l+i+q-k}(x)|\leqslant\\
\leqslant K\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi^{(n-\nu)}_{pm_l+i+q-1}(x)|+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=2}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\times\\
\times\varphi^{(n-\nu)}_{pm_l+i+q-k}(x)|\leqslant KN^{(pm_l+i+q-1)}e^a\times\\
\times\frac{x^{pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]+1}}{\left(pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]+1\right)!}+C^{(pm_l+i+q-1)}\frac{x^{pl+\left[\frac{i+1}{m_1}\right]}}{\left(pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]\right)!}\leqslant
\end{gathered}$$

$$\leqslant \left(KN^{(pm_l+i+q-1)}\, e^{a}\, \frac{a}{pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]+1} + C^{(pm_l+i+q-1)}\right)\times$$

$$\times \frac{x^{pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]}}{\left(pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]\right)!} \leqslant AC^{(pm_l+i+q-1)}\times$$

$$\times \frac{x^{pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]}}{\left(pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]\right)!} \leqslant Ke^{a} A^{pm_l+i+q-1}\, \frac{x^{pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]}}{\left(pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]\right)!} =$$

$$= C^{(pm_l+i+q)}\, \frac{x^{pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]}}{\left(pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]\right)!},$$

а по (2.5)

$$|\varphi^{(s)}_{pm_l+i+q}(x)| \leqslant DC^{(pm_l+i+q)}\, \frac{x^{n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s}}{\left(n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s\right)!} =$$

$$= N^{(pm_l+i+q)}\, \frac{x^{n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s}}{\left(n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s\right)!} \leqslant A^{pm_l+i+q}\, C^{(0)}\, \frac{x^{n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s}}{\left(n+pl+\left[\frac{i-1}{m_1}\right]-s\right)!}.$$

При $i=lm_1+q$, $1\leqslant q\leqslant m_l-lm_1$ в оценках функций $\varphi^{(s)}_{pm_l+lm_1+q}(x)$ показатель степени x-а останется таким же, каким он был при $(l-1)m_1\leqslant i\leqslant lm_1$. Покажем это. При $p=0$, по (12.5)

$$|f_{lm_1+q}(x)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu} |p^{(\nu)}_k(x)\, \varphi^{(n-\nu)}_{lm_1+q-k}(x)| =$$

$$= \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu} |p^{(\nu)}_k(x)\, \varphi^{(n-\nu)}_{lm_1+q-k}(x)| + \sum_{k=1}^{lm_1+q} |p^{(l)}_k(x)\, \varphi^{(n-l)}_{lm_1+q-k}(x)| =$$

$$= \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu} |p^{(\nu)}_k(x)\, \varphi^{(n-\nu)}_{lm_1+q-k}(x)| + \sum_{k=1}^{lm_1+q-1} |p^{(l)}_k(x)\, \varphi^{(n-l)}_{lm_1+q-k}(x)| +$$

$$+ |p^{(l)}_{lm_1+q}(x)\, \varphi^{(n-l)}_0(x)| \leqslant C^{(lm_1+q)}\, \frac{x^l}{l!}.$$

Здесь мы функцию $\varphi^{(n-l)}_0(x)$ оценили по формуле (1.5). Из (2.5) видно, что в оценке функции

$$|\varphi^{(s)}_{lm_1+q}(x)| \leqslant N^{(lm_1+q)}\, \frac{x^{n+l-s}}{(n+l-s)!}$$

степень x-а не повышается.

Замечание 1.5. Коэффициенты $N^{(lm_1+q)}$ и все $N^{(j)}$, которые мы встретим ниже, удовлетворяют неравенству

$$N^{(j)} \leqslant C^{(0)}{}^{\bar{}} A^{j},$$

что доказывается буквально так, как это делалось при доказательстве (15.5).

Произведем теперь индукцию по индексу p. Если

$$|\varphi^{(s)}_{pm_l+(l-1)m_1+1}(x)|\leqslant N^{(pm_l+(l-1)m_1+1)}\frac{x^{n+pl+l-1-s}}{(n+pl+l-1-s)!},\tag{16.5}$$

$s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$

то

$$|\varphi^{(s)}_{pm_l+(l-1)m_1+i}(x)|\leqslant N^{(pm_l+(l-1)m_1+i)}\frac{x^{n+pl+l-1-s}}{(n+pl+l-1-s)!},\tag{17.5}$$

$1\leqslant i\leqslant m_l-(l-1)m_1,\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$

и

$$|\varphi^{(s)}_{(p+1)m_l+1}(x)|\leqslant N^{((p+1)m_l+1)}\frac{x^{n+(p+1)l-s}}{(n+(p+1)l-s)!},\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\tag{18.5}$$

Действительно, по (13.5) и (15.5)

$$|f_{pm_l+(l-1)m_1+i}(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{pm_l+(l-1)m_1+i-k}(x)|=$$

$$=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{pm_l+(l-1)m_1+i-k}(x)|+\sum_{k=1}^{m_l}|p_k^{(l)}(x)\times$$

$$\times\varphi^{(n-l)}_{pm_l+(l-1)m_1+i-k}(x)|\leqslant C^{(pm_l+(l-1)m_1+i)}\frac{x^{pl+l-1}}{(pl+l-1)!},$$

что вместе с (2.5) дает (17.5).

Если же $i=m_l-(l-1)m_1+1$, то в согласии с (12.5),

$$|f_{(p+1)m_l+1}(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\varphi^{(n-\nu)}_{(p+1)m_l+1-k}(x)|=$$

$$=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{(p+1)m_l+1-k}(x)|+\sum_{k=1}^{m_l}|p_k^{(l)}(x)\,\varphi^{(n-l)}_{(p+1)m_l+1-k}(x)|=$$

$$=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{(p+1)m_l+1-k}(x)|+\sum_{k=1}^{m_l-1}|p_k^{(l)}(x)\,\varphi^{(n-l)}_{(p+1)m_l+1-k}(x)|+$$

$$+|p^{(l)}_{m_l}(x)\,\varphi_{pm_l+1}(x)|\leqslant C^{(p+1)m_l+1}\frac{x^{pl+l}}{(pl+l)!},$$

и опять использовав (2.5), получаем (18.5).

Итак, в этом случае в оценках функций

$\varphi^{(s)}_m(x)\ (m=1,\ 2,\ \ldots;\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$

показатель степени x-а повышается по закону (9.5)–(11.5).

Пусть сейчас

$\rho=\dfrac{m_l}{l}\ (2<l\leqslant n)$

и числа

$$m_{l_1},\ m_{l_2},\ \ldots,\ m_{l_r}\ (1<l_1<l_2<\ldots<l_r<l),$$

такие что

$$m_1<\frac{m_{l_1}}{l_1}\leqslant\frac{m_{l_2}}{l_2}\leqslant\ldots\leqslant\frac{m_{l_r}}{l_r}\ .$$

Тогда получаются следующие оценки функций $\varphi_j^{(s)}(x)$:

$$|\varphi^{(s)}_{pm_l-q_0m_1+(q,\,m)+i}(x)|\leqslant N^{(pm_l+q_0m_1+(q,\,m))}\frac{x^{n+pl+q_0+(q,\,d)-s}}{(n+pl+q_0+(q,\,d)-s)!},$$

где $q=(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_r)$, $m=(m_{l_1},\ m_{l_2},\ \ldots,\ m_{l_r})$, $d=(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_r)$, $1\leqslant i\leqslant$ $\leqslant m_l-q_0m_1-(q,\ m)\geqslant 1$, а $0<q_0+(q,\ d)<l$, $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; $\Big((\alpha,\ \beta)$ — скалярное произведение векторов$\Big)$.

Покажем что при увеличении q_j на единицу, степень x-а повышается на l_j единиц. Действительно,

$$|f_{pm_l-q_0m_1+(q,\,m)_j+1}(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{pm_l+q_0m_1+(q,\,m)_j+1-k}(x)|=$$

$$=\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l_j}}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}|p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(n-\nu)}_{pm_l+q_0m_1+(q,\,m)_j+1-k}(x)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{m_{l_j}-1}|p_k^{(l_j)}(x)\,\varphi^{(n-l)}_{pm_l+q_0m_1+(q,\,m)_j+1-k}(x)|+$$

$$+|p^{(l_j)}_{m_{l_j}}(x)\,\varphi^{(n-l_j)}_{pm_l+q_0m_1+(q,\,m)+1}(x)|,$$

где $(q,\ m)_j=q_1m_{l_1}+q_2m_{l_2}+\ldots+(q_j+1)m_{l_j}+q_{j+1}m_{l_{j+1}}+\ldots+q_rm_{l_r}$. В оценке последнего члена, дающего самую низкую степень x-а, показатель степени равен $pl+q_0+(q,\ d)_j$. Т. е.

$$|f_{pm_l+q_0m_1+(q,\,m)_j+1}(x)|\leqslant C^{(pm_l+q_0m_1+(q,\,m)+1)}\frac{x^{pl+q_0+(q,\,d)_j}}{(pl+q_0+(q,\ d)_j)!}\ .$$

Следовательно, на основании формул (2.5) получаем:

$$|\varphi^{(s)}_{pm_l+q_0m_1+(q,\,d)_j+1}(x)|\leqslant N^{(pm_l+q_0m_1+(q,\,d)_j+1)}\cdot\frac{x^{n+pl+q_0(q,\,d)_j-s}}{(n+pl+q_0+(q,\ d)_j-s)!},$$

где $N^{(j)}\leqslant A^jC^{(0)}$ (см. замечание 1.5).

Индукция же по p проводится совершенно аналогично тому, как это делалось в случае 2).

Короче говоря, если $\rho=\frac{m_l}{l}$ $(1\leqslant l\leqslant n)$, то

$$|\varphi^{(s)}_{pm_l+i}(x)|\leqslant N^{(pm_l+i)}\frac{x^{n+pl+q(i)-s}}{(n+pl+q(i)-s)!},\qquad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\qquad(19.5)$$

где $0\leqslant q(i)<l$ — целое число, зависящее от i, $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

6. Выпишем сейчас оценки снизу для функций $\varphi_m^{(s)}(x)$, $m=0,\ 1,\ \ldots$; $s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. В соответствии со сказанным в п. 4,

$$|p_0^{(\nu)}(x)|\geqslant S>0,\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В п.5 была получена оценка

$$|\varphi_0^{(s)}(x)| \geqslant \frac{x^{n-s-1}}{(n-s-1)!}\,. \tag{1.6}$$

В п.4 при условии (2.4) мы также доказали и следующую оценку:

$$|\varphi_m^{(s)}(x)| \geqslant C_m\,\frac{x^{n-s+\nu}}{(n-s+\nu)!}\,, \tag{2.6}$$

$$m=1,\ 2,\ \ldots;\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

По (1.6) получаем следующее неравенство:

$$|f_1(x)| = |p_1^{(1)}(x)\,\varphi_0^{(n-1)}(x) + p_1^{(2)}(x)\,\varphi_0^{(n-2)}(x) + \ldots + p_1^{(n)}(x)\,\varphi_0(x)| \geqslant$$

$$\geqslant S\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) \geqslant S,$$

а из формул (2.6) –

$$|\varphi_1^{(n-s)}(x)| \geqslant S\,\frac{x^{n-s}}{(n-s)!}\,,\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{3.6}$$

Допустим, что для любого $i \leqslant m_1 \neq 0$, верны неравенства:

$$|\varphi_i^{(s)}(x)| \geqslant S\,\frac{x^{n-1}}{(n-s)!}\,,\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{4.6}$$

Покажем, что

$$|\varphi_{i+1}^{(s)}(x)| \geqslant S\,\frac{x^{n-s}}{(n-s)!}\,, \tag{5.6}$$

а

$$|\varphi_{m_1+1}^{(s)}(x)| \geqslant S^2\,\frac{x^{n-s+1}}{(n-s+1)!}\,,\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{6.6}$$

Действительно,

$$f_{i+1}(x) = \left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu} p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi_{i+1-k}^{(n-\nu)}(x)\right| \geqslant$$

$$\geqslant S\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu} |\varphi_{i+1-k}^{(n-\nu)}(x)| \geqslant S,$$

(о знаках слагаемых см. п.4).

Поэтому, вспомнив формулы (2.6), находим:

$$|\varphi_{i+1}^{(s)}(x)| \geqslant S\,\frac{x^{n-s}}{(n-s)!}\,.$$

Но,

$$|f_{m_1+1}(x)| = \left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu} p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi_{m_1+1-k}^{(n-\nu)}(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m_1} p_k^{(1)}(x)\,\varphi_{m_1+1-k}^{(n-1)}(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=2}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu} p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi_{m_1+1-k}^{(n-\nu)}(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m_1} p_k^{(1)}(x)\,\varphi_{m_1+1-k}^{(n-1)}(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=2}^{n} p_{m_1+1}^{(\nu)}(x)\,\varphi_0^{(n-\nu)}(x) + \sum_{\nu=2}^{n}\sum_{k=1}^{m_1} p_k^{(\nu)}(x)\,\varphi_{m_1+1-k}^{(n-\nu)}(x)\right| \geqslant$$

$$\geqslant S\left(\sum_{k=1}^{m_1} S\,\frac{x}{1!} + S\sum_{\nu=2}^{n}\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + S\sum_{\nu=2}^{n}\sum_{k=1}^{m_1}\frac{x^\nu}{\nu!}\right) \geqslant S^2 x.$$

И опять, следуя формулам (2.6) –

$$|\varphi^{(s)}_{m_1+1}(x)| \geqslant S^2 \frac{x^{n-s+1}}{(n-s+1)!},$$

т.е. степень x-а повысилась на единицу.

Таким же образом, как и в п.5, для оценок дальнейших функций

$$\varphi^{(s)}_i(x), \ s=0, 1, \ldots, n-1; \ i>m_1+1,$$

обозначим

$$\max\left\{\frac{m_j}{j}\right\}=\rho,$$

и рассмотрим тот же случай его достижения числами m_j, $j=1, 2, \ldots, n$.

1) Пусть $\rho=m_1$. Покажем, что

$$|\varphi^{(s)}_{pm_1+q}(x)| \geqslant S^{p+1} \frac{x^{n+p-s}}{(n+p-s)!}, \ p=0, 1, \ldots; s=0, 1, \ldots, n-1, \tag{7.6}$$
$$1<q\leqslant m_1.$$

Когда $p=0$ имеем неравенства (4.6). Пусть формула (7.6) верна для $p\leqslant p_0$. Докажем, что

$$|\varphi^{(s)}_{(p_0+1)m_1+1}(x)| \geqslant S^{p_0+2} \frac{x^{n+p_0+1-s}}{(n+p_0+1-s)!}. \tag{8.6}$$

Так как все $m_j\leqslant jm_1$, то в согласии с (7.6)

$$|f_{(p_0+1)m_1+1}(x)| = \left| \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_\nu} p_k^{(\nu)}(x)\, \varphi^{(n-\nu)}_{(p_0+1)m_1+1-k}(x) \right| =$$
$$= \left| \sum_{k=1}^{m_1} p_k^{(1)}(x)\, \varphi^{(n-1)}_{(p_0+1)m_1+1-k}(x) \right| + \left| \sum_{\nu=2}^{n} \sum_{k=1}^{m_\nu} p_k^{(\nu)}(x)\, \varphi^{(n-\nu)}_{(p_0+1)m_1+1-k}(x) \right| \geqslant$$
$$\geqslant S\, S^{p_0+1} \frac{x^{p_0+1}}{(p_0+1)!}.$$

Тогда формулы (2.6) дают:

$$|\varphi^{(n-\nu)}_{(p_0+1)m_1+1}(x)| \geqslant S^{p_0+2} \frac{x^{n+(p_0+1)-s}}{(n+p_0+1-s)!}.$$

Вообще, если $\rho=\frac{m_l}{l}$ $(1<l\leqslant n)$, то

$$|\varphi^{(s)}_{pm_l+i}(x)| \geqslant S^{p+n(i)} \frac{x^{n+pl+q(i)-s}}{(n+pl+q(i)-s)!}, \tag{9.6}$$
$$p=0, 1, 2, \ldots; \quad 1\leqslant i\leqslant m_l; \quad s=0, 1, \ldots, n-1;$$

$0\leqslant q(i)<l$ – целое число, зависящее от значений i. Доказательство неравенства (9.6) аналогично рассуждениям п.5, а появляющиеся те несложные модификации ясны из детального разбора случая 1).

7. Опираясь на оценки, полученные в п.5 и п.6, получаем следующие мажоранты $y^{*(s)}$ и миноранты $y^{**(s)}$ решения (3.1) и его производных:

$$y^{*(s)} = N^{(0)} \frac{x^{n-s-1}}{(n-s-1)!} + C^{(0)} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{l} \left\{ \frac{x^{n+jl+\mu-1-s}}{(n+jl+\mu-1-s)!} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{\nu=1}^{n_\mu} (A|\lambda|)^{jm_l+\sum_{k=1}^{\mu-1} n_k+\nu} \right\}, \tag{1.7}$$

$$y^{**(s)}=\frac{x^{n-s-1}}{(n-s-1)!}+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{l} S^{jl+\mu-1}\frac{x^{n+jl+\mu-1-s}}{(n+jl+\mu-1-s)!}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{n_\mu}|\lambda|^{jm_l+\sum\limits_{k=1}^{\mu-1}n_k+\nu}, \tag{2.7}$$

$s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$

где $n_k(k=1,\ 2,\ \ldots,\ l)$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k=1}^{\mu-1} n_k\leqslant m_l,\quad \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ l.$$

Число l определяется из условия:

$$\rho=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{m_j}{j}\right\}=\frac{m_l}{l}, \tag{3.7}$$

где l — наибольший индекс, для которого (3.7) имеет место.

Сходимость мажорант (1.7) сразу устанавливает равномерную сходимость решения (1.3) и его производных до $n-1$-го порядка для любого λ и $x\in[0,\ a]$. Равномерная сходимость n-ой производной ряда (1.3) следует немедленно из системы (3.5) и неравенств (5.19).

Вместо указанных рядов (1.7) и (2.7) мы будем ниже пользоваться более удобными мажорантой и минорантой при $|\lambda|>1$. Это получается следующим образом. Имеем $\left(\frac{m_l}{l}=\rho\right)$:

$$\sum_{\nu=1}^{n_\mu}(A|\lambda|)^{jm_l+\sum\limits_{k=1}^{\mu-1}n_k+\nu}\leqslant\sum_{\nu=1}^{n_\mu}(A^\rho|\lambda|^\rho)^{jl+l}<$$

$$<l(A^\rho|\lambda|^\rho)^{(j+1)l}=l(A^\rho|\lambda|^\rho)^{(j+1)l+n+\mu-1-s}\times$$

$$\times\frac{1}{(A^\rho|\lambda|^\rho)^{n+\mu-1-s}}<T_1(A^\rho|\lambda|^\rho)^{(j+1)l+n+\mu-1-s}, \tag{4.7}$$

так как $|\lambda|>1$ и $A>1$.

Далее $(|\lambda|>1)$:

$$\sum_{\nu=1}^{n_\mu}(|\lambda|)^{jm_l+\sum\limits_{k=1}^{\mu-1}n_k+\nu}>(|\lambda|^\rho)^{jl+n+\mu-1-s}\frac{1}{|\lambda|^{\rho(n+\mu-1-s)}}>$$

$$>T_0|\lambda|^{\rho(jl+n+\mu-s-1)}. \tag{5.7}$$

Таким образом, вместо (1.7) и (2.7) в соответствии с (4.7) и (5.7) получаем следующие мажоранту $\tilde{y}^{(s)}$ и миноранту $\tilde{\tilde{y}}^{(s)}$ при $|\lambda|>1$ ряда (1.3):

$$\tilde{y}^{(s)}=T\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{n-s+i}}{(n-s+i)!}(A^\rho|\lambda|^\rho)^{n-s+i}<Te^{xA^\rho|\lambda|^\rho}$$

и

$$\tilde{\tilde{y}}^{(s)}=T_0\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{n-s+i}}{(n-s+i)!}|\lambda|^{\rho(n-s+i)}>T_0e^{x|\lambda|^\rho}-T_0\sum_{j=0}^{n-s-1}\frac{x^j|\lambda|^j}{j!},$$

где $T>1$ и $T_0<1$ – некоторые постоянные. Отсюда сразу вытекает, что

$$\left(1+o(1)\right) T_0 e^{xr^\rho} \leqslant \max_{|\lambda|=r} |y^{(s)}(x, \lambda)| = M_s(r) \leqslant T e^{xA^\rho r^\rho}.$$

Итак мы доказали следующее предложение.

Лемма 1.7. *Функции $y^{(s)}(x, \lambda)$, $s=0, 1, \ldots, n-1$ при любом постоянном $x>0$ являются целыми функциями конечного порядка $\rho=\frac{m_l}{l}$ и нормального типа $\sigma: x \leqslant \sigma \leqslant Ax$ по λ.*

8. Заметим сейчас, что $\varphi_j^{(s)}(a) \neq 0$ ни при каком j, так как все функции $\varphi_j^{(s)}(x)$ монотонны. Ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^{(s)}(a)\, \lambda^j$$

оказывается функцией переменного λ, порядка $\frac{m_l}{l}$ и нормального типа σ.

Следовательно, прн $\rho=\frac{m_l}{l}$ – нецелом, порядок функций $y^{(s)}(x, \lambda)$, $s=0, 1, \ldots, n-1$ – нецелое число, а это означает, что уравнение

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^{(k)}(a)\, \lambda^j = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

имеет бесконечное множество корней: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Все они не равны нулю (см., например, [1], [2]).

Таким образом, при $\frac{m_l}{l} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \frac{m_l}{j} \right\}$ – нецелом, задача (1.1)–(2.1) имеет бесконечную последовательность собственных значений. Порядок сходимости последовательности равен $\rho=\frac{m_l}{l}$.

Для характеристики последовательности нулей функций $y^{(s)}(a, \lambda)$ вводится функция плотности $n_s(r)$, равная числу точек этой последовательности в круге $|z|<r$.

Как известно (см. [2]) для функций конечного порядка

$$A_0 \ln M\left(\frac{r}{2}\right) < n_s(r) < A_1 \ln M(2r),$$

где $A_1>0$ и $A_0>0$ – некоторые постоянные. Следовательно,

$$\frac{A_0}{2^\rho} \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M\left(\frac{r}{2}\right)}{\left(\frac{r}{2}\right)^\rho} \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{n_s(r)}{r^\rho} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n_s(r)}{r^\rho} \leqslant$$

$$\leqslant A_1 2^\rho \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(2r)}{(2r)^\rho}.$$

Из (6.7) вытекает, что

$$\alpha'' = A_0 2^{-\rho} \alpha' \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{n_s(r)}{r^\rho} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n_s(r)}{r^\rho} \leqslant A_1 2^\rho \alpha' A^\rho = \beta'.$$

Таким образом,

$$\alpha r^{\rho} < n_s(r) < \beta r^{\rho},$$

где $\beta > \beta'$, $0 < \alpha < \alpha''$ — некоторые постоянные. В частности при $r = |\lambda_p|$ отсюда следует

$$\alpha |\lambda_p|^{\rho} < n_s(|\lambda_p|) < \beta |\lambda_p|^{\rho},$$

или, так как $n_s(|\lambda_p|) = p$,

$$c p^{\frac{1}{\rho}} < |\lambda_p| < C p^{\frac{1}{\rho}}, \quad 0 < c, C = const.$$

Теорема, сформулированная в п. 1, доказана полностью.

9. Покажем теперь, что если

$$\rho = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{m_j}{j} \right\} = \frac{m_l}{l}$$

— целое число, то нельзя утверждать существования бесконечного множества собственных значений. В этом случае функции $y^{(s)}(a, \lambda)$ — целого порядка и уравнение $y^{(k)}(a, \lambda) = 0$ может корней вовсе не иметь. Вот примеры:

1. Будем искать решение следующей краевой задачи:

$$y'' + (2\lambda^2 + x\lambda) y' + (\lambda^4 + x\lambda^3 - \lambda) y = 0, \tag{1.9}$$

$$y(0) = y(a) = 0.$$

Единственное решение, в силу известных теорем [3], уравнения (1.9), обращающееся в нуль в точке $x = 0$ и $y'(0) = 1$ равно

$$y = x e^{-\lambda^2 x}.$$

При $x = a$ отсюда следует, что

$$y(a) = a e^{-\lambda^2 a}.$$

Уравнение $a e^{-\lambda^2 a} = 0$ не имеет корней, так что краевая задача $y(0) = y(a) = 0$ не имеет решений. В этом случае

$$\rho = \max \left\{ m_1, \frac{m_2}{2} \right\} = 2 - \text{целое число.}$$

2. Рассмотрим краевую задачу:

$$y''' + 3\lambda^2 y'' + 3\lambda^4 y' + \lambda^6 y = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(a) = 0.$$

Функция $y = x^2 e^{-\lambda^2 x}$ является единственным решением данного уравнения, удовлетворяющим условиям:

$$y(0) = y'(0) = 0; \quad y''(0) = 2.$$

Но уравнение $y(a) = a^2 e^{-\lambda^2 a} = 0$ не имеет корней. Поэтому краевая задача не имеет решения. Здесь

$$(m_1 = 2, \ m_2 = 4, \ m_3 = 6, \ \rho = \max \left\{ \frac{m_j}{j} \right\} = 2$$

— целое число.

Наконец покажем, что от условий $(-1)^{m_k} p_{m_k}^{(k)}(x) > 0$ нельзя отказаться. Именно, краевая задача

$$y''' + x\,[1 + (20 + x^3)\,\lambda]\,y' + [-2 - (100 + 5\,x^3)\,\lambda] = 0,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(a) = 0,$$

имеет только одно собственное значение, хотя $\rho = \frac{1}{2}$. Ее можно найти потребовав, чтобы функция $y = x^2 + \lambda x^5$, которая удовлетворяет уравнению, удовлетворяла и условию $y(a) = 0$. Здесь один из коэффициентов не удовлетворяет указанному условию теоремы.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 5.I.1970

Литература

1. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М., „Наука", 1968.
2. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956.
3. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Ф.—М., Л. 1958.
4. Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных уравнений, 1917.

VIENO DIFERENCIALINIO OPERATORIAUS, PRIKLAUSANČIO NUO PARAMETRO, NUOSAVŲ REIKŠMIŲ EGZISTAVIMAS

J. Degutis, Š. Strelicas

Reziumė)

Tiriamas lygčių sistemos

$$\left.\begin{aligned} & y^{(n)} + \sum_{j=0}^{m_1} \lambda^j p_j^{(1)}(x)\, y^{(n-1)} + \sum_{j=0}^{m_2} \lambda^j p_j^{(2)}(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \sum_{j=0}^{m_n} \lambda^j p_j^{(n)}(x)\, y = 0, \\ & y^j(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ & y^{(k)}(a) = 0, \quad n-1 > k = const, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

nuosavų reikšmių egzistavimas.

Darbe įrodomas šitoks teiginys.

Teorema. *Tarkime, kad funkcijos* $(-1)^{m_k} p_{m_k}^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *yra tolydinės ir teigiamos, o* $p_j^{(k)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, m_k - 1$; $k = 1, 2, \ldots, n$, *— tolydinės intervale* $[0, a]$. *Pažymėkime*

$$\rho = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \frac{m_j}{j} \right\}.$$

Jeigu ρ *— ne sveikas skaičius, tai egzistuoja* (1) *uždavinio begalinė nuosavų reikšmių seka* $\{\lambda_j\}$. *Jos konvergavimo rodiklis lygus* ρ.

Be to,

$$cp^{\frac{1}{\rho}} < |\lambda_p| < Cp^{\frac{1}{\rho}};$$

čia $C > c > 0$ *— nuo* p *nepriklausančios konstantos,*

Jeigu ρ *— sveikas skaičius, tai galima nurodyti tokį diferencialinį* (1) *pavidalo operatorių, kad jis neturėtų nė vienos nuosavos reikšmės.*

EXISTENCE OF THE EIGENVALUES OF ONE DIFFERENTIAL OPERATOR DEPENDENT ON PARAMETER

J. Degutis, Š. Strelicas

(*Summary*)

This paper is concerned with the existence of the eigenvalues for the system of equations

$$\left.\begin{aligned} & y^{(n)}+\sum_{j=0}^{m_1} \lambda^j p_j^{(1)}(x)\, y^{(n-1)}+\sum_{j=0}^{m_2} \lambda^j p_j^{(2)}(x)\, y^{(n-2)}+\ldots+\sum_{j=0}^{m_n} \lambda^j p_j^{(n)}(x)\, y=0, \\ & y^{(j)}(0)=0, \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2, \\ & y^{(k)}(a)=0, \quad n-1>k=const, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

In the work the following statement is proved.

Theorem. *Suppose the functions* $(-1)^{m_k} p_{m_k}^{(k)}(x)$, $k=1, 2, \ldots, n$, *are continous and positive and* $p_j^{(k)}(x)$, $j=0, 1, \ldots, m_k-1$; $k=1, 2, \ldots, n$, *— continuous in the interval* $[0, a]$. *Let us denote*

$$\rho=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{m_j}{j}\right\}.$$

If ρ *is not integer, there exists an infinite sequence of eigenvalues* $\{\lambda_j\}$ *of problem* (1), *the index of convergence being* ρ.

Besides,

$$cp^{\frac{1}{\rho}}<|\lambda_p|<Cp^{\frac{1}{\rho}},$$

where $C>c>0$ *— are constants independent of* p.

If ρ *is integer, we can point out such a differential operator of type* (1), *which has no eigenvalue.*