УДК 519.21

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Б. А. Каминскене

Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots$$

с общей функцией распределения $F(x)$. Положим, что случайная величина ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, принимает лишь целые положительные значения k, $k=1, 2, \ldots$, с вероятностями p_k

$$p_k = P\{\xi_l = k\}, \qquad l=1, 2, \ldots$$

Допустим, что функция распределения $F(x)$ для всех $x>0$ удовлетворяет условию

$$1-F(x) \leqslant Ke^{-\lambda x}, \tag{1}$$

где $0 \leqslant K < \infty$, $\lambda > 0$ – константы.

Обозначим

$$\mu_1 = \mathbf{M}\xi_l \neq 0,$$

$$\mu_2 = \mathbf{M}\xi_l^2 < \infty, \qquad l=1, 2, \ldots,$$

и

$$S_m = \sum_{l=1}^{m} \xi_l, \qquad m=1, 2, \ldots$$

Случайный процесс

$$N(t) = \max\{m : S_m < t\}$$

принято называть процессом восстановления, а его среднее, т. е. $H(t) = \mathbf{M}N(t)$ – функцией восстановления.

Теорема 1. *Пусть для функции распределения* $F(x)$ *выполняется условие* (1). *Тогда существуют константы* $\rho>0$ *и* $0 \leqslant C < \infty$ *такие, что при*

$$\left| H(t) - \frac{t}{\mu_1} - \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2 + \mu_1}{2\mu_1^2} \right| \leqslant Ce^{-\rho t}.$$

Доказательство. Функция восстановления $H(t)$ равна коэффициенту при s^t в разложении выражения

$$\frac{P(s)}{(1-s)[1-P(s)]} \tag{2}$$

по степеням s (см. [1], стр. 110).

Здесь

$$P(s)=\sum_{k=1}^{\infty} s^k p_k.$$

Обозначим

$$q_k=\sum_{j=k+1}^{\infty} p_j, \qquad r_k=\sum_{j=k+1}^{\infty} q_j$$

и

$$Q(s)=\sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k, \qquad R(s)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k s^k.$$

Тогда

$$1-P(s)=(1-s)\,Q(s),$$

$$\mu_1-Q(s)=(1-s)\,R(s).$$

Преобразуем выражение (2) следующим образом:

$$\frac{P(s)}{(1-s)[1-P(s)]}=\frac{1}{(1-s)[1-P(s)]}-\frac{1}{1-s}=\frac{1}{(1-s)^2\mu_1}+$$
$$+\frac{\mu_1-Q(s)}{\mu_1[1-P(s)](1-s)}-\frac{1}{1-s}=\frac{1}{(1-s)^2\mu_1}+\frac{1}{1-s}\cdot\frac{R(1)}{\mu_1^2}-\frac{1}{1-s}+$$
$$+\frac{1}{1-s}\cdot\frac{R(s)-R(1)}{\mu_1^2}-\frac{R^2(s)}{Q(s)\,\mu_1}. \tag{3}$$

Теперь уже можно найти коэффициент при s^t в разложении правой части (3). Так как $R(1)=\frac{1}{2}P''(1)=\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)$, то этот коэффициент в разложении выражения

$$\frac{1}{(1-s)^2\mu_1}+\frac{1}{1-s}\,\frac{R(1)}{\mu_1^2}-\frac{1}{1-s}$$

равен

$$\frac{1}{\mu_1}(t+1)+\frac{1}{2}\,\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1^2}-1. \tag{4}$$

Из определения функции $R(s)$ получаем, что коэффициент при s^t в разложении

$$\frac{R(s)-R(1)}{(1-s)\,\mu_1^2}$$

будет

$$-\frac{1}{\mu_1^2}(r_{t+1}+r_{t+2}+\ \cdots). \tag{5}$$

Так как

$$q_t=1-F(t)\leqslant Ke^{-\lambda t},$$

а

$$r_t=q_{t+1}+q_{t+2}+\ \cdots,$$

то получаем, что

$$r_t\leqslant K(e^{-\lambda(t+1)}+e^{-\lambda(t+2)}+\ \cdots)=K\frac{e^{-\lambda(t+1)}}{1-e^{-\lambda}}=K_1e^{-\lambda t}. \tag{6}$$

Тогда

$$r_{t+1}+r_{t+2}+\ \cdots\ \leqslant K_1\,\frac{e^{-\lambda(t+1)}}{1-e^{-\lambda}}=K_2e^{-\lambda t}. \tag{7}$$

Здесь и далее K_i, $i=1, 2, \ldots$, — константы. Осталось найти коэффициент при s^t в последнем слагаемом равенства (3).

Имеем, что

$$\frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k s^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k s^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,$$

где

$$a_k = \frac{1}{q_0^{k+1}} \begin{vmatrix} q_0 & 0 & \cdots & 0 & r_0 \\ q_1 & q_0 & \cdots & 0 & r_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{t-1} & q_{t-2} & \cdots & q_0 & r_{t-1} \\ q_t & q_{t-1} & \cdots & q_1 & r_t \end{vmatrix}$$

(см. [4], стр. 339).

Требуется оценить a_t. Для этого a_t преобразуем следующим образом:

$$a_t = \frac{\mu_1}{q_0^{t+1}} \begin{vmatrix} q_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ q_1 & q_0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{t-1} & q_{t-2} & \cdots & q_0 & 1 \\ q_t & q_{t-1} & \cdots & q_1 & 1 - \frac{q_0}{\mu_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\mu_1}{q_0^{t+1}} \begin{vmatrix} q_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_1 & q_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{t-1} & -p_{t-2} & \cdots & q_0 & 0 \\ -p_t & -p_{t-1} & \cdots & -p_1 & -\frac{q_0}{\mu_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\mu_1(-1)^{t+2}}{q_0^{t+1}} \begin{vmatrix} -p_1 & -q_0 & \cdots & 0 \\ -p_2 & -p_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{t-1} & -p_{t-2} & \cdots & q_0 \\ -p_t & -p_{t-1} & \cdots & -p_1 \end{vmatrix} - \frac{\mu_1}{q_0^{t+1}} \frac{q_0}{\mu_1} q_0^{t-1} =$$

$$= \frac{\mu_1}{q_0^{t+1}} B_t - \frac{1}{q_0},$$

где

$$B_t = \begin{vmatrix} p_1 & -q_0 & \cdots & 0 \\ p_2 & p_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{t-1} & p_{t-2} & \cdots & -q_0 \\ p_t & p_{t-1} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}$$

Так как при предположениях, сделанных в начале работы, $q_0=1$, то

$$B_t=p_t+p_1p_{t-1}+p_2p_{t-2}+\cdots+p_{t-1}p_1+\cdots+p_1^{t-2}p_2+\cdots+$$

$$+p_2p_1^{t-2}+p_1^t=\sum_{k=1}^{t} P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k=t\}.$$

Для оценки скорости сходимости B_t воспользуемся теоремой С. Карлина (см. [3], стр. 237), откуда при условии (1) легко получаем, что существует $\lambda_1<\lambda$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} e^{t\lambda_1}\left(B_t-\frac{1}{\mu_1}\right)=0,$$

т. е.

$$B_t=\frac{1}{\mu_1}+K_3e^{-\lambda_1 t}$$

при $t\geqslant t_0>0$.

Значит, коэффициент при s^t в выражении $\frac{R(s)}{Q(s)}$ будет

$$a_t=K_4e^{-\lambda_1 t}. \tag{8}$$

Тепер найдем коэффициент при s^t в выражении

$$\frac{R^2(s)}{Q(s)}=\frac{R(s)}{Q(s)}\cdot R(s).$$

Этот коэффициент равен

$$\sum_{k=1}^{t} a_{t-k}r_k=b_k. \tag{9}$$

Имея в виду (6) и (8), получаем, что найдется такой $\lambda_2<\lambda_1<\lambda$, что

$$b_t\leqslant K_5e^{-\lambda_2 t}. \tag{10}$$

Соотношения (4), (7) и (10) дают нам, что при $t\geqslant t_0>0$

$$\left|H(t)-\frac{1}{\mu_1}t-\frac{\mu_2-\mu_1^2+\mu_1}{2\mu_1^2}\right|\leqslant Ce^{-\rho t},$$

где C — максимальная из констант K_i, $i=1, 2, \ldots$, а $\rho=\lambda_2$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если выполнено условие* (1), *то для каждого* $d>0$ *существуют константы* $\rho_1>0$ *и* $0\leqslant C_1<\infty$, *такие, что при* $t\geqslant t_0>0$

$$\left|\frac{H(t+d)-H(t)}{d}-\frac{1}{\mu_1}\right|\leqslant C_1e^{-\rho_1 t}.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 имеем, что

$$H(t)=\frac{1}{\mu_1}(t+1)+\frac{\mu_2+\mu_1-2\mu_1^2}{2\mu_1^2}+$$

$$+\frac{1}{\mu_1}(r_{t+1}+r_{t+2}+\cdots)+\sum_{k=1}^{t} a_{t-k}r_k.$$

Аналогично получаем и $H(t+a)$, только берем коэффициент при s^{t+a} того же самого выражения. Получаем

$$H(t+d) = \frac{1}{\mu_1}(t+d+1) + \frac{\mu_2+\mu_1-2\mu_1^2}{2\mu_1^2} +$$

$$+\frac{1}{\mu_1^2}(r_{t+d+1}+r_{t+d+2}+\ \cdots) + \sum_{k=1}^{t+d} a_{t+a-k} r_k.$$

Значит,

$$\left|\frac{H(t+d)-H(t)}{d} - \frac{1}{\mu_1}\right| \leqslant \frac{1}{d\mu_1^2}(r_{t+1}+\ \cdots\ +r_{t+d}) +$$

$$+\frac{1}{d}\left|\sum_{k=1}^{t+d} a_{t+d-k} r_k - \sum_{k=1}^{t} a_{t-k} r_k\right|. \tag{11}$$

В силу (6) имеем, что

$$\frac{1}{d\mu_1^2}(r_{t+1}+\ \cdots\ +r_{t+d}) \leqslant$$

$$\leqslant K_5 e^{-\lambda t} \frac{1-e^{-\lambda d}}{a} \leqslant K_6 e^{-\lambda t}. \tag{12}$$

Используя оценку (10), получаем, что

$$\frac{1}{d}\left|\sum_{k=1}^{t+d} a_{t+d-k} r_k - \sum_{k-1}^{t} a_{t-k} r_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{d} K_7 e^{-\lambda_2 t}(1-e^{-\lambda_2 d}) \leqslant K_8 e^{-\lambda_2 t}. \tag{13}$$

Теорема доказана.

В случае, когда случайные величины $\xi_l\ (l=1,\ 2,\ \ldots)$ распределены равномерно, аналогичные результаты получены Теугелсом [2].

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
25.XI.1970

Литература

1. W. Feller, Fluctuation theory of Recurrent Events, Frans. Amer. Math. Soc., **68**, 1949, 98–119.
2. J. Teugels, Exponential decay in renewal theorems, Bulletin de sc. Math. de Belgigue, XIX, 1967, 259–276.
3. J. Karlin, On the renewal equation, Pacific J. Math., 5 (1955), 229–257.
4. А. Н. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.-Л., Гостехиздат, 1950.

KAI KURIE ATSTATYMO FUNKCIJOS ĮVERTINIMA

B. Kaminskienė

(*Rezіumė*)

Darbe parodoma, kad atstatymo funkcijos asimptotinio išdėstymo liekamasis narys mažėja eksponentiškai, kai atstatymo laiko pasiskirstymo funkcija eksponentiškai aprėžta.

ON SOME ESTIMATIONS OF THE RENEWAL FUNCTION

B. Kaminskienė

(*Summary*)

It is proved that the remainder term in the asymptotic expansion of the renewal function decreases exponentially provided that the distribution function of the renewal time is exponentially bounded.