1971

УДК 517.531

НОРМАЛЬНО-РАЗРЕШИМЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Ю. Ф. Коробейник

§ 1. Основные результаты работы

1. В работе [1] с помощью теории нормально-разрешимых операторов было исследовано уравнение

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \tag{1.1}$$

где

$$P_0(x) = a_0 \neq 0, \quad P_k(x) = \sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s, \quad \sup_{k \geqslant 1} \frac{n_k}{k} = \alpha < 1 .$$

Коэффициенты a_s^k удовлетворяли такому условию a): при некотором $Q > 0$

$$A(Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} \frac{|a_s^k| \, Q^{k-s}}{([\alpha k] - s)!^{\frac{1}{1-\alpha}}} < \infty .$$

Положим

$$\tilde{Q} = \sup \{ Q : A(Q) < \infty \}$$

и определим функцию $\omega(x)$, равную

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{pk}^{qk} x^{k(q-p)},$$

если α рационально,

$$\alpha = \frac{p}{q}, \qquad (p, q) = 1 ,$$

и равную a_0, если α иррационально. Пусть, далее

$$\gamma_1 = \min \{ \tilde{Q}, \gamma \},$$

где γ — модуль ближайшего к началу координат нуля $\omega(x)$. Введем классы целых функций

$$E_0 = \left[1 - \alpha, \quad \frac{\tilde{Q}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)$$

и

$$E_1 = \left[1 - \alpha, \quad \frac{\gamma_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) .$$

В работе [1] получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для любой функции* $f(x)\in E_0$ *существует частное решение уравнения* (1) *того же порядка и типа, что и* $f(x)$.

Теорема 2. *Однородное уравнение* (1) ($c\ f\equiv 0$) *имеет в* E_0 ν *линейно-независимых решений, где* ν — *число нулей функции* $\omega(x)$ *в круге* $|x|<\tilde{Q}$; *при этом каждой группе* m *нулей (с учетом их кратности), лежащих на окружности* $|x|=R<\tilde{Q}$ *соответствует* m *линейно-независимых решений порядка* $1-\alpha$ *и типа* $\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Возникает вопрос, нельзя ли, сохраняя условие а), доказать, что теоремы $1-2$ справедливы в каком-либо более широком классе E целых функций, чем E_0.

Этот класс E должен удовлетворять двум естественным условиям, необходимым для применимости метода работы [1]. Во-первых, оператор Ly должен быть равномерно применим к E в области $|z|<\infty$ $\Big($ то-есть [2], ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k(x)y^{(k)}(x)$ сходится равномерно на любом ограниченном множестве, какова бы ни была функция y из $E\Big)$. Во-вторых, оператор Ly должен преобразовывать класс E в E.

Из общих результатов работы [2] следует, что для равномерной применимости Ly в области $|z|<\infty$ к классу $[\rho,\sigma)$ (соответственно, $[\rho,\sigma]$) необходимо и достаточно, чтобы при любом $R<\infty$

$$v_R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[M(\varphi_n,R)\,n!^{1-\frac{1}{\rho}}]^{\frac{1}{n}}\leqslant(\sigma\rho)^{-\frac{1}{\rho}},\qquad M(\varphi_n,R)=\max_{|z|\leqslant R}|\varphi_n(z)| \quad (1.2)$$

$\Big($соответственно, $v_R<(\sigma\rho)^{-\frac{1}{\rho}}\Big)$.

Это условие можно выразить в другой форме.

При $i\leqslant n_k$ $|a_i^k|R^i\leqslant M(\varphi_k,R)$

и

$$T_k(R)=\sum_{i=0}^{n_k}|a_i^k|R^i\leqslant(n_k+1)M(\varphi_k,R).$$

Из неравенств

$$M(\varphi_k,R)\leqslant T_k(R)\leqslant(n_k+1)M(\varphi_k,R),$$

учитывая, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(n_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant 1,$$

получаем, что условие (2) равносильно следующему

$$B_R=\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(T_k(R)k!^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant(\sigma\rho)^{-\frac{1}{\rho}},\qquad 0\leqslant R<\infty$$

$\left(\text{соответственно, } B_R < (\sigma\ \rho)^{-\frac{1}{\rho}}\right)$.

Иначе говоря, для равномерной применимости Ly к $[\rho, \sigma)$ необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\varphi(z, w) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n_k} |a_i^k| k!^{1-\frac{1}{\rho}} z^i w^k$$

была аналитична в бицилиндре $|z| < \infty$, $|w| < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}$. Покажем, что если условие а) выполнено, то при $\rho = 1-\alpha$ $\varphi(z, w)$ аналитична в бицилиндре $|z| < \infty$, $|w| < Q\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = Q_1$. Действительно, если $R < \infty$ и $R_1 < Q_1$, то

$$\varphi(R, R_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{|a_i^k| R_1^{k-i}}{[\alpha k - i]!^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{[\alpha k - i]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{k!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \frac{(R R_1)^i}{(i!)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \cdot i!^{\frac{1}{1-\alpha}} \times$$

$$\times \frac{\alpha^{\frac{\alpha k}{1-\alpha}}}{\alpha^{\frac{\alpha k}{1-\alpha}}} \leqslant A \cdot B \cdot A_{\frac{1}{2}}\left(R_1 \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right);$$

$$A = \sup_{n \geqslant 0} \frac{(R R_1)^n}{n!^{\frac{1}{1-\alpha}}};$$

$$B = \sup_{k \geqslant 1} \frac{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}} k^{-\frac{1}{2}}}{k!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{\alpha k}{1-\alpha}}};$$

$$A_p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{|a_i^k| t^{k-i} k^p}{[\alpha k - i]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

По лемме 1 из работы [1] (стр. 10) $A_{\frac{1}{2}}\left(R_1 \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) < \infty$, если $R_1 \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} < \tilde{Q}$, то-есть, если $R_1 < \tilde{Q}\alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = Q_1$. Итак, если условие а) выполнено, то оператор Ly равномерно применим к классу

$$\left[1-\alpha, \quad \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

для любого $Q < Q_1$, то-есть, к классу

$$\left[1-\alpha, \quad \frac{Q_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = E_2,$$

очевидно, более широкому, чем E_0.

В работе [1] доказано, что при условии а) Ly является ограниченным оператором из E_0 в E_0 при наделении E_0 соответствующей топологией индуктивного предела банаховых пространств $B_Q^1(\alpha) = B_Q$. При этом

$$y(z) \in B_Q \quad \left(y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k\right)$$

тогда и только тогда, когда

$$\|y\|_Q=\sum_{k=0}^{\infty} k!^{\frac{1}{1-\alpha}} |y_k|<\infty, \quad \text{а} \quad E_0=\bigcup_{0<Q<\tilde{Q}} B_Q.$$

Очевидно, что

$$\left[1-\alpha,\ \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\subset B_Q\subset\left[1-\alpha,\ \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right].$$

Как показано в [1], Ly является ограниченным оператором из B_Q в B_Q при любом $Q<\tilde{Q}$ (и тем более из E_0 в E_0).

Однако, неясно, будет ли оператор Ly переводить E_2 в E_2. Мы сейчас покажем, что это обстоятельство, вообщее говоря, не имеет места.

Рассмотрим такой пример. Пусть

$$\alpha=\frac{p}{q}, \qquad (p, q)=1$$

и

$$\tilde{L}y=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{kp} y^{(kq)}(x),$$

где $a_k=k^{\gamma}B^{k(p-q)}$, $0<B<\infty$. В данном случае

$$A(Q)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k Q^{k(q-p)}=\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\left(\frac{Q}{B}\right)^{k(q-p)},$$

$\tilde{Q}=B$ (число $\gamma>0$ мы выберем позже).

Возьмем функцию

$$u(z)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m,$$

где $c_m=m^{-\delta}Q^m(m!)^{-\frac{1}{1-\alpha}}, m\geqslant 1$, $c_0=1$, $\delta>1$. Число $\gamma>0$ выберем так, чтобы $\gamma\alpha>\delta$.

Имеем

$$\tilde{L}u=\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m;$$

если $h_s=b_s s!^{\frac{1}{1-\alpha}} Q^{-s}$, то

$$h_s=\sum_{k=0}^{\frac{s}{p}} \frac{Q^{k(q-p)} a_k s!^{\frac{1}{1-\alpha}} (s+kq-kp)^{-\delta}}{(s-kp)!\,(s+kq-kp)!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{s}{p}} \left(\frac{Q}{B}\right)^{k(q-p)} \frac{s!^{\frac{1}{1-\alpha}} k^{\gamma}(s+kq-kp)^{-\delta}}{(s-kp)!\,(s+kq-kp)!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}.$$

Очевидно, что

$$h_s \geqslant \left(\frac{Q}{B}\right)^{k(q-p)} \frac{(s-kp)^{kp} k^{\gamma} (s+kq-kp)^{-8}}{(s+kq-kp)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}(q-p)}}$$

при любом k, $0 \leqslant k \leqslant \frac{s}{p}$.

Пусть $Q>B$; возьмем рациональное число $a \in \left(0, \frac{1}{p}\right)$ настолько малым, чтобы

$$\left[\frac{1-ap}{1+a(q-p)}\right]^p \left(\frac{Q}{B}\right)^{\frac{q}{p}-1} > 1.$$

Рассмотрим только те натуральные s, для которых as — целое число. Для таких s (при $k=as$)

$$h_s \geqslant \left(\frac{Q}{B}\right)^{as(q-p)} \left[\frac{(1-ap)}{1+a(q-p)}\right]^{asp} \frac{(as)^{\gamma}}{s^8 (1+aq-ap)^8},$$

откуда

$$\varliminf_{s\to\infty} \sqrt[s]{h_s} \geqslant \left(\frac{Q}{B}\right)^{a(q-p)} \left(\frac{1-ap}{1+a(q-p)}\right)^{ap} > 1.$$

Итак, хотя и функция u из B_Q $(Q>B)$ принадлежит классу

$$\left\{1-\alpha, \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right\},$$

но

$$\tilde{L}u \,\bar{\in} \left[1-\alpha, \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right];$$

иначе говоря, $\tilde{L}u$ — или нецелая функция, или (если, например, $B<Q<B\alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ целая функция, у которой или порядок $>1-\alpha$, или порядок $=1-\alpha$, но тип $> \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Таким образом, построенный оператор $\tilde{L}y$ таков, что для любого $Q>\tilde{Q}=B$ область значений $\tilde{L}(B_Q)$ оператора $\tilde{L}$ не содержится полностью в B_Q; более того, $\tilde{L}(E_Q)$, где

$$E_Q = \left[1-\alpha, \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]$$

не содержится целиком в E_Q. Следовательно, если $Q>\tilde{Q}$, то вообще говоря, нельзя утверждать, что $\tilde{L}y$ действует из B_Q в B_Q или из E_Q в E_Q и потому говорить о нормальной разрешимости оператора $\tilde{L}y$ (как оператора из E_Q в E_Q), вообще говоря, нет смысла.

Вернемся снова к примеру и возьмем случай, когда $Q=B$. Положим в выражении для $u(z)$

$$c_m = \frac{Q^m m!^{-\frac{1}{1-\alpha}}}{m(\ln m)^2}$$

и выберем рациональное число $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и число $\gamma>0$, так, чтобы $\gamma > \frac{1}{\beta}$. Рассмотрим те значения s, для которых s^β — целое число. Для этих s (при $k=s^\beta$)

$$h_s \geqslant \frac{(1-ps^{\beta-1})^{ps^\beta} s^{\beta\gamma}}{[1+s^{\beta-1}(q-p)]^{qs^\beta} s[1+(q-p)s^{\beta-1}] \{\ln s+\ln[1+(q-p)s^{\beta-1}]\}}.$$

Отсюда $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} h_s=\infty$, и $\tilde{L}u\notin B_Q$, где $Q=B=\tilde{Q}$. Таким образом, метод, изложенный в работе [1] и существенно использующий тот факт, что Ly действует из B_Q в B_Q, вообще говоря, перестает работать уже при $Q=\tilde{Q}$.

2. Из сказанного следует, что если уравнение (1) удовлетворяет условию а), то нельзя ожидать, чтобы для всех таких уравнений теоремы 1 и 2 были справедливы в классе $[1-\alpha,\ b)$, где $b>\frac{\tilde{Q}^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

В этом смысле результаты работы [1] неулучшаемы (в шкале пространств $[1-\alpha,\ Q)$). Однако, как мы покажем в дальнейшем, условие а) можно заменить другим, немного более общим условием и получить теоремы $1-2$ в классе E вида

$$\left[1-\alpha,\ \frac{Q_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right),$$

где $Q_0\geqslant\tilde{Q}$, причем существуют уравнения, для которых $Q_0>\tilde{Q}$. Изложение этих результатов составляет содержание § 3. В последнем параграфе рассматриваются уравнения (1), для которых, кроме общей „глобальной“ характеристики $\sup\limits_{k\geqslant 1}\frac{n_k}{k}=\alpha<1$, известна еще „асимптотическая“ оценка $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{n_k}{k}=$ $=:\alpha_1<\alpha$. Оказывается, что знание этой дополнительной характеристики позволяет расширить класс нормальной разрешимости. В частности, если

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{k}=0 \quad \text{и} \quad \sup_{k\geqslant 1}\frac{n_k}{k}=\alpha<1,$$

то уравнение (1) нормально разрешимо в классе

$$\left[1-\alpha,\ \frac{D^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right),$$

где $D=Q_0\,\alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

Последний класс при условии $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n_k\ln n_k}{k}=0$ является, как будет установлено, максимальным классом применимости оператора L (в шкале пространств $[1-\alpha,\sigma)$) и потому последний результат является точным. Кроме того, оказывается, что дальнейшее улучшение асимтотических свойств последовательности (например, замена условия $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n_k}{k}=0$ условием $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n_k}{\varphi(k)}=0$, где $\varphi(x)=x^\gamma$, $0<\gamma<1$, или $\varphi(x)=\ln x$ и т.д.) уже не может в общем случае повлечь за собой расширения класса

$$\left[1-\alpha,\ \frac{D^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

нормальной разрешимости в шкале пространств $[1-\alpha,\sigma)$.

Как и в [1], уравнение (1) исследуется с помощью теории нормально-разрешимых операторов. В § 2 излагаются все необходимые сведения из функционального анализа, касающиеся нормально-разрешимых операторов в некоторых классах индуктивных пределов локально-выпуклых пространств.

§ 2. Нормально-разрешимые операторы в некоторых классах локально-выпуклых пространств

1. Как известно [3], линейный (аддитивный и однородный) оператор Ld, определенный на банаховом (B) пространстве E_1 со значениями в (B)-пространстве E_2, называется нормально-разрешимым (н.-р.), если уравнение

$$Ld=f \tag{2.1}$$

при любом $f\in E_2$ разрешимо в E_1 тогда и только тогда, когда $(\psi,f)=0$ для всех решений ψ уравнения $L'\psi=0$ из E_2'. Здесь E_i' сопряженное (топологическое) к E_i пространство, то-есть, множество всех линейных непрерывных функционалов на E_i, а L' — сопряженный к L оператор.

Далее, d-характеристикой (d-х.) н.-р. оператора L называется пара чисел (a, b), где a — размерность пространства T решений уравнения

$$Ld=0 \tag{2.2}$$

из E_1, а b — размерность фактор-пространства $E_2/L(E_1)$, где $L(E_1)$ — множество значений оператора L. Если это фактор-пространство конечномерно, то b равно размерности множества R решений уравнения $L'\psi=0$ из E_2'.

Говорят, что d-х. конечна, если оба числа a и b конечны, и полубесконечна, если лишь одно из этих чисел конечно. Н.-р. оператор с конечной d-х., называют нетеровым, а разность $\chi_L=a-b$ — индексом н.-р. оператора L. В теории н.-р.о. известен следующий факт [3].

Теорема А. *Пусть L — н.-р.о. с конечной d-х., а T — вполне непрерывный линейный оператор. Тогда $L+T$ — н.-р.о., причем $\chi_{L+T}=\chi_L$.*

Всюду в данной статье выражение „оператор L действует из E_1 в E_2 означает, что оператор L определен на всем пространстве E_1, а его значения принадлежат E_2.

Понятие н.-р.о. можно ввести не только для (B) — пространств, но и для локально-выпуклых пространств (л.-в.п.). Пусть E_1, E_2 — пара таких пространств, а L — линейный непрерывный оператор, действующий из E_1 в E_2. Этот оператор назовем н.-р.о., если для любого элемента $f\in E_2$ уравнение (2.1) разрешимо в E_1 тогда и только тогда, когда $(\psi,f)=0$ для множества R всех решений из E_2' уравнения

$$L'\psi=0. \tag{2.3}$$

Оператор L' определяется обычным образом: каждому $\varphi\in E_2'$ ставится в соответствие элемент $L\varphi\in E_1'$ такой, что $(L'\varphi, x)=(\varphi, Lx)$ для всех $x\in E_1$. Пространство E_2' — это (топологическое) сопряженное к E_i. Заметим, что оператор L н.-р. тогда и только тогда, когда его область значений $L(E_1)$ замкнута в E_2. Этот результат нетрудно вывести из соотношения (4)

$$\overline{L(E_1)}=[L'^{-1}(0)]^0,$$

где $L'^{-1}(0)=R$, а B^0 — поляра к B. Действительно, прежде всего $[L'^{-1}(0)]^0$ совпадает со множеством $Q\subset E_2$, ортогональным к R, то-есть, множеством элементов $v\in E_2$ таких, что $(\psi, v)=0$ для всех $\psi\in R$. Далее, если оператор

L н.-р., то $y \in L(E_1)$ тогда и только тогда, когда $y \in Q$, то-есть, L — н.-р. оператор в том и только смысле, если $L(E_1) = Q$. Но из приведенного соотношения видно, что это возможно тогда и только тогда, когда $L(E_1) = \overline{L(E_1)}$.

2. Пусть $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Omega}$ — семейство л.в. пространств, Ω — совершенно упорядоченное [5] множество (с отношением порядка $\leqslant$). Предположим, что порядок в Ω индуцирует в семействе упорядоченность по вложению: если $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, то $X_{\lambda_1} \subseteq X_{\lambda_2}$. Кроме того, будем предполагать, что операция тождественного вложения X_{λ_1} в X_{λ_2}, где $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, непрерывна. Пусть, далее $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Omega}$ — другое семейство л.-в.п. с теми же свойствами, что и $\{X_\lambda\}$. Предположим, что некоторый оператор L определен на всех пространствах X_λ и таков, что он линейно и непрерывно отображает X_λ в Y_λ, $\lambda\in\Omega$, причем его действие не зависит от λ. Более того, будем предполагать, что при любом $\lambda\in\Omega$ L — н.-р. оператор из X_λ в Y_λ с d-х. (a_λ, b_λ), где $a_\lambda = \dim\ (T_\lambda)$ — размерность подпространства T_λ решений уравнения (1.2) из X_λ, а $b_\lambda = \dim(R_\lambda)$, $R_\lambda = \{\psi : \psi \in Y'_\lambda,\ L'\psi = 0\}$, причем $b_\lambda < +\infty$ при всех $\lambda \in Q$.

Для всякого множества $Q \subset \Omega$ в векторном пространстве $\bigcup\limits_{\lambda\in\Omega} X_\lambda$ $\Big($ соответственно $\bigcup\limits_{\lambda\in\Omega} Y_\lambda\Big)$ можно ввести обычным образом топологию индуктивного предела [4]. Полученное в результате л.-в.п. обозначим через $X_и(Q)$ $\big(Y_и(Q)\big)$.

Если $X'_и(Q)$, $Y'_и(Q)$ — множества непрерывных линейных функционалов в $X_и(Q)$ $\big($в $Y_и(Q)\big)$, то

$$X'_и(Q) = \bigcap_{\lambda\in Q} X'_\lambda, \qquad Y'_и(Q) = \bigcap_{\lambda\in Q} Y'_\lambda.$$

Пусть T_Q — подпространство $X_и(Q)$ решений уравнения (2.2), а R_Q — подпространство $Y'_и(Q)$, состоящее из решений уравнения $L'\psi = 0$:

$$(L'\psi, y) = (\psi, Ly) = 0 \quad \text{для всех } y \in X_и(Q) \quad \text{и} \quad \psi \in R_Q.$$

Заметим, что $T_Q = \bigcup\limits_{\lambda\in Q} T_\lambda$ и поэтому

$$a_Q = \dim T_Q = \sup_{\lambda\in Q} a_\lambda .$$

Множества $R_\lambda\ (\lambda\in\Omega)$ упорядочены по вложению таким образом, что b_{λ_1} не превосходит b_{λ_2}, если $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$. Кроме того, b_λ — неотрицательные целые числа. Отсюда следует, что если $b_Q = \inf\limits_{\lambda\in Q} b_\lambda$, то b_Q достигается на некотором $\tilde\lambda_0$ причем для всех $\lambda \geqslant \tilde\lambda_0$, $b_\lambda \equiv b_{\tilde\lambda_0}$ и, $\lambda\in Q$ значит, $R_\lambda \equiv R_{\tilde\lambda_0}$. Итак,

$$b_Q = \dim R_Q = \min_{\lambda\in Q} b_\lambda = b_{\tilde\lambda_0} = \dim R_{\tilde\lambda_0}.$$

Выясним теперь свойства оператора L как оператора, действующего из $X_и(Q)$ в $Y_и(Q)$. Покажем, что при сделанных в начале п. 2 предположениях, оператор L будет непрерывным линейным н.-р. оператором из $X_и(Q)$ в $Y_и(Q)$ с d-х. (a_Q, b_Q). Непрерывность и линейность оператора L очевидны. Пусть теперь уравнение (2.1) имеет решение $x \in X_и(Q)$ при данной правой части f

из $Y_{\text{и}}(Q)$. Тогда найдется $\lambda\in Q$ такое, что $x\in X_\lambda$, $f\in Y_\lambda$, и уравнение (2.1) разрешимо в X_λ, при данной правой части $f\in Y_\lambda$. В силу нормальной разрешимости оператора L как оператора из X_λ в Y_λ, получим, что $(\psi_\lambda, f)=0$ для всех $\psi_\lambda\in R_\lambda$ и подавно $(\psi, f)=0$ для всех $\psi\in R_Q=\bigcap\limits_{\lambda\in Q} R_\lambda$. Пусть обратно, $f\in Y_{\text{и}}(Q)$ и $(\psi, f)=0$ для любого ψ из R_Q. Найдем $\lambda\in Q$ такое, что $f\in Y_\lambda$ и $R_Q=R_\lambda$. Тогда $(\psi_\lambda, f)=0$, когда $\psi_\lambda\in R_\lambda$, и в X_λ существует частное решение уравнения (2.1). Следовательно, это уравнение подавно разрешимо в $X_{\text{и}}(Q)$. Заметим, что d-х. L может быть конечной или полубесконечной ($0\leqslant a_Q\leqslant +\infty$, $0\leqslant b_Q<+\infty$); причем

$$\chi_L=a_Q-b_Q=\sup_{\lambda\in Q} a_\lambda-\min_{\lambda\in Q} b_\lambda=\sup_{\lambda\in Q}(a_\lambda-b_\lambda).$$

3. Можно рассмотреть также действие оператора L в проективных пределах пространств X_λ. Пусть оператор Ly удовлетворяет условиям из начала п. 2 с одним исключением, что на этот раз $a_\lambda<+\infty$ для всех $\lambda\in\Omega$ (конечность чисел b_λ не предполагается). Пусть $B\in\Omega$. В линейном множестве $\bigcap\limits_{\lambda\in B} X_\lambda\left(\bigcap\limits_{\lambda\in B} Y_\lambda\right)$ введем обычным образом топологию проективного предела [4]. Полученное л.-в. пространство обозначим через $X_\Pi(B)$ (соответственно $Y_\Pi(B)$). Сопряженное пространство (множество всех линейных непрерывных функционалов на $X_\Pi(B)$ (на $Y_\Pi(B)$)) определяется соотношением

$$X'_\Pi(B)=\bigcup_{\lambda\in B} X'_\lambda \qquad \left(Y'_\Pi(B)=\bigcup_{\lambda\in B} Y'_\lambda\right).$$

Линейный оператор L, действующий из $X_\Pi(B)$ в $Y_\Pi(B)$, непрерывен. Положим

$$a_\Pi=\dim T_B, \qquad T_B=\{x\in X_\Pi(B): Lx=0\},$$
$$b_\Pi=\dim R_B, \qquad R_B=\{\psi\in Y'_\Pi(B): L'\psi=0\}.$$

Очевидно, что

$$R_B=\bigcup_{\lambda\in B} R_\lambda \quad \text{и} \quad b_B=\sup_{\lambda\in B} b_\lambda, \quad 0\leqslant b_B\leqslant\infty.$$

Используя упорядоченность множеств T_λ и конечность неотрицательных целых чисел a_λ, получаем, что в B найдется элемент λ_1 такой, что $T_\lambda\equiv T_{\lambda_1}$, если $\lambda\leqslant\lambda_1$. Но тогда

$$T_B=\bigcap_{\lambda\in B} T_\lambda=T_{\lambda_1}, \quad \text{и} \quad a_B=\dim T_{\lambda_1}=\min_{\lambda\in B} a_\lambda, \qquad 0\leqslant a_B<+\infty.$$

Найдем условия разрешимости уравнения (2.1) в $X_\Pi(B)$ при данной правой части $f\in Y_\Pi(B)$. Пусть это уравнение имеет частное решение $x\in X_\Pi(B)$. Тогда для всех $\lambda\in B$ $f\in Y_\lambda$, $x\in X_\lambda$, и уравнение (2.1) разрешимо в X_λ, откуда $(\psi_\lambda, f)=0$ для всех $\psi_\lambda\in R_\lambda$. Следовательно, $(\psi, f)=0$ для любого ψ из $R_B=$ $=\bigcup\limits_{\lambda\in B} R_\lambda$.

Пусть, обратно, $f \in Y_{\Pi}(B)$ и $(\psi, f)=0$ для всех ψ из R_B. Подавно $(\psi_{\lambda_1}, f)=0$ для любого ψ_{λ_1} из R_{λ_1}, и существует элемент $x_{\lambda_1} \in X_{\lambda_1}$ такой, что $Lx_{\lambda_1}=f$. Если $\lambda \geqslant \lambda_1$, то $x_{\lambda_1} \in X_{\lambda_1} \subseteq X_\lambda$. Пусть теперь $\lambda < \lambda_1$. Так как $(\psi_\lambda, f)=0$ для всех ψ_λ из R, то в X_λ найдется решение x_λ уравнения (2.1). Элемент $v_{\lambda,\lambda_1}=x_{\lambda_1}-x_\lambda \in T_{\lambda_1}$ (так как $X_\lambda \subseteq X_{\lambda_1}$). Но $T_{\lambda_1}=T_\lambda$, и $-x_\lambda+x_{\lambda_1} \in T_\lambda \subseteq X_\lambda$, откуда $x_{\lambda_1} \in X_\lambda$, каково бы ни было λ из B. Следовательно, $x_{\lambda_1} \in X_{\Pi}(B)$, и уравнение (2.1) разрешимо в $X_{\Pi}(B)$ при данной правой части f из $Y_{\Pi}(B)$. Таким образом, мы получили, что оператор L является непрерывным н.-р. оператором, действующим из $X_{\Pi}(B)$ в $Y_{\Pi}(B)$, с конечной или полубесконечной d-характеристикой. Индекс этого оператора равен

$$\chi_L = a_B - b_B = \min_{\lambda \in B} a_\lambda - \sup_{\lambda \in B} b_\lambda = \inf_{\lambda \in B} \chi_\lambda.$$

4. Вернемся теперь к ситуации, описанной в п. 2 и предположим, что правая часть $f \in Y_{\text{н}}(Q)$ удовлетворяет условиям разрешимости. Тогда в $X_{\text{н}}(Q)$ существует по крайней мере одно частное решение x уравнения (2.1). Возникает вопрос о том, нельзя ли выбрать это частное решение x как можно более „близким“ к правой части f. Само понятие „близости“ нуждается в уточнении. Для этого отнесем каждому $x \in \bigcup_{\lambda \in \Omega} X_\lambda = X$ характеристическую функцию $f_x(\lambda)$, определенную на Ω следующим образом: $f_x(\lambda)=1$. если $x \in X_\lambda$, и $f_x(\lambda)=0$, если $x \bar{\in} X_\lambda$. Множество X разбивается на непересекающиеся классы, если два элемента x_1, x_2 отнесем к одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $f_{x_1}(\lambda) \equiv f_{x_2}(\lambda)$. Аналогичное разбиение проведем для множества $Y=\bigcup_{\lambda \in \Omega} Y_\lambda$ с помощью характеристических функций $F_y(\lambda)$. Назовем решение x из X уравнения (2.1) (при $f=y$) характеристически близким к y, если $f_x(\lambda) \equiv F_y(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$.

Теорема 2.1. *Пусть $Q \in \Omega$, L-нетеров оператор из X_λ в Y_λ при всех $\lambda \in \Omega$, и элемент y из $Y_{\text{н}}(Q)$ удовлетворяет условиям разрешимости, причем $b_\lambda = b_{\lambda_0}^{\sim} = b_Q$ для всех $\lambda \in \Omega$ таких, что $F_y(\lambda)=1$ (иначе говоря, если $y \in Y_\lambda$, то $b_\lambda = b_{\lambda_0}^{\sim} = b_Q$). Тогда в $X_{\text{н}}(Q)$ найдется характеристически близкое к y решение x уравнения* (2.1) (*при $f=y$*).

Доказательство. Положим $B=\{\lambda \in \Omega : F_y(\lambda)=1\}$ (B — множество всех $\lambda \in \Omega$ таких, что $y \in Y_\lambda$). Уравнение $Lz=y$ разрешимо в $X_{\Pi}(B)$ при данной правой части y из

$$Y_{\Pi}(B) = \bigcap_{\lambda \in B} Y_\lambda$$

тогда и только тогда, когда $(\psi, y)=0$ для всех $\psi \in R_B$. Но из условий теоремы следует, что

$$R_B = R_Q.$$

Так как по условию $(\psi, y)=0$ для всех ψ из R_Q, то уравнение (2.1) разрешимо в $X_{\Pi}(B)$. Если x_1 — соответствующее решение, то $f_{x_1}(\lambda)=1$ для всех $\lambda \in B$. Заметим, что оператор L обладает следующим свойством: если $f_x(\lambda)=1$, то $F_{Lx}(\lambda)=1$. Поэтому $f_{x_1}(\lambda) \equiv 0$ вне B и, следовательно, $f_{x_1}(\lambda) \equiv F_y(\lambda)$.

5. Исследуем теперь структуру общего решения однородного уравнения (2.2) в $X_н(\Omega)$, предполагая, что L — аддитивный однородный оператор (уже не обязательно непрерывный и н.-р.), действующий из X_λ в Y_λ при всех $\lambda\in\Omega$, причем его действие X_λ не зависит от λ. Предположим еще, что при любом $\lambda\in\Omega$ $\dim T_\lambda=\alpha_\lambda$ — конечное число, где, как и раньше, $T_\lambda=\{x\in X_\lambda : Lx=0\}$. Так как множества T_λ упорядочены по вложению и так как α_λ — неотрицательные целые числа, то в Ω найдется λ_0 такое, что если $\lambda\leqslant\lambda_0$, то

$$\alpha_\lambda\equiv\alpha_{\lambda_0}=c_0, \qquad 0\leqslant c_0<+\infty.$$

Пусть

$$U_n=\{\lambda\in\Omega : \dim\, T_\lambda=n\}.$$

Тогда

$$\Omega=\bigcup_{n=c_0}^{\infty} U_n \quad \text{и} \quad T=\bigcup_{\lambda\in\Omega} T_\lambda=\bigcup_{n=c_0}^{\infty}\Big(\bigcup_{\lambda\in U_n} T_\lambda\Big)=\bigcup_{n=c_0}^{\infty} T_{\lambda_n},$$

где λ_n — произвольно взятый элемент U_n. Если $x\in T$, то через $n(x)$ обозначим наименьшее целое число, при котором $x\in T_{\lambda_n}$. В этом пункте у нас будут встречаться соотношения $m\leqslant n$ или $m<n$, где m и n — натуральные числа. Эти соотношения означают обычные (арифметические) неравенства, в общем случае не имеющие ничего общего с отношением порядка в Ω, выражаемым теми же символами и связывающим пары элементов из Ω.

Введем последовательность характеристических функций $\psi_n(\lambda)$, определенных на Ω так, что $\psi_n(\lambda)=0$ если $\alpha_\lambda<n$, и $\psi_n(\lambda)=1$, если $\alpha_\lambda\geqslant n$. Покажем что $f_x(\lambda)\equiv\psi_{n(x)}(\lambda)$. В самом деле, пусть $f_x(\lambda)=0$. Тогда для этого λ $x\bar{\in}X_\lambda$ $x\bar{\in}T_\lambda$, откуда $\lambda<\lambda_{n(x)}$ и число α_λ меньше числа $n(x)$. Следовательно $\psi_{n(x)}(\lambda)=0$. Пусть теперь $f_x(\lambda)=1$. В этом случае $x\in X_\lambda$, $x\in T_\lambda$. Множество T_λ попадает в какой-то класс U_m; тогда $x\in T_{\lambda_m}$ и, значит, $m\geqslant n(x)$. Но тогда

$$\dim T_\lambda=\dim T_{\lambda_m}=m\geqslant n(x) \quad \text{и} \quad \psi_{n(x)}(\lambda)=1.$$

Заметим, что некоторые из множеств U_n могут оказаться пустыми. Пусть $c_0<c_1<c_2<\ldots$ — возрастающая последовательность всех натуральных чисел $\geqslant c_0$ таких, что U_{c_k} непусты. Если x — любое решение из X уравнения (2.2) (т.-е. $x\in T$), то его характеристическая функция $f_x(\lambda)$ на основании вышеизложенного совпадает тождественно с одной из функций последовательности $\mu_k(\lambda)=\psi_{c_k}(\lambda)$, $k=0,1,\ldots$ Заметим, что T можно представить в виде объе динения непересекающихся множеств $T_{c_0}\cup T_{c_0}\backslash T_{c_1}\cup T_{c_2}\backslash T_{c_1}\cup\ldots$

В пространстве T можно ввести базис следующим образом. Возьмем бази в $T_{c_0}-c_0$ линейно-независимых элементов e_n, $n=1,2,\ldots,c_0$ $\Big($для всех этих элементов $f_{e_n}(\lambda)\equiv\mu_0(\lambda)\Big)$; далее, добавим к ним максимальное число p_1 элементов e_n из $T_{c_1}\backslash T_{c_0}$ так, чтобы они составляли в T_{c_1} линейно-независимую систему. Очевидно, что $p_1=c_1-c_0$ и что $f_{e_n}(\lambda)=\mu_1(\lambda)$ для $n=c_0+1$, $c_0+2,\ldots$ $\ldots,c_1$. Продолжая этот процесс неограниченно, нолучим искомый счетный базис $\{e_n\}$. Тогда всякий элемент x из T можно представить в виде (где положено $c_{-1}=0$)

$$x=\sum_{n=c_{k-1}+1}^{c_k} a_n e_n+\sum_{m=1}^{c_{k-1}} a_m e_m,$$

где

$$f_x(\lambda)\equiv\mu_k(\lambda) \quad \text{и} \quad f_{x_1}(\lambda)\leqslant\mu_{k-1}(\lambda), \qquad x_1=\sum_{m=1}^{c_{k-1}} a_m e_m.$$

6. В случае, если каждое ограниченное снизу подмножество совершенно упорядоченного множества Ω имеет нижнюю грань, можно вместо характеристической функции ввести другое, более простое понятие. Предварительно договоримся, в случае, если в Ω нет наименьшего элемента, ввести его, как это обычно делается, дополнив Ω элементом $\bar{\lambda}$, положив $\bar{\lambda}\leqslant\lambda$ для всех $\lambda\in\Omega$. Пусть теперь

$$x\in X=\bigcup_{\lambda\in\Omega} X_\lambda.$$

Если множество $D_x\{\lambda\in\Omega : x\in X_\lambda\}$ не ограничено снизу, то полагаем $\varphi(x)=\bar{\lambda}$. Если же множество D_x ограничено снизу, то полагаем $\varphi(x)=\inf D_x$. Аналогично вводится функция $\Phi(y)$ для любого

$$y\in Y=\bigcup_{\lambda\in\Omega} Y_\lambda.$$

Элемент x назовем близким к y, если $\varphi(x)=\Phi(y)$.

Теорема 2.1 в этом случае принимает такой вид.

Теорема 2.1′. *Пусть $Q\subseteq\Omega$, L удовлетворяет условиям пункта 2, $y\in Y_и(Q)$, $\Phi(y)\geqslant\bar{\lambda}_0$ и „y“ удовлетворяет условиям разрешимости. Тогда в $X_и(Q)$ найдется близкое к y решение „x“ уравнения (1.1), где $f=y$ (то-есть, решение, для которого $\varphi(x)=\Phi(y)$).*

Далее, построенный в п.5, базис $\{e_n\}$ будет обладать следующим свой ством: всякий элемент x из T можно представить в виде (1.4), где

$$\varphi(x_1)<\varphi(x), \quad x_1=\sum_{m=1}^{c_{k-1}} a_m e_m, \quad \text{и} \quad \varphi(x)=\varphi(e_s), \quad c_{k-1}+1\leqslant s\leqslant c_k.$$

7. В заключенне отметим, что в частном случае, когда Ω является ин тервалом на вещественной оси, а X_λ и $Y_\lambda-(B)$-пространствами, результаты данного параграфа изложены в § 2 работы [1] и в §1 работы [6].

То обстоятельство, что понятие н.-р. оператора можно ввести в линейном топологическом пространстве, было ранее отмечено в ряде работ (например, [7]-[9]). В частности, в работе [8] рассмотрен случай, когда $Q=(a, r)$, $r\in(a,b)=\Omega$, X_λ и $Y_\lambda-(B)$ – пространства, L-нетеров оператор из X_λ в Y_λ при любом $\lambda\in(a,b)$. В этой работе основные теоремы о Φ и $\Phi_\pm$ операторах [3] переносятся на пространства $X_и(a, r)$ и $X_\Pi(a, r)$. Полученные результаты применяются к исследованию некоторых операторов (не дифференциальных) в пространстве аналитических функций, и, в частности, к вопросам близости в теории полных систем и базисов. Рассуждения п.3 настоящего параграфа близки к доказательству теоремы 1 из [8]. Следует, однако, отметить, что в схеме К. М. Фишмана оператор L всегда является нетеровым в $X_и(Q)$ или

$X_{\Pi}(Q)$, так как случай $Q=\Omega=(a, b)$ у него не рассматривается. В настоящем изложении, как отмечалось выше, возможны случаи, когда L — н.-р. оператор с полубесконечной характеристикой.

§ 3. Нормальная разрешимость уравнения (1.1)

1. Рассмотрим оператор

$$My \equiv \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) y^{(k)}(x), \quad P_k(x) = \sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s, \quad \sup_{k\geqslant 1} \frac{n_k}{k} = \alpha < 1. \tag{3.1}$$

Пусть

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \in B_Q,$$

где B_Q — банахово пространство с нормой

$$\|y\|_Q = \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| m!^{\frac{1}{1-\alpha}} Q^{-m};$$

$$\left[1-\alpha, \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \subset B_Q \subset \left[1-\alpha, \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right].$$

Положим при любом $R<\infty$

$$\tilde{M}_R = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{|c_m| m! R^{m-k}}{(m-k)!} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| R^s = \sum_{r=0}^{\infty} v_r R^r;$$

$$v_r = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{[nk, r]} \frac{|a_s^k| |c_{k+r-s}| (k+r-s)!}{(r-s)!}.$$

Введем последовательность $\{w_r\}$,

$$w_r = v_r r!^{\frac{1}{1-\alpha}} Q^{-r}.$$

Имеем

$$\sum_{r=1}^{\infty} w_r = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| Q^{k-s} \sum_{r=s}^{\infty} \frac{|c_{k+r-s}| (k+r-s)! r!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(r-s)!} |a_s^k| Q^{-r} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| Q^{k-s} \sum_{r=s}^{\infty} |c_{k+r-s}| (k+r-s)!^{\frac{1}{1-\alpha}} Q^{-r+k-s} \times$$

$$\times \frac{r!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(r-s)! (k+r-s)!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| Q^{k-s} \gamma_{k, s} \sum_{r=s}^{\infty} |c_{r+k-s}| (k+r-s)!^{\frac{1}{1-\alpha}} Q^{-r+k-s},$$

где

$$\gamma_{k,s}=\sup_{r\geqslant s}\lambda_r^{k,s},\quad \lambda_r^{k,s}=\frac{r!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(r-s)!\,(k+r-s)!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}.$$

Отметим такое свойство чисел $\lambda_r^{k,s}$

$$\lambda_r^{k,s}\leqslant\frac{r^s}{(r+k-s)^{(k-s)\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\leqslant r^{\frac{s}{1-\alpha}-\frac{k\alpha}{1-\alpha}}\leqslant 1,$$

если $s\leqslant k\alpha$ и, следовательно, $\gamma_{k,s}\leqslant 1$ для всех $k\geqslant 1$ и $s\leqslant\alpha k$. Более точная оценка чисел $\gamma_{k,s}$ будет дана ниже. Введем функцию

$$\tau(Q)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n_k}|a_s^k|\,Q^{k-s}\,\gamma_{k,s},\quad Q\geqslant 0,$$

и предположим, что если $Q_0=\sup Q:\tau(Q)<\infty$, то $Q_0>0$.

Лемма 1. *Оператор My является ограниченным оператором из B_Q в B_Q при любом $Q<Q_0$.*

Действительно, имеем

$$\sum_{r=1}^{\infty}w_r\leqslant\tau(Q)\,\|y\|_Q<\infty.$$

Но тогда

$$(v_r)^{\frac{1}{r}}=[w_r\,Q^r\,r!^{-\frac{1}{1-\alpha}}]^{\frac{1}{r}}\to 0$$

при $r\to\infty$ и $\tilde{M}_R<\infty$ при всех $R<\infty$. Следовательно, My — целая функция, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\max_{|x|\leqslant R}|P_k(x)|\,\max_{|x|\leqslant R}|y^{(k)}(x)|\leqslant\tilde{M}_R<\infty$$

для всех $R<\infty$ и для любой функции $y(x)$ из B_Q. Если $y\in B_Q$, то используя равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_k(x)\,y^{(k)}(x)$, находим

$$My=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{m!\,c_m}{(m-k)!}\sum_{s=0}^{n_k}a_s^k\,x^{m-k+s}=\sum_{r=0}^{\infty}\tau_r x^r,$$

где $|\tau_r|\leqslant v_r$. Отсюда

$$\|My\|\,Q\leqslant\sum_{r=1}^{\infty}w_r\leqslant\tau(Q)\,\|y\|_Q<\infty$$

при $Q<Q_0$ и $My\in B_Q$. Рассмотрим еще (B) — пространство $B_Q(\alpha_1)$ $(\alpha<\alpha_1<1)$ с нормой

$$\|X\|_Q^{\alpha_1}=\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|\,k!^{\frac{1}{1-\alpha_1}}\,Q^{-k}.$$

Положим $t_r = Q^{-r} r!^{\frac{1}{1-\alpha_1}} v_r$. Тогда

$$\sum_{r=1}^{\infty} t_r \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| \, Q^{k-s} \tilde{\gamma}_{k,s} \|y\|_Q^{\alpha_1},$$

где $\tilde{\gamma}_{k,s} = \sup\limits_{r \geqslant s} \tilde{\lambda}_r^{k,s}$, а

$$\tilde{\lambda}_r^{k,s} = \lambda_r^{k,s} \left[\frac{r!}{(r+k-s)!} \right]^d, \qquad d = \frac{1}{1-\alpha_1} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Так как

$$\frac{r!}{(r+k-s)!} = \frac{r!\,(k-s)!}{(r+k-s)!\,(k-s)!} \leqslant \frac{1}{(k-s)!},$$

то

$$\tilde{\lambda}_r^{k,s} \leqslant \frac{\lambda_r^{k,s}}{(k-s)!^d} \quad \text{и} \quad \tilde{\gamma}_{k,s} \leqslant \gamma_{k,s} \, (k-s)!^{-d}.$$

Если ввести функцию

$$\tilde{\tau}(Q) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| \, Q^{k-s} \tilde{\gamma}_{k,s},$$

то

$$\tilde{\tau}(Q) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| \, \gamma_{k,s} \frac{Q^{k-s}}{(k-s)!^d} < \infty$$

при любом $Q < \infty$. Отсюда следует лемма.

Лемма 2. *M_y — ограниченный оператор из $B_Q^{\alpha_1}$ в $B_Q^{\alpha_1}$ при любом $Q \in (0, \infty)$ и $\alpha_1 \in (\alpha, 1)$.*

Пусть $\beta \in [\alpha, 1)$ и $Q_\beta = Q_0$ при $\beta = \alpha$ и $Q_\beta = \infty$ при $\beta \in (\alpha, 1)$.

Лемма 3. *Если $n_k < \beta k$ для всех $k \geqslant 1$, то M_y — вполне непрерывный оператор из B_Q^β в B_Q^β при всех $Q \in (0, Q_\beta)$.*

Зададим произвольно малое число $\varepsilon > 0$ и найдем $N < \infty$ такое, что

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| \, \frac{Q^{k-s}}{(k-s)!^d} \, \gamma_{k,s} < \frac{\varepsilon}{2},$$

где

$$d = \frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Оценим выражение

$$\sigma_{N_1} = \sum_{r=N_1}^{\infty} t_r:$$

$$\sigma_{N_1} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{nk} |a_s^k| \, Q^{k-s} \tilde{\gamma}_{k,s}^{N_1} \sum_{\substack{r=s \\ r \geqslant N_1}}^{\infty} |c_{r+k-s}| \, (k+r-s)!^{\frac{1}{1-\beta}} \, Q^{-r+k-s},$$

где $\gamma_{k,s}^{N_1} = \sup\limits_{\substack{r \geqslant s \\ r \geqslant N_1}} \tilde{\lambda}_r^{k,s} \leqslant \tilde{\gamma}_{k,s}$.

Имеем

$$\sigma_{N_1} \leqslant \|y\|_Q^\beta \Big[\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| \frac{Q^{k-s}}{(k-s)!^d} \gamma_{k,s} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| \frac{Q^{k-s}}{(k-s)!^d} \tilde{\gamma}_{k,s}^{N_1} \Big].$$

Но,

$$\gamma_{k,s}^{N_1} \leqslant \sup_{r \geqslant N_1;\ r \geqslant S} r^s \quad (r+1)^{\frac{\beta}{1-\beta}(s-k)} \leqslant N_1^{\frac{S-\beta k}{1-\beta}}$$

и число N_1 можно выбрать настолько большим (при фиксированном N), чтобы

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| Q^{k-s} \tilde{\gamma}_{k,s}^{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $n \geqslant N_1$. Тогда при любом таком n $\sigma_n < \varepsilon \|y\|_Q^\beta$ и My — вполне непрерывный оператор в B_Q^β, $Q < Q_\beta$.

2. Предположим сначала, что $\sup\limits_{k \geqslant 1} \frac{n_k}{k} = \alpha$ не достигается. Оператор $a_0 y$ при $a_0 \neq 0$ нормально-разрешим в B_Q^β при любом $Q \in (0, +\infty)$, $\beta \in [\alpha, 1)$, и его d-характеристика равна $(0, 0)$. Если же $Q < Q_\beta$, то оператор $Ly = a_0 y + My$ в силу леммы 3 нормально разрешим в B_Q^β с d-характеристикой (δ, δ), где δ-число решений из B_Q^β однородного уравнения $Ly = 0$. Но $L(B_Q^\beta)$ содержит множество S всех многочленов, так как (см. [10], стр. 137) уравнение $Ly = P(z)$ имеет для любого многочлена $P(z)$ единственное многочленное решение, причем его степень равна степени $P(z)$. Итак, $\delta = 0$, и уравнение

$$Ly = f \tag{3.2}$$

имеет единственное решение в B_Q^β $(Q < Q_\beta)$ при любой функции f из B_Q^β. Введем множество Ω пар (β, Q), где $\beta \in [\alpha, 1)$, а $Q \in (0, Q_\beta)$, и упорядочим его таким образом: (β_1, Q_1) предшествует (β_2, Q_2), если $\beta_1 < \beta_2$ или если $\beta_1 = \beta_2$, но $Q_1 \leqslant Q_2$. Образуем пространство

$$\tilde{E} = \bigcup_{(\beta, Q) \in \Omega} B_Q^\beta = \Big[1-\alpha,\ \frac{Q_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big).$$

На основании изложенного в § 2 уравнение (3.2) однозначно разрешимо в $\tilde{E}$ для любой правой части $f \in \tilde{E}$. Кроме того, характеристические функции решения y и правой части f совпадают. Из последнего следует, что если $f \in \{\rho, \sigma\}$, где $0 < \rho < 1-\alpha$ и $0 \leqslant \sigma \leqslant +\infty$, то и $y \in \{\rho, \sigma\}$; если же $f \in \{1-\alpha, \sigma\}$, $\sigma < \frac{Q_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, то и $y \in \{1-\alpha, \sigma\}$. Наконец, если трансцендентная функция f имеет нулевой порядок, то и y — трансцендентная функция нулевого порядка (в этом случае их характеристические функции тождественно равны единице на Ω; трансцендентность y следует из того, что если y многочлен, то тогда и Ly тоже многочлен). Наконец, если f является многочленом степени n, то y — также многочлен степени n (последний результат следует из ранее отмеченного факта наличия многочленного решения той же степени, что и правая часть и из единственности решения в $\tilde{E}$). Итак, справедлива теорема.

Теорема 3.1. *Пусть.* $Q_0 > 0$ *и* $n_k < \alpha k$ *для всех* $k \geqslant 1$. *Тогда для любой функции* f *из*

$$\left[1-\alpha,\ \frac{Q_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \tilde{E}$$

уравнение (3.2) *имеет в* $\tilde{E}$ *единственное решение* y, *причем порядки и типы функций* f *и* y *совпадают. Если* f — *трансцендентная целая функция нулевого порядка, то* y — *такая же функция; если же* f — *многочлен степени* n, *то и* y — *многочлен той же степени.*

Точно так же, как в [1] (стр. 21-22) показывается, что если $y_n(x)$ — полиномиальное решение „урезанного" уравнения

$$y(x) + \sum_{k=1}^{n} P_k(x)\, y^{(k)}(x) = f_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\, x^k}{k!},$$

то последовательность $y_n(x)$ сходится к точному решению $y(x)$ уравнения (2) из $\tilde{E}$ равномерно во всей плоскости с некоторым (зависящим от роста f) весом. Ввиду полной аналогии мы не будем останавливаться на этом, а только укажем, что справедлива теорема, которая получается заменой в теореме 4.3 работы [1] класса E_0 классом $\tilde{E}$.

3. Предположим теперь, что $\sup\limits_{k\geqslant 1} \frac{n_k}{k} = \alpha$ достигается на множестве $\{k\}$. Тогда α обязательно рационально, $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, $p < q$ и α может достигаться разве лишь для значений $k = sq$, причем $n_k = sp$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Положим $Q_1 = \sup Q : \omega(Q) < \infty$, где

$$\omega(Q) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{sp}^{sq} Q^{s(q-p)}.$$

Предположим, что $Q_1 > 0$. Введем величину $Q_2 = \inf\{Q_0, Q_1\}$. Рассмотрим вопрос о разрешимости уравнения (3.2) в классе B_Q^{α} (или, в обозначениях § 5 [1], класса $B_Q^{1}(\alpha)$), где $Q < Q_2$. Этот вопрос подробно исследован в § 5, все результаты которого останутся в силе, если в § 5 из [1] принять $\rho = 1$ и $\tilde{Q}$ заменить на Q_2. Именно, если функция $\omega(x)$ не обращается в нуль на окружности $|x| = Q < Q_2$, то Ly — н.-р. оператор в B_Q^{α} с d-х. $(\nu_Q, 0)$, где ν_Q — число нулей $\omega(x)$ в круге $|x| \leqslant Q$. Множество R всех таких Q всюду плотно в $(0, Q_2)$.

Далее, так как по лемме 3 My — вполне непрерывный оператор в любом пространстве B_Q^{β}, $\beta \in (\alpha, 1)$, $Q \in (0, +\infty)$, ибо $n_k \leqslant \alpha k < \beta k$ для всех $k \geqslant 1$, то $Ly \equiv a_0 y + My$ — н.-р. оператор в B_Q^{β} при тех же Q и β, с d-х. $(0,0)$ (ввиду того, что $L(B_Q^{\beta})$ содержит все многочлены и потому плотно в B_Q^{β}, а значит, совпадает с B_Q^{β}).

Положим $\Omega = \{(\beta, Q)\}$, где $\beta \in [\alpha, 1)$, а $Q \in (0, +\infty)$ при $\beta > \alpha$ и $Q \in R$ при $\beta = \alpha$. Упорядочим Ω так же, как и раньше. Введем индуктивный предел (B) — пространств B_Q^{β}:

$$\tilde{E}_0 = \bigcup_{(\beta, Q) \in \Omega} B_Q^{\beta} = \left[1-\alpha,\ \frac{Q_2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right).$$

В силу общих результатов § 2 оператор Ly н.-р. в $\tilde{E}_0$ с d-х. $(\nu_{Q_2-0}, 0)$, где $\nu_{Q_2-0} = \lim\limits_{Q\to Q_2-0} \nu_Q$ — число нулей $\omega(x)$ в круге $|x| < Q_2$. Далее, так как $b_{(\beta,Q)} = 0$ для всех $(\beta, Q)\in\Omega$, то по теореме 2.1 для любого f из $\tilde{E}_0$ существует в $\tilde{E}_0$ частное решение y, характеристически близкое к f. Но тогда, если f имеет порядок $\rho\in(0, 1-\alpha)$ и тип $\sigma\in[0, +\infty]$, то и $y\in\{\rho, \sigma\}$; если

$$f\in\{1-\alpha, \sigma\},\ \sigma < \frac{Q_2^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

то $y\in\{1-\alpha, \sigma\}$. Наконец, если f — целая функция нулевого порядка, то и y имеет нулевой порядок; при этом, если f — трансцендентная целая функция, то и y трансцендентная функция, а если f — многочлен степени n, то и y — многочлен степени n. Эту характеристическую близость f и y мы будем коротко выражать словами „f и y имеют одинаковый рост".

Мы пришли к такому результату.

Теорема 1'. *Для любой функции $f(x)$ из $\tilde{E}_0$ существует частное решение уравнения* (2), *имеющее тот же рост, что и $f(x)$.*

4. Представим пространство $\tilde{E}_0$ в виде индуктивного предела несколько иным способом:

$$\tilde{E}_0 = \bigcup_{Q\in R} B_Q^{\alpha}.$$

В каждом (B)-пространстве B_Q^{α} L — н.-р. оператор с d-х. $(\nu_Q, 0)$. В обозначениях п.5 § 2 $U_{c_k} = \{Q\in R : \dim T_Q = c_k\}$. Если все нули $\omega(x)$ в круге $|x| < Q_2$ расположены на окружностях $|x| = \tilde{Q}_1 < \tilde{Q}_2 < \tilde{Q}_3 < \ldots$ $(0 < \tilde{Q}_i < \tilde{Q}_{i+1} < Q_2)$, причем на окружности $|x| = \tilde{Q}_k$ расположено r_k нулей с учетом их кратности, то $c_k = \sum\limits_{s=1}^{k} r_s$. Пусть X — любое решение однородного уравнения (2) из $\tilde{E}_0$ $(X\in T)$; тогда его характеристическая функция $f_X(Q)$ совпадает с одной из характеристических функций вида $\psi_{c_k}(Q)$, равной 0 для тех $Q\in R$, у которых $\alpha_Q = \nu_Q < c_k$ и равной 1, если $\nu_Q \geqslant c_k$. Но это означает, что

$$X\in\left\{1-\alpha,\ \frac{\tilde{Q}_k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right\}.$$

Таким образом, если

$$X(z)\in T, \quad \text{то} \quad X\in\left\{1-\alpha,\ \frac{\sigma^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right\},$$

где σ — одно из чисел $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots$

Далее, в T есть не более чем счетный базис $\{e_n\}$, причем этот базис разбивается на группы $\{e_n\}$, $c_{k-1}+1 \leqslant n \leqslant c_k$, так, что

$$e_n\in\left\{1-\alpha,\ \frac{\tilde{Q}_k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right\}, \quad c_{k-1}+1 \leqslant n \leqslant c_k.$$

Таким образом, в каждой такой группе $c_k - c_{k-1} = r_k$ линейно-иезависимых решений. Если

$$X\in T \quad \text{и} \quad X\in\left\{1-\alpha,\ \frac{\tilde{Q}_e^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right\},$$

то

$$X = \sum_{s=c_{l-1}+1}^{c_l} d_s e_s + X_1,$$

где

$$X_1 \in \left[1-\alpha,\ \frac{\tilde{Q}_{l-1}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]$$

при $l \geqslant 1$ и $X_1 = 0$, при $l = 0\,(c_{-1} = 0)$.

Итак, справедлива теорема.

Теорема 2′. *Однородное уравнение* (3.2) ($cf \equiv 0$) *имеет в* $\tilde{E}_0$ ν *линейно-независимых решений, где* ν — *число нулей функции* $\omega(x)$ *в круге* $|x| < Q_2$; *при этом каждой группе* r_k *нулей (с учетом их кратности), лежащих на окружности* $|x| = \tilde{Q}_k < Q_2$, *соответствует* r_k *линейно-независимых решений однородного уравнения порядка* $1-\alpha$ *и типа* $\frac{\tilde{Q}_k^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. *Если* y — *произвольное решение однородного уравнения из* E_0, *то* $y \in \left\{1-\alpha,\ \frac{\sigma^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right\}$, *где* σ — *одно из чисел* $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots$

Сформулируем одно простое, но важное следствие из теорем 1′-2′. Пусть $\tilde{\gamma}$ — модуль ближайшего к началу координат корня $\omega(x)$ и $\gamma_1 = \min\{Q_2, \tilde{\gamma}\}$. Тогда уравнение (3.2) имеет в классе

$$\tilde{E}_1 = \left[1-\alpha,\ \frac{\gamma_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

единственное решение y, если $f \in E_1$, причем y имеет тот же рост, что и f.

§4. Оценка коэффициентов $\gamma_{k,s}$.

1. Результаты предыдущего параграфа страдают тем недостатком, что довольно трудно проверить, когда для уравнения (2) число Q_0 строго положительно. Все дело в том, что пока, вообще говоря, было неясно, как ведут себя числа $\gamma_{k,s}$ при возрастании k и s. В настоящем параграфе мы дадим достаточно простые и в то же время довольно точные оценки для чисел $\gamma_{k\,s}$.

Зафиксируем какие-либо $k \geqslant 1$ и $s \leqslant \alpha k$ и положим

$$\frac{\lambda_r^{k,s}\,[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{s!^{\frac{1}{1-\alpha}}} = v_r.$$

Имеем

$$v_r = \frac{r!^{\frac{1}{1-\alpha}}\,[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{s!^{\frac{1}{1-\alpha}}\,(r-s)!\,(k+r-s)!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} =$$

$$= \frac{\{(s+1)\,(s+2)\ldots[\alpha k]\}^{\frac{1}{1-\alpha}}\,\{(r-s+1)\,(r-s+2)\ldots r\}\,r!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{(k+r-s)!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} =$$

$$= \frac{\{(r-s+1)\ldots r\}\,\{(s+1)\,(s+2)\ldots[\alpha k]\}^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\{(r+1)\,(r+2)\ldots(r+k-s)\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}.$$

Возможны два случая:

1) $r>[\alpha k]$. Тогда

$$v_r\leqslant \frac{r^s[\alpha k]^{\frac{[\alpha k]-s}{1-\alpha}}}{(r+1)^{(k-s)\frac{\alpha}{1-\alpha}}}<\frac{r^{\frac{[\alpha k]-\alpha s}{1-\alpha}}(r+1)^{\frac{s\alpha}{1-\alpha}}}{(r+1)^{\frac{k\alpha}{1-\alpha}}}<\frac{(r+1)^{\frac{[\alpha k]}{1-\alpha}}}{(r+1)^{\frac{k\alpha}{1-\alpha}}}\leqslant 1;$$

2) $r\leqslant[\alpha k]$. В этом случае

$$v_r\leqslant\frac{\{(s+1)\dots[\alpha k]\}^{\frac{1}{1-\alpha}}\{([\alpha k]-s+1)\dots[\alpha k]\}}{\{(s+1)(s+2)\dots k\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}=$$

$$=\frac{\{(s+1)(s+2)\dots[\alpha k]\}([\alpha k]-s+1)([\alpha k]-s+2)\dots[\alpha k]}{\{([\alpha k]+1)([\alpha k]+2)\dots k\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant[\alpha k]^{[\alpha k]-s+s}([\alpha k]+1)^{\frac{\alpha[\alpha k]-k\alpha}{1-\alpha}}\leqslant[\alpha k]^{\frac{[\alpha k]-\alpha[\alpha k]-k\alpha+\alpha[\alpha k]}{1-\alpha}}\leqslant 1.$$

Итак, $v_r\leqslant 1$, при всех $r\geqslant s$, $s\leqslant\alpha k$ и, следовательно,

$$\gamma_{k,s}\leqslant\frac{s!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

2. Предположим, что при некотором $Q>0$

$$\tau_1(Q)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n_k}|a_s^k|\,Q^{k-s}\,\frac{s!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}<\infty.$$

Пусть $Q_3=\sup Q:\tau_1(Q)<\infty$. Очевидно, что $Q_3\leqslant Q_0$. Кроме того, если $\sup\limits_{k\geqslant 1}\frac{n_k}{k}=\alpha<1$ достигается, то при $s=[\alpha k]$ и

$$Q<Q_3\quad \sum_{k=1}^{\infty}{}' a_{[\alpha k]}^k\,Q^{k-[\alpha k]}=\omega(Q)<\infty,\quad \text{и}\quad Q_1\geqslant Q_3.$$

Поэтому $Q_2=\inf\{Q_0,Q_1\}\geqslant\inf\{Q_3,Q_1\}=Q_3$.

Кроме того, $\gamma_1=\min\{Q_2,\gamma\}\geqslant\min\{Q_3,\tilde\gamma\}=\tilde\gamma_1$. Введем классы

$$E_0^0=\left[1-\alpha,\ \frac{Q_3^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\quad\text{и}\quad E_1^0=\left[1-\alpha,\ \frac{\tilde\gamma_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right).$$

Мы получили, что если $\tau_1(Q)<\infty$ хотя бы при одном $Q>0$, то для уравнения (3.2) справедливы теоремы 1′ и 2′, в которых вместо $\tilde E_0$ надо взять E_0^0, вместо $\tilde E_1-E_1^0$ и вместо Q_2-Q_3. Эти теоремы (мы их здесь не формулируем ввиду полной аналогии с теоремами 1′ и 2′) назовем теоремами 1° и 2°.

Заметим, что

$$s!^{\frac{1}{1-\alpha}}[\alpha k]!^{-\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant\frac{1}{([\alpha k]-s)!}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

и поэтому, если $A(Q)<\infty$, то подавно $\tau_1(Q)<\infty$. Следовательно, $Q_3\geqslant\tilde Q$, причем можно построить примеры уравнений (2), для которых $Q_3>\tilde Q$. Таким образом, теоремы 1° и 2° усиливают теоремы 1—2.

Константу Q_3 нельзя в теоремах $1^\circ - 2^\circ$ заменить большей константой $Q_4 > Q_3$ сразу для всех уравнений. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть вышеприведенный пример оператора $\tilde{L}y$, для которого, как легко проверить, $Q_3 = \tilde{Q} = B$. Вместе с тем интересно отметить, что если $Q_3 > 0$, то оператор My применим к классу

$$\left[1-\alpha,\ \frac{Q_3^{1-\alpha}\alpha^{-\alpha}}{1-\alpha}\right),$$

более широкому, чем E_0^0. Действительно, если $R_1 < Q_3 \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ и $R < \infty$, то

$$\varphi(R_1, R) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{|a_i^k| R_1^{k-i} i!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}} \cdot \frac{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{k!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \frac{(RR_1)^i}{(i!)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant A \cdot \sup \frac{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{k!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{\alpha k}{1-\alpha}} \sqrt{k}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{|a_i^k| R_1^{k-i}}{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}} \sqrt{k}\, \alpha^{\frac{\alpha k}{1-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant A \cdot B\, \tau_1 (R_2 \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}),$$

где $R_1 < R_2 < Q_3 \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Следовательно, $\varphi(R_1, R) < \infty$ для всех $R < \infty$ и $R_1 < Q \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, и My равномерно и абсолютно применим к классу

$$\left[1-\alpha,\ \frac{Q_3^{1-\alpha}\alpha^{-\alpha}}{1-\alpha}\right).$$

Однако, вышеприведенный пример показывает, что если $Q > Q_3$, то My может уже выводить за пределы класса

$$E_Q = \left[1-\alpha,\ \frac{Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

(в том смысле, что если $g \in E_Q$, то не обязательно $Mg \in E_Q$).

§ 5. Уточнение оценок $\gamma_{s,k}$ с учетом асимптотических характеристик

1. При изучении роста функции

$$\tau(Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| Q^{k-s} \gamma_{k,s}$$

нам фактически достаточно рассматривать сумму вида

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} a_s^k | Q^{k-s} \gamma_{k,s}$$

(так как $\gamma_{k,s} \leqslant 1$ при любых фиксированных $k \geqslant 1$ и $s \leqslant \alpha k$). Таким образом, нам достаточно оценить числа $\gamma_{k,s}$ для всех больших k. Предположим, что числа n_k, кроме „глобальной" характеристики

$$\sup_{k\geqslant 1} \frac{n_k}{k} = \alpha \bar{<} 1,$$

удовлетворяют дополнительному условию

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} = \beta_1 < 1. \tag{5.1}$$

Из (5.1) следует, что если $\beta \in (\beta_1, \alpha)$, то асимптотически (то-есть, для всех достаточно больших k)

$$n_k < \beta k, \quad k \geqslant N_0.$$

Выпишем числа

$$\lambda_r^{k,s} (r \geqslant s;\ s \leqslant \alpha k;\ k \geqslant N_0) : \lambda_r^{k,s} = \frac{r!^{\frac{1}{1-\alpha}} (k+r-s)!^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{(r-s)!}.$$

Так как $s \leqslant \beta k$, то на основании оценок предыдущего параграфа

$$\frac{r!^{\frac{1}{1-\beta}}}{(r-s)!\,(k+r-s)!^{\frac{\beta}{1-\beta}}} \leqslant \frac{s!^{\frac{1}{1-\beta}}}{[\beta k]!^{\frac{1}{1-\beta}}}; \quad s \leqslant \beta k; \quad r \geqslant s; \quad k \geqslant N_0.$$

Отсюда $\left(\text{для тех же } s, k, \text{ и } r \text{ и } d = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\beta}\right)$:

$$\lambda_r^{k,s} = \frac{r!^{\frac{1}{1-\beta}}}{(r-s)!\,(k+r-s)!^{\frac{\beta}{1-\beta}}} \cdot \frac{(k+r-s)!^{\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\alpha}{1-\alpha}}}{r!^{\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1-\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s!^{\frac{1}{1-\beta}}}{[\beta k]!^{\frac{1}{1-\beta}}} \cdot \frac{r!^d}{(k+r-s)!^d} = \frac{s!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{[\beta k]!^{\frac{1}{1-\beta}}} \left[\frac{r!}{(k+r-s)!\,s!}\right]^d.$$

Пусть (при фиксированных s и k) $\mu_r = \frac{r!}{(k+r-s)!}$. Тогда

$$\frac{\mu_{r+1}}{\mu_r} = \frac{r+1}{r+1+k-s} < 1,$$

и μ_r с ростом r не возрастает и $\mu_r \leqslant \mu_s = \frac{s!}{k!}$. Следовательно,

$$\lambda_r^{k,s} \leqslant \frac{s!^{\frac{1}{1-\alpha}} k!^{-d}}{[\beta k]!^{\frac{1}{1-\beta}}} = \left(\frac{s!}{[\alpha k]!}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{[\beta k]!^{\frac{1}{1-\beta}}}\, k!^{-d} \leqslant$$

$$\leqslant H \frac{s!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}} \left(\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}}\right)^k.$$

Пусть $q = \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \beta^{-\frac{\beta}{1-\beta}}$ $\left(\text{функция } x^{\frac{x}{1-x}}\text{, как легко проверить методами дифференциального исчисления, убывает в интервале } (0, 1)\text{; поэтому } q < 1\right)$.

Мы получили такие оценки для $\gamma_{k,s}$, $k \geqslant N_0$:

$$\gamma_{k,s} \leqslant Hq^k \left(\frac{s!}{[\alpha k]!}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant Hq^{k-s} \left(\frac{s!}{[\alpha k]!}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Тогда

$$\psi_{N_0}(Q)=\sum_{k=N_0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n_k}|a_s^k|\,Q^{k-s}\gamma_{k,s}\leqslant\sum_{k=N_0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n_k}|a_s^k|\,(Qq)^{k-s}\left(\frac{s!}{[\alpha k]!}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Из полученных оценок ясно, что если $Q_0=\sup Q:\tau(Q)<\infty$, то

$$Q_0\geqslant\frac{Q_3}{q}=Q_3\,\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}\,\alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Учитывая, что β можно взять как угодно близким к β_1, находим, что

$$Q\geqslant Q_3\,\beta_1^{\frac{\beta_1}{1-\beta_1}}\,\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=Q_4.$$

Заметим еще, что в данном случае $\sup\limits_{k\geqslant 1}\frac{n_k}{k}=\alpha$ может достигаться разве лишь на конечном множестве номеров k, и потому $\omega(x)$ — целая функция. На основании теорем $1'-2'$ можно теперь сформулировать такой окончательный результат.

Теорема 5.1. *Пусть коэффициенты уравнения* (3.2) *таковы, что*

1) $Q_3>0\quad\left(Q_3=\sup\{Q:\tau_1(Q)<\infty\}\right)$;

2) $\sup\limits_{k\geqslant 1}\frac{n_k}{k}=\alpha<1$;

3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{n_k}{k}=\beta_1<\alpha$.

Тогда А) для любой функции

$$f\in E_4=\left[1-\alpha,\ \frac{Q_4^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

существует в E_4 частное решение (3.2) того же роста, что и $f(x)$;

Б) однородное уравнение (3.2) (с $f\equiv 0$) имеет в E_4 ν линейно-независимых решений, где ν — число нулей функции $\omega(x)$ в круге $|x|<Q_4$; при этом каждой группе m нулей на окружности $|x|=R<Q_4$ соответсвует m линейно-независимых решений однородного уравнения порядка $1-\alpha$ и типа $\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Следствие. *Пусть коэффициенты уравнения* (3.1) *удовлетворяют условиям* 1) — 2) *предыдущей теоремы и, кроме того, условие*

3′) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n_k}{k}=0$.

Тогда для уравнения (3.2) *справедливо все сказанное в пунктах* А) — Б) *теоремы* 5.1, *если только в ней число* $Q_4=Q_3\,\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\,\beta_1^{\frac{\beta_1}{1-\beta_1}}$ *заменить числом* $Q_5=Q_3\,\alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, *а класс* E_4 — *классом*

$$E_5=\left[1-\alpha,\ \frac{Q_5^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right).$$

Выясним, насколько точен последний результат. С этой целью предварительно найдем условия равномерной применимости оператора My к классу $[1-\alpha, \sigma)$ в случае, если выполнено условие 3'). Эти условия в одной форме были уже указаны выше (в общем случае, когда $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(n_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant 1$): при любом $R<\infty$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left(T_k(R)\, k!^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant [\sigma(1-\alpha)]^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{5.1}$$

где

$$T_k(R) = \sum_{i=0}^{n_k} |a_i^k|\, R^i.$$

Пользуясь тем, что выполняется условие 3'), можно в этом случае в критерии применимости избавиться от числа R. Именно, введем величины

$$d_k = \sum_{i=0}^{n_k} |a_i^k|, \quad k=1, 2, \ldots$$

Имеем очевидные оценки

$$d_k \min(R^{n_k}, 1) \leqslant T_k(R) \leqslant (R^{n_k}+1)\, d_k.$$

Так как $\frac{n_k}{k}\to 0$, то условие (5.1) равносильно следующему

$$d = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(d_k\, k!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant [\sigma(1-\alpha)]^{-\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Иначе говоря, если

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left(d_k\, k!^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{\frac{1}{k}} = d < \infty,$$

то максимальным (в шкале $[\rho, \sigma)$) классом равномерной применимости оператора My будет класс $\left[1-\alpha, \frac{d^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right)$.

Выясним связь между числами Q_3 и d. При любом $Q>0$ и $i\leqslant n_k$

$$a_k(Q) = \inf\{Q^{k-n_k}, Q^k\} \leqslant Q^{k-i} \leqslant \sup\{Q^{k-n_k}, Q^k\} = A_k(Q).$$

При этом

$$\lim_{k\to\infty} \left(a_k(Q)\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \left(A_k(Q)\right)^{\frac{1}{k}} = Q.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k\, a_k(Q)}{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leqslant \tau_1(Q) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(n_k)!}{[\alpha k]!}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} d_k\, A_k(Q).$$

Предположим, что числа n_k удовлетворяют чуть более сильному условию, чем 3'):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k \ln n_k}{k} = 0.$$

Тогда $(n_k!)^{\frac{1}{k}} \to 1$ при $k \to \infty$, и для любого $\varepsilon \in (0, Q)$

$$H_1(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k (Q-\varepsilon)^k}{\alpha^{\frac{\alpha k}{1-\alpha}} k!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \leqslant \tau_1(Q) \leqslant H_2(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k (Q+\varepsilon)^k}{\alpha^{\frac{\alpha k}{1-\alpha}} k!^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} .$$

Из этих оценок видно, что

$$Q_3 = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{d} .$$

Следовательно, если $Q_3 > 0$, то

$$d = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{Q_3} < \infty$$

и максимальным классом применимости будет класс

$$\left[1-\alpha, \ \frac{d^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right) = \left[1-\alpha, \ \frac{\alpha^{-\alpha} Q_3^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right),$$

то-есть как раз класс E_5, в котором установлена разрешимость уравнения (3.2). Таким образом, если коэффициенты уравнения (3.3) удовлетворяют условиям 1)–2) и 3″), то теорема 5.1 является точной.

Условие 3″), в частности, выполняется для уравнений

$$a_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{p} a_s^k x^s\right) y^{(k)}(x) = f(x). \tag{5.2}$$

Пусть

$$c_s = \overline{\lim_{k\to\infty}} \, [\,|a_s^k|\, k!^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}]^{\frac{1}{k}}, \quad s = 0, 1, \dots, p \quad \text{и} \quad c = \sup_{0\leqslant s\leqslant p} c_s.$$

Очевидно, что $d = c$. Мы приходим к такому результату.

Теорема 5.2 *Пусть для уравнения* (5.2) *выполнено следующее условие*

$$d = \sup_{0\leqslant s\leqslant p} \overline{\lim_{k\to\infty}} \, [\,|a_s^k|\, k!^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}]^{\frac{1}{k}} < \infty . \tag{5.3}$$

Тогда для этого уравнения справедливо все сказанное в пунктах а) *и* б *теоремы* 5.1, *если только в них вместо числа* Q_4 *взять*

$$Q_5 = \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} , \quad Q_3 = \frac{1}{d} ,$$

а вместо класса E_4 — *класс*

$$E_6 = \left[1-\alpha, \ \frac{d^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right).$$

В частности, для любой функции $f \in E_6$ *уравнение* (3.2) *имеет в* E_6 *частное решение того же роста, что и* $f(x)$; *при этом* E_6 *является максимальным классом применимости оператора* My *при условии* $d < \infty$ *(в шкале классов* $[\rho, \sigma)$*). В этом же классе определена структура общего решения однородного уравнения.*

Как мы убедились, асимтотическое более медленное возрастание (по сравнению с функцией αk) последовательности $\{n_k\}$ влечет за собой расширение класса разрешимости $\left[1-\alpha, \frac{Q_3^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$ до класса $\left[1-\alpha, \frac{Q_5^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$, где

$$Q_5 = Q_3\,\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} > Q_3\,.$$

Возникает естественный вопрос, нельзя ли еще больше расширить класс разрешимости уравнения (3.2), если потребовать, чтобы последовательность $\{n_k\}$ росла еще медленнее, чем любая последовательность $\{\beta k\}$, $\beta < \alpha$. Точная постановка вопроса такова. Пусть коэффициенты a_s^k уравнения (3.2) обладают следующими свойствами:

$$\tilde{1})\ \sup_{k \geqslant 1} \frac{n_k}{k} = \alpha < 1; \qquad \tilde{2})\ Q_3 > 0;$$

$$\tilde{3})\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{n_k}{\varphi(k)} < \infty, \quad \text{где} \quad \varphi(k) \uparrow +\infty, \quad \frac{\varphi(k)}{k} \to 0.$$

Можно ли для всех таких уравнений усилить следствие теоремы 5.1, заменив в нем число Q_5 каким-либо бо́льшим числом Q_6, годным для всех уравнений, удовлетворяющих условиям $\tilde{1}) - \tilde{3})$.

Оказывается, что такое усиление уже невозможно, даже если функция $\varphi(k)$ возрастает сколь угодно медленно. Действительно уравнение (5.2) при условии (5.3) всегда обладает свойствами $\tilde{1}) - \tilde{3})$ для любой функции

$$\varphi(k) \uparrow +\infty.$$

Но для этого уравнения постоянную $Q_5 = \frac{1}{d}$ нельзя заменить большим числом. Таким образом, обнаруживается довольно парадоксальное явление, которое заключается в следующем. Пусть для уравнения (3.2)

$$Q_3 > 0 \quad \text{и} \quad \sup_{k \geqslant 1} \frac{n_k}{k} = \alpha < 1.$$

Пусть, далее, известно, что последовательность n_k асимтотически возрастает медленнее, чем αk, именно, не быстрее чем любая последовательность $\{\varepsilon k\}$, где $0 < \varepsilon < \alpha$. Тогда класс разрешимости E_4 в теореме 3 расширяется до класса E_5. В то же время более медленное возрастание (как угодно медленное!) последовательности n_k уже не может, вообще говоря (то-есть, для всех уравнений со свойствами $\tilde{1}) - \tilde{3})$), обеспечить расширения класса разрешимости E_5.

Ростовский Государственный университет

Поступило в редакцию 29.IV.1969

Литература

1. Ю. Ф. Коробейник, Некоторые применения теории нормально-разрешимых операторов к дифференциальным уравнениям бесконечного порядка, Матем. Сб., **72** (114), № 1 (1967), 3—37.
2. Ю. Ф. Коробейник, О применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка, Сибирский Математический журнал, **X**, № 3(1969), 549—564.
3. М. Г. Крейн и И. Ц. Гохберг. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, XII, вып. 2(74), 1957, 43—118.
4. А. Робертсон и В. Робертсон, Топологические векторные пространства, „Мир", Москва, 1967.
5. Н. Бурбаки, Общая топология. Основные структуры, ГИФМЛ, Москва, 1958.
6. Ю. Ф. Коробейник и Т. И. Демченко, О разрешимости одного класса дифференциальных уравнений бесконечного порядка, Сибирский Математический Журнал, VIII, № 6 (1967), 1321—1338.
7. Ф. Браудер, Функциональный анализ и уравнения в частных производных, Сборник переводов, Математика, 4 : 3 (1960).
8. К. М. Фишман, О связи метода близких систем в специальных линейных топологических пространствах с некоторыми вопросами теории возмущений линейных операторов в банаковых пространствах, ДАН СССР, 1958, 122, № 1, 22—25.
9. D. Przeworska—Rolewicz and S. Rolewicz, Remarks on ф-operators in linear topological spaces, Prace mathem., IX, 1, Seria I (1965).
10. Ю. Ф. Коробейник, О дифференциальном уравнении бесконечного порядка с многочленными коэффициентами. Изв. вузов, Математика, 3(10), (1959), 130—146.

NORMALIAI IŠSPRENDŽIAMI OPERATORIAI IR BEGALINĖS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

J. Korobeinikas

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama lygtis

$$y(x)+\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)}(x)=f(x), \qquad P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s, \tag{1}$$

kai

$$\sup_{k\geqslant 1} \frac{n_k}{k}=\alpha<1,$$

$$\tau_1(Q)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k|\, Q^{k-s}\, \frac{s!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

ir

$$Q_0=\sup\{Q:\tau_1(Q)<\infty\},\quad Q_0>0.$$

Kai yra patenkintos nurodytos sąlygos, (1) lygtis yra normaliai išsprendžiama sveikų funkcijų klasėje $[1-\alpha,\ Q_0^{1-\alpha}:(1-\alpha))$. Jei papildomai laikoma, kad $\overline{\lim_{k\to\infty}}(n_k:k)=\alpha_1<\alpha$, tai (1) lygtis yra normaliai išsprendžiama platesnėje funkcijų klasėje.

NORMALLY SOLVABLE OPERATORS AND DIFFERENTIAL EGUATIONS OF INFINITE ORDER

J. Korobeinik

(*Summary*)

In the present paper the author investigates the equation

$$y(x)+\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)}(x)=f(x), \qquad P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s, \tag{1}$$

where

$$\sup_{k\geqslant 1} \frac{n_k}{k}=\alpha<1,$$

$$\tau_1(Q)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k|\, Q^{k-s}\, \frac{s!^{\frac{1}{1-\alpha}}}{[\alpha k]!^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

and

$$Q_0=\sup\{Q:\tau_1(Q)<\infty\}, \quad Q_0>0.$$

The author shows that under these conditions the equation (1) is normally solvable in the class of entire functions $\left[1-\alpha,\ Q_0^{1-\alpha}:(1-\alpha)\right)$. It to assume further that $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(n_k:k)=\alpha_1<\alpha$ the class of normal solvability is extended.