1971

УДК 511

О ζ-ФУНКЦИИ ГЕККЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ. I

А. Матуляускас

§ 1. Введение

В данной работе доказано, что остаточный член приближенного функционального уравнения ζ-функции Гекке вещественного квадратичного поля $K(\sqrt{d})$ $(d>0)$ не превосходит величины

$$O\left\{X^{\frac{1}{2}-\sigma}\ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|)\right\}. \tag{1.1}$$

Основная мысль доказательства состоит в применении второй теоремы о среднем для оценки функции Макдональда $K_{\nu i-1}$. Отметим, что оценка (1.1) совпадает с соответствующей оценкой для ζ-функции Гекке мнимого квадратичного поля [2], а при $\nu\ll 1$ имеет тот же порядок, что и остаточный член приближенного функционального уравнения ζ-функции Дедекинда вещественного квадратичного поля [6].

Оценка модуля ζ-функция Гекке на половиной прямой используется в доказательстве плотностной теоремы. В работе показано, что при $V\geqslant 1$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it, \Xi, \mathfrak{R}\right)\ll V^{\frac{11}{26}}, \tag{1.2}$$

где V равно $\sqrt{4t^2+m^2g^2}$ или $\sqrt{|4t^2-\nu^2|}$ в зависимости от того, будет ли рассматриваемое квадратичное поле мнимым или вещественным с $\nu\ll V$. Оценка (1.2) улучшает на $\frac{1}{70}$ результат, полученный К. Булотой [3].

§ 2. Улучшение оценки остаточного члена

Во всем дальнейшем будут употребляться следующие обозначения: $s=\sigma+it$ — комплексное переменное, $\mathfrak{m}\neq 0$ — целый идеал вещественного квадратичного поля, $\eta>1$ — основная единица поля $\bmod\ \mathfrak{m}$, m — целое рациональное число, $\nu=\frac{2\pi m}{\ln\eta}$, $K_{\nu i-1}$ — функция Макдональда порядка $\nu i-1$, $V=\sqrt{|4t^2-\nu^2|}$, $L\geqslant\sqrt{V}$, $L_1-L=O(\sqrt{V})$.

Лемма 1. *При $z\to\infty$ справедливо неравенство*

$$\int_L^{L_1} z^{2-2s+k}K_{\nu i-1}\left\{z\exp\frac{n\pi i}{2}\right\}dz\ll$$

$$\ll\exp\left\{-\frac{\pi}{2}|\nu|(1-|n|)\right\}[L_1^{2-2\sigma+k}+L^{2-2\sigma+k}]\ln(e+|\nu|), \tag{2.1}$$

где k — целое рациональное число, а $n=-1,\ 0,\ 1$.

Доказательство. Ввиду соотношения $K_{\nu i}=K_{-\nu i}$ достаточно рассмотреть случай $\nu \geqslant 1$. Имеем

$$K_{\nu i-1}\left\{z \exp \frac{n\pi i}{2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty \exp\left(-\frac{n\pi i}{2}\right)} u^{-\nu i} \exp\left\{-\frac{z}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right) \exp \frac{n\pi i}{2}\right\} du. \tag{2.2}$$

Пусть $n=0$. Полагая $u=-iy$ и применяя теорему Коши, находим

$$K_{\nu i-1}(z)=-\frac{i}{2} \exp\left\{-\frac{\pi\nu}{2}\right\}\left[\int\limits_{\mathfrak{B}}+\int\limits_{\frac{1}{\nu}}^{\nu}+\int\limits_{\nu}^{\nu+i\infty}\right] \times$$

$$\times y^{-\nu i} \exp\left\{\frac{zi}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)\right\} dy=I_1+I_2+I_3,$$

где $\mathfrak{B}$ обозначает кривую $\frac{\nu+iy}{\nu^2+y^2}$ $(\infty<y\leqslant 0)$. Очевидно

$$I_1+I_3 \ll \frac{1}{z}.$$

Далее, по второй теореме о среднем для $|\nu-z| \geqslant \sqrt{z}$ получаем

$$I_2 \ll \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

Если $|\nu-z|<\sqrt{z}$, то вторую теорему о среднем применяем к подынтервалам

$$2^j \sqrt[4]{\nu} \leqslant |\nu-z|<\min\{2^{j+1} \sqrt[4]{\nu},\ \sqrt{\nu}\} \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ P),$$

где P — целая часть числа $\frac{\ln \nu}{4 \ln 2}$, что приводит к оценке

$$\int\limits_{\sqrt[4]{\nu} \leqslant |\nu-z|<\sqrt{\nu}} z^{2-2s+k} K_{\nu i-1}(z)\, dz \ll \exp\left\{-\frac{\pi\nu}{2}\right\}[L_1^{2-2\sigma+k}+L^{2-2\sigma+k}] \ln (e\cdot$$

Отсюда, замечая, что при $|\nu-z|=o(\sqrt[3]{\nu})$ имеет место оценка

$$K_{\nu i-1}(z) \ll \frac{1}{\sqrt[3]{\nu}} \exp\left\{-\frac{\pi\nu}{2}\right\},$$

заключаем

$$\int\limits_{L}^{L_1} z^{2-2s+k} K_{\nu i-1}(z)\, dz \ll \exp\left\{-\frac{\pi\nu}{2}\right\}[L_1^{2-2\sigma+k}+L^{2-2\sigma+k}] \ln (\tag{2.3}$$

Пусть теперь $n=\pm 1$. Из теоремы Коши и (2.2) следует

$$K_{\nu i-1}(\pm iz)=\frac{1}{2}\left[\int\limits_{1}^{\nu}+\int\limits_{\nu}^{\nu\mp i\infty}\right](u^{-\nu i}+u^{\nu i-2}) \exp\left\{\mp\frac{zi}{2}\left(\qquad\right)\right\} du.$$

Ограничимся рассмотрением интеграла

$$\left[\int\limits_{1}^{\nu}+\int\limits_{\nu}^{\nu+i\infty}\right] u^{-\nu i} \exp\left\{\frac{zi}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\right\} du=I_4+I_5,$$

так как в других случаях интегралы оцениваются аналогично. Полагая $I_4 = I_{41} + I_{42}$, где I_{41} обозначает часть интеграла I_4, для которой

$$\left| \frac{z}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right) - \frac{\nu}{u} \right| < \sqrt{z}$$

и применяя к I_{42} вторую теорему о среднем, будем иметь $I_4 \ll \frac{1}{\sqrt{z}}$ вследствие того, что $I_{41} \ll \frac{1}{\sqrt{z}}$. Поскольку $I_5 \ll \frac{1}{z}$, то

$$\int_L^{L_1} z^{2-2s+k} K_{\nu i-1}(\pm iz)\,dz \ll L_1^{2-2\sigma+k} + L^{2-2\sigma+k}. \tag{2.4}$$

Соединение оценок (2.3) и (2.4) дает лемму.

Теорема 1. *Остаточный член приближенного функционального уравнения ζ-функции Гекке вещественного квадратичного поля* (см. [1]) *не превосходит величины*

$$O\left\{ X^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln(e + |2t + \nu|) \ln(e + |2t - \nu|) \right\},$$

причем оценка равномерна по всем параметрам при фиксированных $\mathfrak{m}$ *и дискриминанте* $d > 0$.

Теорема доказывается такими же рассуждениями, какие мы проводили в доказательствах лемм 10 и 11 из [1], только на этот раз для аналитического продолжения используется формула, содержащая функции $K_{\nu i-1}$ и $K_{\nu i}$, а леммы 4 и 9 из [1] заменяются леммой 1 и оценкой

$$\int_L^{L_1} z\,dz \int_0^z w^{1-2s+2N} K_{\nu i}(\pm iz)\,dz \ll X^{-\frac{1}{2}} L_1^{3-2\sigma+2N} \ln(e + |2t| + |\nu|), \tag{2.5}$$

соответственно, причем оценка (2.5) получается по схеме вполне аналогичной доказательству леммы 7 из [1], если за пути интегрирования взять полуокружности, соединяющие 0 с L и L_1.

§ 3. Оценка функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it,\ \Xi,\ \mathfrak{R}\right)$

Лемма 2 (Ван дер Корпут). *Пусть* $f(x)$ *действительна и непрерывна со своими производными до* q*-го порядка* ($q \geqslant 2$), $b - a \geqslant 1$ *и* $Q = 2^{q-1}$. *Пусть, далее*

$$\lambda_q \leqslant f^{(q)}(x) \leqslant h\lambda_q.$$

Тогда

$$\sum_{a<n\leqslant b} \exp\{2\pi i f(n)\} = O\left\{ h^{\frac{2}{Q}} (b-a) \lambda_q^{\frac{1}{2(Q-1)}} \right\} + O\left\{ (b-a)^{1-\frac{2}{Q}} \lambda_q^{-\frac{1}{2(Q-1)}} \right\}.$$

Доказательство леммы приведено в книге [4].

Лемма 3. *Пусть* Ξ *— характер Гекке модуля* $\mathfrak{m}$ *показателя* m, $\mathfrak{R}$ *— класс идеальных чисел вещественного квадратичного поля,* α *— целое идеальное число,* $N\alpha$ *— норма числа* α, t *— вещественное число,* $\nu = \frac{2\pi m}{\ln \eta}$. *Тогда при* $|2t| + |\nu| \to \infty$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R},\ \alpha \neq 0 \\ |N\alpha| < X}}^{*} \Xi(\alpha) |N\alpha|^{-it} \ll \Delta^u X, \tag{3.1}$$

где $*$ обозначает, что при суммировании из каждой системы ассоциированных чисел берется только по одному представителю,

$$X \geqslant 1, \quad u = \min\left\{ \frac{-2Q^2-5Q+8}{4-3Q}, \ \frac{2Q^2-5Q+4}{Q} \right\}, \tag{3.2}$$

$q \geqslant 1$ — натуральное число, $Q = 2^{q-1}$, а Δ равно

$$\left[X^{-\frac{q}{2}}(|2t|+|\nu|)\right]^{Q[2uQ(Q-1)+3Q-4]^{-1}}$$

или

$$\left[(|2t|+|\nu|)^{-1} X^{\frac{q}{2}-2+\frac{2}{Q}}\right]^{[2u(Q-1)+1]^{-1}} \tag{3.3}$$

в зависимости от того, имеет ли место неравенство

$$|2t|+|\nu| \geqslant X^{\frac{q}{2}-1+\frac{2uQ-Q+4}{2Q(Qu+1)}}$$

или нет.

Доказательство. Оцениваемую сумму обозначим через W. Если γ — целое идеальное число класса $\mathfrak{K}^{-1}$, взаимно простое с идеалом $\mathfrak{m}$ и α пробегает все целые идеальные числа класса $\mathfrak{K}$, то $\alpha\gamma$ пробегает все целые числа идеала (γ). Отсюда, вводя обозначение $\alpha\gamma = \beta$, получаем

$$W = \bar{\Xi}(\gamma)|N\gamma|^{it} \sum_{\substack{(\gamma)\backslash\beta \\ |N\gamma| \leqslant |N\beta| < X|N\gamma|}}^{*} \Xi(\beta)|N\beta|^{-it},$$

так что оценка суммы W сводится к оценке

$$S = \sum_{\substack{(\gamma)\backslash\beta \\ |N\gamma| \leqslant |N\beta| < Z}}^{*} \Xi(\beta)|N\beta|^{-it},$$

где $Z = |N\gamma|X$.

Как известно [5], каждое число β поля $K(\sqrt{d})$ единственным образом представляется в форме

$$\beta = \sqrt{|N\beta|}\, e^{\varphi(\beta)} \operatorname{sgn} \beta$$

с полярным углом $\varphi(\beta)$, равным удвоенной площади единичного гиперболического сектора. Пользуясь этим и учитывая, что суммирование в (3.4) идет по всем целым неассоциированным числам β идеала (γ) под условием $|N\gamma| \leqslant |N\beta| < Z$, находим

$$S = \left(\sum_{\beta \in M_0} + \sum_{\beta \in M_1} + \sum_{\beta \in M_2} + \sum_{\beta \in M_3} \right) \Xi(\beta)|N\beta|^{-it},$$

где M_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ обозначает совокупность целых чисел идеала (γ), удовлетворяющих неравенствам

$$|N\gamma| \leqslant (-1)^j N\beta < Z, \quad \beta \operatorname{sgn}\left(j - \frac{3}{2}\right) > 0, \quad 0 \leqslant \varphi(\beta) < \varphi(\varepsilon),$$

а ε — основная единица поля $K(\sqrt{d})$. Согласно принципу симметрии достаточно оценить сумму

$$U = \sum_{\beta \in M_0} \Xi(\beta)|N\beta|^{-it}.$$

Пусть ϑ – целое число поля $K(\sqrt{d})$. Обозначим через ω_1, ω_2 базис идеала $\mathfrak{m}(\gamma)$ и заметим, что, заставляя в выражении $x\omega_1+y\omega_2+\vartheta$ пробегать x и y независимо друг от друга все целые рациональные числа, мы получим все числа идеала (γ), сравнимые с ϑ по $\bmod\,\mathfrak{m}$ точно один раз. Ввиду этого числа области M_2, имеющие вид $x\omega_1+y\omega_2+\vartheta$ определяют на плоскости $x0y$ двумерную решетку $H(\vartheta)$ целых точек трапеции с гиперболическими основаниями. Отсюда, пользуясь определением характера Гекке и тем, что согласно одной теореме Ландау [7] в качестве представителей классов вычетов по $\bmod\,\mathfrak{m}$ можно выбрать вполне положительные числа, выводим

$$U=\sum_{\vartheta\succ 0}\chi(\vartheta)\sum_{(x;\,y)\in H(\vartheta)}\exp\{iF(x,\,y,\,\vartheta)\},\tag{3.5}$$

где

$$F(x,\,y,\,\vartheta)=\frac{\nu}{2}\ln\frac{\beta}{\beta'}-t\ln\beta\beta',\quad \beta=x\omega_1+y\omega_2+\vartheta,$$

β' – число, сопряженное с β, ϑ пробегает полную систему вычетов по $\bmod\,\mathfrak{m}$, символ $\succ 0$ обозначает вполне положительное число и сумма $\sum\limits_{(x;\,y)\in H(\vartheta)}$ распространяется на все точки решетки $H(\vartheta)$. Простой подсчет показывает, что

$$\frac{\partial^q F(x,\,y,\,\vartheta)}{\partial x^q}=(-1)^q(q-1)!\left\{\left(\frac{\omega_1}{\beta}\right)^q\left(t-\frac{\nu}{2}\right)+\left(\frac{\omega_1'}{\beta'}\right)^q\left(t+\frac{\nu}{2}\right)\right\},$$

откуда, вводя полярные координаты

$$\frac{\omega_1}{\beta}=\sqrt{\left|N\frac{\omega_1}{\beta}\right|}\,e^{\varphi}\operatorname{sgn}\frac{\omega_1}{\beta},\quad \frac{\omega_1'}{\beta}=\sqrt{\left|N\frac{\omega_1}{\beta}\right|}\,e^{-\varphi}\operatorname{sgn}\frac{\omega_1'}{\beta'}$$

и полагая $V=\sqrt{|4t^2-\nu^2|}$

$$\operatorname{ch}\psi=\frac{\max\{|2t|,\,|\nu|\}}{V},\quad \operatorname{sh}\psi=\frac{\min\{|2t|,|\nu|\}}{V}\,(-1)^{\frac{\operatorname{sgn}t+\operatorname{sgn}\nu}{2}},$$

получаем

$$\frac{\partial^q F(x,\,y,\,\vartheta)}{\partial x^q}=\pm(q-1)!\,V\left|N\frac{\omega_1}{\beta}\right|^{\frac{q}{2}}\Lambda(\varphi,\,\psi),$$

где

$$\Lambda(\varphi,\,\psi)=\begin{cases}\operatorname{ch}(q\varphi+\psi), & \text{если}\ \operatorname{sgn}[|2t|-|\nu|]\,N\frac{\omega_1}{\beta}=1,\\ \operatorname{sh}(q\varphi+\psi), & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Так как $\operatorname{ch}(q\varphi+\psi)\asymp\operatorname{ch}(q\varphi+\psi)$ при $\psi\to\infty$, то худшим будет второй случай. Поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$\Lambda(\varphi,\,\psi)=\operatorname{sh}(q\varphi+\psi).$$

Возьмем положительное число Δ под условием $1>\Delta^u\gg\frac{1}{\sqrt{Z}}$ $(u>1)$ и с его помощью представим сумму (3.5) в виде

$$U=\sum_{\vartheta\succ 0}\chi(\vartheta)\sum_{n=1}^{4}U_n,\tag{3.6}$$

где

$$U_n = \sum_{(x;\, y)\in H_n} \exp\{iF(x,\, y,\, \vartheta)\},$$

а

$$H_1 = \{(x;\; y)\in H(\vartheta): |N\gamma| \leqslant N\beta < \Delta^u Z\},$$

$$H_2 = \{(x;\; y)\in H(\vartheta): N\beta \geqslant \Delta^u Z,\;\; |\operatorname{sh}(q\varphi+\psi)| < \Delta^u\},$$

$$H_3 = \{(x;\; y)\in H(\vartheta): N\beta \geqslant \Delta^u Z,\;\; \Delta^u \leqslant |\operatorname{sh}(q\varphi+\psi)| < \Delta\},$$

$$H_4 = \{(x;\; y)\in H(\vartheta): N\beta \geqslant \Delta^u Z,\;\; |\operatorname{sh}(q\varphi+\psi)| \geqslant \Delta\}.$$

Сумма U_1 оценивается тривиально как сумма модулей своих членов:

$$U_1 \ll \Delta^u Z. \tag{3.7}$$

Далее, ввиду соотношения $\Delta^u \gg \frac{1}{\sqrt{Z}}$ число целых точек решетки H_2 не превосходит $O(\Delta^u Z)$, так что

$$U_2 \ll \Delta^u Z. \tag{3.8}$$

Обратимся к оценке суммы U_3. Пусть P — целое положительное число под условием $P < -\frac{u \ln \Delta}{\ln 4} \leqslant P+1$. Обозначим через H_{3j} $(j=0,\ 1,\ \ldots,\ P)$ часть решетки H_3, определенную неравенствами

$$4^j \Delta^u Z \leqslant N\beta < Z \min\{4^{j+1}\Delta^u,\ 1\}.$$

Тогда

$$U_3 = \sum_{j=0}^{P} \sum_{y_{jk}} \sum_{A_{jk}\leqslant x\leqslant B_{jk}} \exp\{iF(x,\, y_{jk},\, \vartheta)\},$$

где

$$A_{jk} = \min\{x: (x;\; y_{jk})\in H_{3j}\},\quad B_{jk} = \max\{x: (x;\; y_{jk})\in H_{3j}\}$$

и сумма $\sum\limits_{y_{jk}}$ распространяется на все различные ординаты точек решетки H_{3j}. Заметив, что число точек $(x;\ y)$ решетки H_{3j}, для которых $(x\pm 1;\ y)\,\overline{\in}\, H_{3j}$, оценивается величиной $O(2^{j+1}\sqrt{\Delta^u Z})$, будем иметь

$$U_3 \ll \sum_{j=0}^{P} \sum_{y_{jk}} \sum_{A_{jk}\leqslant x\leqslant B_{jk}}{}' \exp\{iF(x,\, y_{jk},\, \vartheta)\}, \tag{3.9}$$

где штрих указывает, что при суммировании числа x под условием $(x\pm 1;\ y_{jk})\,\overline{\in}\, H_{3j}$ исключаются. К внутренней сумме (3.9) применима лемма Ван дер Корпута, так как в области H_{3j} имеет место оценка

$$\frac{C_1 V\Delta^u}{(2^{j+1}\sqrt{\Delta^u Z})^q} \leqslant \left|\frac{\partial^q F(x,\, y_{jk},\, \vartheta)}{\partial x^q}\right| \leqslant \frac{C_2 V\Delta}{(2^j \sqrt{\Delta^u Z})^q}.$$

Здесь C_1 и C_2 — некоторые положительные постоянные. Таким образом

$$\sum_{A_{jk}\leqslant x\leqslant B_{jk}}{}' \exp\{iF(x,\, y_{jk},\, \vartheta)\} \ll \Delta^{\frac{2(1-u)}{Q}} (B_{jk}-A_{jk}) \times$$

$$\times \left[\frac{V\Delta^u}{(2^{j+1}\sqrt{\Delta^u Z})^q}\right]^{\frac{1}{2(Q-1)}} + (B_{jk}-A_{jk})^{1-\frac{2}{Q}} \left[\frac{V\Delta^u}{(2^{j+1}\sqrt{\Delta^u Z})^q}\right]^{-\frac{1}{2(Q-1)}}.$$

Подставляя эту оценку в (3.9), получим

$$U_3 \ll \sum_{j=0}^{P} \left\{ \Delta^{\frac{2(1-u)}{Q}} 4^{j+1} \Delta^u Z \left[\frac{V\Delta^u}{(2^{j+1}\sqrt{\Delta^u Z})^q} \right]^{\frac{1}{2(Q-1)}} + \right.$$

$$\left. + (2^{j+1}\sqrt{\Delta^u Z})^{1-\frac{2}{Q}} \left[\frac{V\Delta^u}{(2^{j+1}\sqrt{\Delta^u Z})^q} \right]^{-\frac{1}{2(Q-1)}} \right\},$$

вследствие того, что число целых точек решетки $H_{3j} \ll 4^{j+1} \Delta^{\frac{3u}{2}} Z$. Отсюда заключаем, что

$$U_3 \ll \Delta^{1+\frac{2(1-u)}{Q}+\frac{u}{2(Q-1)}} V^{\frac{1}{2(Q-1)}} Z^{1-\frac{q}{4(Q-1)}} +$$

$$+ \Delta^{1-\frac{2}{Q}-\frac{u}{2(Q-1)}} V^{-\frac{1}{2(Q-1)}} Z^{1-\frac{1}{Q}+\frac{q}{4(Q-1)}}. \tag{3.10}$$

Остается рассмотреть сумму U_4. Будем различать два возможных соотношения $|2t|+|\nu| = O(V)$ и $|2t|-|\nu| = o(|2t|+|\nu|)$. В первом случае сумма U_4 оценивается совершенно аналогично предыдущей сумме и для нее имеет место следующая оценка:

$$U_4 \ll \Delta^{\frac{4-3Q}{2Q(Q-1)}} V^{\frac{1}{2(Q-1)}} Z^{1-\frac{q}{4(Q-1)}} +$$

$$+ \Delta^{-\frac{1}{2(Q-1)}} V^{-\frac{1}{2(Q-1)}} Z^{1-\frac{1}{Q}+\frac{4}{4(Q-1)}}. \tag{3.11}$$

Положим

$$u = \min \left\{ \frac{-2Q^2-5Q+8}{4-3Q}, \frac{2Q^2-5Q+4}{Q} \right\}.$$

Тогда

$$1+\frac{2(1-u)}{Q}+\frac{u}{2(Q-1)} \geqslant \frac{4-3Q}{2Q(Q-1)}, \quad 1-\frac{2}{Q}-\frac{u}{2(Q-1)} \geqslant -\frac{1}{2(Q-1)}$$

и, следовательно, правая часть соотношения (3.10) не превосходит оценки (3.11). Соединяя оценки, полученные в (3.7), (3.8), (3.11) и учитывая (3.6), находим

$$U \ll \Delta^u Z, \tag{3.12}$$

где

$$\Delta = \begin{cases} \left(Z^{-\frac{q}{2}} V\right)^{Q[2uQ(Q-1)+3Q-4]^{-1}}, & \text{если} \quad V \geqslant Z^{\frac{q}{2}-1+\frac{2uQ-Q+4}{2Q(Qu+1)}}, \\ \left(V^{-1} Z^{\frac{q}{2}-2-\frac{2}{Q}}\right)^{[2u(Q-1)+1]^{-1}} & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Если $|2t|-|\nu| = o(|2t|+|\nu|)$ при $V \to \infty$, то сумма U_4 разбивается на две части

$$U_4 = U_{41} + U_{42},$$

где U_{41} обозначает суммирование по тем точкам решетки H_4 для которых $\Delta \leqslant |\mathrm{sh}(q\varphi+\psi)| \leqslant C(q)$ $\left(C(q) = e^{q(\varphi)}\right)$, а U_{42} – по остальным точкам решетки H_4.

Для суммы U_{41} имеет место оценка (3.12), так как в этом случае $|2t|+|\nu| \ll V$.

Обратимся к оценке суммы U_{42}. Положим

$$H_5=\{(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\in H_4: |\operatorname{sh}(q\varphi+\psi)|>C(q)\}$$

и заметим, что в решетке H_5 выполняется неравенство

$$|\operatorname{sh}(q\varphi+\psi)|>c(q)\operatorname{ch}\psi,$$

где $c(q)$ – положительная постоянная. Разбив решетку H_5 на подрешетки H_{5j} так, как мы это делали при оценке суммы U_3, убеждаемся, что в подрешетке H_{5j} справедливо неравенство

$$C_3\ \frac{|2t|+|\nu|}{(2^{j+1}\sqrt{\Delta^u Z})^q}\leqslant\left|\ \frac{\partial^q F(x,\ y,\ \vartheta)}{\partial x^q}\ \right|\leqslant C_4\ \frac{|2t|+|\nu|}{(2^j\sqrt{\Delta^u Z})^q}$$

(C_3 и C_4 – некоторые положительные постоянные). Отсюда и из леммы Ван дер Корпута следует

$$Z^{-1}U_{42}\ll\Delta^{\frac{4-3Q}{2Q(Q-1)}}\left[Z^{-\frac{q}{2}}(|2t|+|\nu|)\right]^{\frac{1}{2(Q-1)}}+$$
$$+\Delta^{-\frac{1}{2(Q-1)}}\left[(|2t|+|\nu|)^{-1}Z^{\frac{q}{2}-2+\frac{2}{Q}}\right]^{\frac{1}{2(Q-1)}}. \qquad (3.14)$$

Так как для $|\operatorname{sh}(q\varphi+\psi)|<C(q)$ $|2t|+|\nu|=O(V)$, то в (3·13) V можно заменить на $|2t|+|\nu|$. Таким образом во всяком случае

$$S\ll\Delta^u Z,$$

где Δ и u имеют значения, указанные в (3.2) и (3.3). Поскольку $X|N\gamma|=Z$, то лемма доказана.

Теорема 2. *Если* $V\geqslant 1$, $\nu\ll V$, *то*

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{K}\right)\ll V^{\frac{11}{26}}.$$

Доказательство. Пусть $X=Y=\dfrac{\sqrt{dN\mathfrak{m}}}{4\pi}V$. Тогда, используя теорему 1, можно записать приближенное функциональное уравнение из [1] следующим образом:

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{K}\right)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{K},\ \alpha\neq 0\\ |N\alpha|<X}}^{*}\Xi(\alpha)|N\alpha|^{\frac{1}{2}+it}+$$
$$+\psi\left(\frac{1}{2}+it\right)\sum_{\substack{\beta\in\mathfrak{K}',\ \beta\neq 0\\ |N\beta|<X}}^{*}\Xi(\beta)|N\beta|^{\frac{1}{2}-it}+O\{\ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|)\}.$$

При фиксированных d и $\mathfrak{m}$ $\psi\left(\frac{1}{2}+it\right)\ll 1$, по этому суммируя по Абелю, получаем оценку

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{K}\right)\ll\int_1^V\frac{S(w)\,dw}{w^{3/2}}+V^{-\frac{1}{2}}S(V),$$

где

$$S(w) = \Big| \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{K},\, \alpha \neq 0 \\ |N\alpha| < w}}^{*} \Xi(\alpha) \, |N\alpha|^{-it} \Big|.$$

Отсюда на основании леммы 3 заключаем, что

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{K}\right) \ll V^{\frac{11}{26}}.$$

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 15.XII.1970

Литература

1. А. Матуляускас, Приближенное функциональное уравнение ζ-функции Гекке вещественного квадратичного поля, Лит. матем. сб., IX, 2 (1969), 291–319.
2. К. Булота, О приближенном функциональном уравнении Z-функций Гекке, Лит. матем. сб., IV, 2 (1964), 183–196.
3. К. Булота, О Z-функциях Гекке и распределении простых чисел мнимого квадратичного поля, Лит. матем. сб., IV, 3 (1964), 309–326.
4. Е. К. Титчмарш, Теория дзета-функции Римана, Москва, 1963.
5. Г. Хассе, Лекции по теории чисел, Москва, 1953.
6. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, The approximate functional equation for a class of zeta–functions, Math. Ann., 152 (1963), 30–64.
7. E. Landau, Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Math. Zeitschrift, 2 (1918), 52–154.

APIE REALAUS KVADRATINIO SKAIČIŲ KŪNO HEKĖS ζ-FUNKCIJĄ. I

A. Matuliauskas

(*Reziumė*)

Darbe parodyta, kad realaus kvadratinio skaičių kūno Hekės ζ-funkcijai egzistuoja artutinė funkcionalinė lygtis, kurios liekamasis narys ne didesnis už

$$O\left\{ X^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|) \right\}.$$

Naudojantis šia lygtimi ir 3 lema, įrodoma teorema:

jei $V=\sqrt{|4t^2-\nu^2|}\geqslant 1,\ \nu \ll V,$ *tai*

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\ \Xi,\ \mathfrak{K}\right) \ll V^{\frac{11}{26}}.$$

ÜBER DIE HECKESCHE ZETAFUNKTION DES REEL-QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPERS. I

A. Matuliauskas

(*Zusammenfassung*)

In der vorliegenden Arbeit ist eine approximative Funktionalgleichung für Heckesche Zetafunktion des reel-quadratischen Zahlkörpers mit dem Fehlerglied

$$O\left\{ X^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln(e+|2t+\nu|)\ln(e+|2t-\nu|) \right\}$$

hergeleitet. Mit Hilfe dieser Funktionalgleichung und des Hilfsatzes 3 ist der folgende Satz bewiesen.

Für $V=\sqrt{|4t^2-\nu^2|}\geqslant 1,\ \nu \ll V$ *gilt*

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\ \bar{\Xi},\ \mathfrak{K}\right) \ll V^{\frac{11}{26}}.$$