1971

УДК 519.21

ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ С БОЛЬШИМИ УКЛОНЕНИЯМИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Э. В. Мисевичюс

§ 1. Формулировка результатов

Пусть задана однородная цепь Маркова $\{\xi_j, j=1, 2, \ldots, n\}$ с пространством возможных состояний Ω, выделенной на нем σ-алгеброй подмножеств $\mathcal{F}$, вероятностной функции перехода за один шаг $P(\omega, A)$, $\omega\in\Omega$, $A\in\mathcal{F}$, и стационарным начальным распределением $P(A)$, $A\in\mathcal{F}$.

Рассматриваются случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, связанные в цепь Маркова $\{\xi_j, j=1, 2, \ldots, n\}$, т. е. $X_j=X(\xi_j)$, где $X(\omega)$ – какая-нибудь действительная $\mathcal{F}$-измеримая функция, определенная на Ω. Предположим, что

$$MX_1=0, \qquad DX_1<\infty.$$

Определим коэффициент эргодичности

$$\alpha=1-\sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} |P(\omega, A)-P(\tilde{\omega}, A)|.$$

Известно, что при $\alpha>0$

$$\sup_{\omega, A} |P^{(n)}(\omega, A)-P(A)|\leqslant(1-\alpha)^n, \tag{1}$$

где $P^{(n)}(\omega,A)$ – вероятностная функция перехода за n шагов. Функцию распределения какой-либо случайной величины ξ обозначим F_ξ, соответствующую плотность-p_ξ, характеристическую функцию-f_ξ; Φ и φ обозначают $(0,1)$ – нормальную функцию распределения и плотность вероятности, соответственно. Кроме того, пусть

$$f_\xi(t\mid\mathcal{F})=M\{e^{it\xi}\mid\mathcal{F}\}.$$

Положим

$$S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad S_{kl}=\sum_{j=k+1}^{l} X_j, \qquad 1\leqslant k<l\leqslant n, \qquad Z_n=\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}},$$

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{MS_n^2}{n}.$$

Везде $\rho(n)$ обозначает монотонную как угодно медленно возрастающую функцию натурального аргумента и $\lim_{n\to\infty}\rho(n)=\infty$. Положительные конечные постоянные мы будем обозначать через B, C, η, ε с индексами или без них. Ограниченность случайной величины будем понимать в смысле с вероятностью 1. Кроме того, символом $[x]$ обозначим целую часть числа x.

Сформулируем условия, которые будут встречаться в теоремах.

Условие А. *Существует ограниченная условная плотность* $p_{X_2}(x/\xi_1, \xi_3)$.

Условие Б. *Существует конечная постоянная* $a > 0$ *такая, что*

$$M\{e^{a|X_2|^{\frac{4\beta}{1+2\beta}}} | \xi_1\} < \infty, \qquad 0 < \beta \leqslant \frac{1}{2}.$$

Известно (см. [8], стр. 643), что при $\alpha > 0$

$$DS_n \geqslant \frac{n\alpha}{32} DX_1.$$

Согласно условию А

$$\sigma^2 > 0$$

и для краткости вычислений положим $\sigma^2 = 1$.

Теорема 1. *Если* $\alpha > 0$, *выполнены условия* А *и* В *с* $\beta = \frac{1}{2}$, *то при* $1 \leqslant x \leqslant \leqslant o(\sqrt{n})$, $n \to \infty$, *и некотором конечном* s, $s = 1, 2, \ldots$, *имеют место соотношения*

$$p_{Z_n}(x) = \varphi(x) e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left\{1 + P_{s-1}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + B\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right\}, \tag{2}$$

$$p_{Z_n}(-x) = \varphi(x) e^{-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left\{1 + P_{s-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \right.$$

$$\left. + B\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right\}, \tag{3}$$

где $\lambda(t)$*-степенной ряд Крамера, сходящийся в некоторой окрестности нуля,* $P_s(x, y)$ *— полином* s*-ой степени двух аргументов* x *и* y.

Построение ряда $\lambda(t)$ и полинома $P_s(x, y)$ будет указано в дальнейшем.

Теорема 2. *Если* $\alpha > 0$, *выполнены условия* А *и* Б *с* $0 < \beta < \frac{1}{6}$, *то при* $0 \leqslant x \leqslant \frac{n^\beta}{\rho(n)}$, $n \to \infty$, *имеют место соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{Z_n}(x)}{\varphi(x)} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{Z_n}(-x)}{\varphi(x)} = 1.$$

Теорема 3. *Если* $\alpha > 0$, *выполнены условия* А *и* В *с* $\frac{1}{6} \leqslant \beta < \frac{1}{2}$, *то при* $0 \leqslant x \leqslant \frac{n^\beta}{\rho(n)}$, $n \to \infty$, *имеют место соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{Z_n}(x)}{\varphi(x) e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda^{[s]}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{Z_n}(-x)}{\varphi(x) e^{-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda^{[s]}\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}} = 1,$$

где $\lambda^{[s]}(t)$ — отрезок ряда Крамера,

$$\lambda^{[s]}(t)=\sum_{j=0}^{s}\lambda_j t^j,$$

а целое число s определяется соотношением

$$\frac{1}{2}\,\frac{s+1}{s+3}\leqslant\beta<\frac{1}{2}\,\frac{s+2}{s+4}\,.$$

Функция концентрации случайной величины X определяется

$$Q_X(\lambda)=\sup_x P\{x\leqslant X\leqslant x+\lambda\},\qquad \lambda>0.$$

Теорема 4. *Если $\alpha>0$, то для любых положительных чисел λ и L, $\lambda\leqslant\leqslant L$, при $n\to\infty$ имеет место соотношение*

$$Q_{S_n}(L)\leqslant\sqrt{\frac{\rho(n)}{n}}\,\frac{CL}{\lambda\sqrt{1-Q_{X_1}(\lambda)}}\,,\qquad C=C(\alpha,\ F_{X_1}).$$

§ 2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Переходной характеристической функцией $f_{X_k}(t,\ \omega,\ A)$ случайной величины X_k назовем функцию

$$f_{X_k}(t,\ \omega,\ A)=\int_A e^{itX_k(\tilde\omega)}P(\omega,\ d\tilde\omega),\quad \omega\in\Lambda,\ A\in\mathscr{F}.$$

Из свойств, которыми обладает функция $f_{X_k}(t,\ \omega,\ A)$, мы назовем два из них:

1) функция $f_{X_k}(t,\ \omega,\ A)$ при фиксированных t и ω является комплекснозначной мерой на σ-алгебре $\mathscr{F}$;

2) она при фиксированных t и A является $\mathscr{F}$-измеримой функцией.

Переходную характеристическую функцию случайной величины S_{kl} определим

$$f_{S_{kl}}(t,\ \omega,\ A)=\int_\Omega\cdots\int_\Omega\int_A e^{it\sum_{j=k+1}^{l}X_j(\omega_j)}P(\omega,\ d\omega_{k+1})\times$$

$$\times\prod_{j=k+1}^{l-1}P(\omega_j,\ d\omega_{j+1}).$$

Отсюда следует основное равенство

$$f_{S_{jl}}(t,\ \omega,\ A)=\int_\Omega f_{S_{kl}}(t,\ \tilde\omega,\ A)f_{S_{jk}}(t,\ \omega\ d\tilde\omega),$$

справедливое для любых $1\leqslant j<k<l\leqslant n$.

Нам потребуются еще обозначения:

$$f_{X_1}(t,\ A)=\int\limits_{A} e^{itX_1(\omega)}P(d\omega),$$

$$f_{S_l}(t,\ A)=\int\limits_{\Omega} f_{S_{1l}}(t,\ \omega,\ A)f_{X_1}(t,\ d\omega),$$

$$f_{S_n}(t)=f_{S_n}(t,\ \Omega).$$

Для любого набора целых чисел $l_0,\ l_1,\ \ldots,\ l_N$, такого, что

$$4=l_0<l_1<\ \cdots\ <l_N\leqslant n,$$

$$l_j=l_{j-1}=\left[\frac{\rho_1(n)}{\alpha}\right]+2,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

$$N=\left[\frac{n-4}{\left[\frac{\rho_1(n)}{\alpha}\right]+2}\right],$$

справедливо неравенство

$$|f_{S_n}(t)|\leqslant\left\{\sup_{\omega} V\left(f_{S_{l_0l_1}}(t,\ \omega,\ \cdot),\ \Omega\right)\right\}^N \int\limits_{\Omega} |f_{S_4}(t,\ d\omega)|, \tag{4}$$

где $V\left(\mu(\cdot),\ \Omega\right)$ означает вариацию меры $\mu(\cdot)$ на множестве Ω. Далее, для любых целых чисел k и l, $1<k<l\leqslant n$, $l-k\geqslant 2$, получаем согласно (1)

$$\sup_{\omega} V\left(f_{S_{kl}}(t,\ \omega,\cdot),\ \Omega\right)\leqslant(1-\alpha)^{l-k-2}+M\,|f_{X_{l-1}}(t\,|\,\xi_{l-2},\ \xi_l)|. \tag{5}$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\Omega} f_{S_4}(t,\ d\omega)\,|\leqslant M\,|f_{X_1}(t/\xi_2)f_{X_3}(t/\xi_2,\ \xi_4)\,|. \tag{6}$$

Так как для каждого конечного вещественного числа a справедливо неравенство

$$|\,a\,|\leqslant 1-\frac{1}{2}(1-a^2),$$

то

$$M|f_{X_{l-1}}(t/\xi_{l-2},\ \xi_l)\,|\leqslant e^{-\frac{1}{2}\left(1-M\,|f_{X_{l-1}}(t/\xi_{l-2}),\ \xi_l)\,|^2\right)}. \tag{7}$$

Определим дисперсию комплекснозначной случайной величины Z

$$DZ=M\,|\,Z^2\,|-|\,MZ\,|^2=D\,\{\mathrm{Re}\,Z\}+D\,\{\mathrm{Im}\,Z\}$$

и применим одну лемму В. А. Статулявичуса (см. [8], лемма 2, стр. 638) к случайной величине

$$MD\,\{e^{itX_{l-1}}\,|\,\xi_{l-2},\ \xi_l\}=1-M\,|f_{X_{l-1}}(t\,|\,\xi_{l-2},\ \xi_l)\,|^2. \tag{8}$$

Согласно этой лемме

$$MD\,\{e^{itX_{l-1}}\,|\,\xi_{l-2},\ \xi_l\}\geqslant\frac{\alpha^2}{32}\left(1-|f_{X_1}(t)\,|^2\right). \tag{9}$$

В силу условия А существуют ограниченные плотности $p_{X_1}(x \mid \xi_2)$ и $p_{X_1}(x)$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta = \eta(\varepsilon)$, $0 < \eta < 1$, такое, что

$$1 - |f_{X_1}(t)|^2 \geqslant \eta, \qquad |t| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть для определенности в условии А

$$p_{X_3}(x \mid \xi_1, \xi_3) \leqslant C_1 < \infty. \tag{10}$$

Имеем согласно (10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M |f_{X_1}(t/\xi_2) f_{X_3}(t/\xi_2, \xi_4)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{X_1}(t \mid \xi_2)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{X_3}(t/\xi_2, \xi_4)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\pi C_1. \tag{11}$$

Окончательно из (4), (5), (6) и (11) находим

$$\int\limits_{|t| > \varepsilon} \left| f_{S_n}(t) \right| dt \leqslant B e^{-\frac{n}{\rho_1(n)} \eta_1}, \qquad \eta_1 = \eta_1(\alpha, \varepsilon).$$

По формуле обращения

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \varepsilon} e^{-i\sqrt{n}xt} f_{S_n}(t)\, dt + B e^{-\frac{n}{\rho_1(n)} \eta_1}. \tag{12}$$

В окрестности точки $t = 0$ применим спектральный метод разложения характеристической функции $f_{S_n}(t)$. С этой целью в пространстве $\mathscr{B}$ всех ограниченных $\mathscr{F}$-измеримых функций $g(\omega)$, $\omega \in \Omega$, с нормой

$$\| g \| = \sup_{\omega} | g(\omega) |$$

определим оператор

$$\left(P(z) g\right)(\omega) = \int\limits_{\Omega} e^{zX(\tilde{\omega})} g(\tilde{\omega}) P(\omega, d\tilde{\omega}), \quad \omega \in \Omega, \quad g \in \mathscr{B},$$

и обозначим

$$P = P(0).$$

Из теории операторов известно (см. [2], стр. 315), что резольвентный оператор оператора P

$$R(u) = \frac{P_1}{u-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P - P_1)^k}{u^{k+1}},$$

где оператор

$$P_1 g = \int\limits_{\Omega} g(\omega) P(d\omega), \qquad g \in \mathscr{B}.$$

Спектральное множество оператора P состоит из точки $u=1$ и круга с центром в точке $u=0$ и радиусом $1-\alpha$. Очевидно, что резольвентный оператор оператора $P(z)$

$$R(z, u)=\sum_{k=0}^{\infty} R(u)\left((P(z)-P)R(u)\right)^k$$

определен во множестве точек (z, u), где

$$\|P(z)-P\|<\frac{1}{\|R(u)\|}.$$

Согласно условию Б с $\beta=\frac{1}{2}$ и одной лемме (см. [4], стр. 391) при $|z|<a$

$$P^n(z)=\Lambda^n(z)P_1(z)+T_n(z),$$

где собственное значение оператора $P(z)$

$$\Lambda(z)=\frac{P_1P(z)P_1(z)\psi}{P_1P_1(z)\psi} \tag{13}$$

является аналитической функцией, операторы

$$P_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{I_1} R(z, u)\,du, \tag{14}$$

$$\|T_n(z)\|=Be^{-m\eta_2},\quad \eta_2=\eta_2(\alpha, a),$$

и функция

$$\psi(\omega)\equiv 1,\qquad \omega\in\Omega.$$

Интегрирование в (14) производится по окружности в резольвентном множестве с центром в точке 1 и радиусом $r_1=r_1(\alpha)$, $0<r_1<\alpha$. Так как при $|t|<a$

$$f_{S_n}(t)=\Lambda^n(it)\,C(it)+P_1T_n(it)\,\psi,$$

где функции

$$B(z)=P_1P(z)P_1(z)\psi \tag{15}$$

и

$$C(z)=P_1P_1(z)\psi \tag{16}$$

тоже являются аналитическими в силу условия Б с $\beta=\frac{1}{2}$, то, подобрав соответствующим образом $\varepsilon>0$, (12) мы можем записать в виде

$$p_{Z_n}(x)=\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\varepsilon} e^{-i\sqrt{n}\,xt}\,\Lambda^n(it)\,C(it)\,dt+Be^{-\frac{n}{\rho_1(n)}}\eta_1. \tag{17}$$

Обозначим

$$\frac{x}{\sqrt{n}}=\tau,\qquad 1\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{n}}{\rho_2(n)}, \tag{18}$$

$$K(z)=\ln\Lambda(z),\qquad K(0)=0. \tag{19}$$

Функция $K(z)$ является аналитической в области, где $\Lambda(z)$ аналитическая и не имеет нулей. Положим для простоты

$$\varkappa_k(z)=\frac{d^k}{dz^k}K(z), \qquad \varkappa_k=\varkappa_k(0), \qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{20}$$

Разложим в ряды функции

$$K(z)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\varkappa_k}{k!}z^k.$$

$$K'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varkappa_{k+1}}{k!}z^k,$$

$$C(z)=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{C^{(k)}(0)}{k!}z^k. \tag{22}$$

В наших предположениях

$$\begin{aligned}
&\varkappa_1=\Lambda'(0)=0,\\
&\varkappa^2=\Lambda''(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{MS_n}{n}=1.\\
&\varkappa_3=\Lambda'''(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{MS_n^3}{n},\\
&C'(0)=0.
\end{aligned} \tag{23}$$

В интеграле (17) сделаем замену $z=it$, что вместе с (18) и (19) даст нам

$$p_{Z_n}(x)=\frac{\sqrt{n}}{2\pi i}\int_{-i\varepsilon}^{i\varepsilon}e^{n(K(z)-\tau z)}C(z)\,dz+Be^{-\frac{n}{\rho_1(n)}}\eta_1. \tag{24}$$

Составим уравнение перевала

$$K'(z)-\tau=0, \tag{25}$$

которое в силу (23) имеет единственное решение $z_0>0$ в достаточно малой окрестности нуля

$$z_0=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\tau^k,$$

где

$$a_1=1, \qquad a_2=-\frac{\varkappa_3}{2}, \qquad a_3=\frac{3\varkappa_3^2-\varkappa_4}{6}. \tag{26}$$

Отсюда

$$K(z_0)-\tau z_0=-\frac{1}{2}\tau^2+\tau^3\lambda(\tau), \tag{27}$$

$$\lambda(\tau)=\frac{\varkappa_3}{6}+\frac{\varkappa_4-3\varkappa_3^2}{24}\tau+\ \cdots \tag{28}$$

Ряд (28) принято называть рядом Крамера и он фигурирует в формулировке теоремы 1. Подынтегральная функция в (24) по условию Б с $\beta=\frac{1}{2}$ является аналитической и по теореме Коши

$$p_{Z_n}(x)=\frac{\sqrt{n}}{2\pi i}\,(J_1+J_2+J_3)+Be^{-\frac{n}{\rho_1(n)}\eta_1}, \tag{29}$$

где

$$J_1=\int\limits_{z_0-i\varepsilon_1}^{z_0+i\varepsilon_1} e^{n\left(K(z)-\tau z\right)}\,C(z)\,dz,$$

$$J_2=\int\limits_{-i\varepsilon_1}^{z_0-i\varepsilon_1} e^{n\left(K(z)-\tau z\right)}\,C(z)\,dz,$$

$$J_3=-\int\limits_{-i\varepsilon_1}^{z_0+i\varepsilon_1} e^{n\left(K(z)-\tau z\right)}\,C(z)\,dz.$$

Согласно (23)

$$\Lambda(it)=e^{-\frac{t^2}{2}+B|t|^3}$$

и при достаточно малом ε_1

$$|\Lambda(\pm i\varepsilon_1)|\leqslant e^{-\frac{\varepsilon_1^2}{4}}.$$

Функция $\Lambda(z)$ в окрестности нуля непрерывна и при достаточно большом n z_0 будет настолько мало, что

$$|\Lambda(\pm i\varepsilon_1+v)|\leqslant e^{-\frac{\varepsilon_1^2}{8}},\qquad 0\leqslant v\leqslant z_0.$$

Так как ввиду (26) в окрестности нуля

$$|C(z)|=1+B|z|^2, \tag{30}$$

то из последних двух соотношений следует

$$|J_2|+|J_3|=Be^{-n\eta_2},\qquad \eta_2=\eta_2(\varepsilon_1). \tag{31}$$

Имеем по (25)

$$K(z)-\tau z=K(z_0)-\tau z_0+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\varkappa_k(z_0)}{k!}\,(it)^k. \tag{32}$$

Так как $\varkappa_2=1$, то при достаточно большом n

$$\varkappa_2(z_0)=1+Bz_0>\frac{1}{2}. \tag{33}$$

При $|t|\leqslant\varepsilon_1$

$$n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\varkappa_k(z_0)}{k!}\,(it)^k=-\frac{n\varkappa_2(z_0)}{2}\,t^2+nB|t|^3 \tag{34}$$

и при достаточно малом ε_1

$$\operatorname{Re}\left\{n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\varkappa_k(z_0)}{k!}(it)^k\right\}\leqslant-\frac{n\varkappa_2(z_0)}{4}t^2. \tag{35}$$

Согласно (33), (34), (35) и (30)

$$\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\left|\int\limits_{\frac{\rho_2(n)}{\sqrt{n}}\leqslant|t|\leqslant\varepsilon_1} e^{n\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\varkappa_k(z_0)}{k!}(it)^k}C(z_0+it)\,dt\right|=Be^{-\rho_2^2(n)\eta_3}. \tag{36}$$

Находим для (29) из (31), (36) и (32)

$$p_{Z_n}(x)=e^{n(K(z_0)-\tau z_0)}\left\{\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{\rho_2(n)}{\sqrt{n}}} e^{n\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\varkappa_k(z_0)}{k!}(it)^k}\times\right.$$

$$\left.\times C(z_0+it)\,dt+Be^{-\rho_2^2(n)\eta_3}\right\}+Be^{-\frac{n}{\rho_1(n)}\eta_1}.$$

Выбрав $\rho_1(n)$ таким образом, что

$$\rho_1(n)<\rho_2^2(n)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_1(n)}{\rho_2^2(n)}=0,$$

мы получим согласно (27) и (18)

$$p_{Z_n}(x)=\varphi(x)e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left\{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{\rho_2(n)}{\sqrt{n}}} e^{n\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\varkappa_k(z_0)}{k!}(it)^k}\times\right.$$

$$\left.\times C(z_0+it)\,dt+Be^{-\rho_2^2(n)\eta_3}\right\}.$$

При любом $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ согласно (33)

$$\int\limits_{|t|>\frac{\rho_2(n)}{\sqrt{n}}}|t|^r e^{-\frac{n\varkappa_2(z_0)}{2}t^2}dt\leqslant\frac{B}{n^{\frac{r+1}{2}}}e^{-\rho_2^2(n)\eta_4}. \tag{37}$$

Выберем конечное число $s=1,\ 2,\ \ldots,$ и разложим по формуле Тейлора функцию

$$e^{n\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{\varkappa_k(z_0)}{k!}(it)^k}=1+\sum_{k=1}^{s}\frac{n^k}{k!}\sum_{r=3k}^{s+2k}A_{kr}(z_0)(it)^r+B\frac{\rho_3^{3s+1}(n)}{n^{\frac{s+1}{2}}} \tag{38}$$

при

$$|t|\leqslant\frac{\rho_3(n)}{\sqrt{n}},$$

где

$$A_{rj}(z_0)=\sum\nolimits^{(1)}\prod_{i=1}^{r}\frac{\varkappa_{j_i}(z_0)}{j_i!}$$

и $\Sigma^{(1)}$ означает суммирование по всем наборам целых чисел $(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{r} j_i=j, \qquad j_i\geqslant 3, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Аналогично при

$$|t|\leqslant\frac{\rho_3(n)}{\sqrt{n}}$$

$$C(z_0+it)=\sum_{k=0}^{s}\frac{C^{(k)}(z_0)}{k!}(it)^k+B\frac{\rho_3^{s+1}(n)}{n^{\frac{s+1}{2}}}. \tag{39}$$

Из (38) и (39) следует, что

$$p_{Z_n}(x)=\varphi(x)e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left\{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{\rho_3(n)}{\sqrt{n}}}\left(\sum_{k=0}^{s}\frac{C^{(k)}(z_0)}{k!}(it)^k+\right.\right.$$

$$\left.+B\frac{\rho_3^{s+1}(n)}{n^{\frac{s+1}{2}}}\right)\left(1+\sum_{k=1}^{s}\frac{n^k}{k!}\sum_{r=3k}^{s+2k}A_{kr}(z_0)(it)^r+\right.$$

$$\left.\left.+B\frac{\rho_3^{3s+1}(n)}{n^{\frac{s+1}{2}}}\right)e^{-\frac{n\varkappa_2(z_0)}{2}t^2}dt+Be^{-\rho_3^2(n)\eta_n}\right\}. \tag{40}$$

В дальнейшем интегрирование в (40) производится согласно (37) от $-\infty$ до $+\infty$. Производя довольно громоздкие вычисления, которых мы здесь не приводим, окончательно получаем утверждение (2) теоремы 1. Приведем только окончательный вид полинома

$$P_s\left(\frac{x}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}(-1)^r\frac{(2r)!}{2^r\cdot r!}\frac{1}{n^r}\sum_{p=0}^{s-2r}B_{rp}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^p+$$

$$+\sum_{k=1}^{s}\frac{n^k}{k!}\sum_{\{r:3k\leqslant 2r\leqslant s+2k\}}(-1)^r\frac{(2r)!}{2^r\cdot r!}\frac{1}{n^r}\sum_{p=0}^{s+2k-2r}B_{kr}^{(p)}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^p-1.$$

Коэффициенты этого полинома находятся из рекуррентных соотношений:

$$a_{p_1k}=\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=l}^{k}\frac{\varkappa_{p_1+l}}{l!}\sum\nolimits^{(2)}\prod_{j=1}^{r}a_{k_j}\quad a_{p_{10}}=\varkappa_{p_1},\ p_1=2,\ 3,\ \ldots,$$

$$b_{pk}=\frac{1}{p!}\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=l}^{k}\frac{C^{(p+l)}(0)}{l!}\sum\nolimits^{(2)}\prod_{j=1}^{r}a_{k_j},\cdot b_{p0}=\frac{C^{(p)}(0)}{p!},$$

$$A_{pk}=\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=l}^{k}\frac{(-1)^l}{2^l\cdot l!}\prod_{q=1}^{l}(2p+2q-1)\sum{}^{(2)}\prod_{j=1}^{r}a_{2k_j},\ A_{p0}=1,$$

$$A_{kr}^{(p)}=\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=3k}^{r}\sum{}^{(1)}\sum{}^{(3)}\prod_{i=1}^{k}\frac{a_{j_i l_i}}{j_i!},\ r=3k,\ 3k+1,\ \ldots,$$

$$B_{rp}=\sum_{l=0}^{p}A_{rp-l}\,b_{2rl},\ r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$B_{kr}^{(p)}=\sum_{l=0}^{p}A_{k\,2r}^{(l)}A_{r\,p-l},\ 3k\leqslant 2r\leqslant s+2k,$$

где индексы $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ \Sigma^{(2)}$ и $\Sigma^{(3)}$ означают суммирование по всем наборам целых чисел соответственно $(k_1\ k_2,\ \ldots,\ k_r)$ и $(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_r)$ таким, что

$$\sum_{j=1}^{r}k_j=k,\ k_j\geqslant 1,$$

$$\sum_{j=1}^{r}l_j=l,\ l_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

В частных случаях получаем

$$P_1\left(\frac{x}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)=-\frac{\varkappa_3}{2}\ \frac{x}{\sqrt{n}},$$

$$P_2\left(\frac{x}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)=-\frac{\varkappa_3}{2}\ \frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{\varkappa_3^2+4C''(0)-4\varkappa_3-2\varkappa_4}{8}\ \frac{x^2}{n}+$$

$$+\frac{3\varkappa_4-5\varkappa_3^2-12C''(0)}{24}\ \frac{1}{n}.$$

Для доказательства (3) следует вместо случайных величин X_j взять случайные величины $-X_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Согласно (17) при некотором $\varepsilon>0$

$$p_{Z_n}(x)=\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon}e^{-it\sqrt{n}x}\,\Lambda^n(it)\,C(it)\,dt+Be^{-\frac{n}{\rho_1(n)}\eta_1}.$$

Обозначим

$$\mu=\frac{1}{2}-\beta,\qquad 0<\beta<\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{3}<\mu<\frac{1}{2},\qquad \gamma=\frac{4\beta}{1+2\beta},$$

$$0<\gamma<\frac{1}{2}.$$

В наших обозначениях из (23) и (30) следует, что

$$p_{Z_n}(x)=\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant n^{-\mu}}e^{-it\sqrt{n}x}\,\Lambda^n(it)\,C(it)\,dt+Be^{-n^{2\beta}\eta_1}.\tag{41}$$

Ввиду условия Б с $0<\beta<\frac{1}{2}$ существуют конечные абсолютные условные моменты любого порядка случайных величин X_j, $j=2, 3, \ldots, n$, функции $\Lambda(z)$ и $C(z)$ бесконечно дифференцируемы в окрестности нуля, но не являются аналитическими.

Лемма 1. *При выполнении условия Б с* $0<\beta\leqslant\frac{1}{2}$

$$M\{|X_2|^p|\xi_1\}\leqslant 2C_2\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{p}{\gamma}+1\right),\quad p=1, 2, \ldots \tag{42}$$

Положим для определенности

$$M\{e^{a|X_2|^\gamma}|\xi_1\}\leqslant C_2<\infty,\quad 0<a<\infty,\quad 0<\gamma\leqslant 1.$$

Имеем

$$M\{|X_2|^p|\xi_1\}=\int\limits_{-\infty}^{0}(-x)^p\,dF_{X_2}(x|\xi_1)+\int\limits_{0}^{\infty}x^p\,dF_{X_2}(x|\xi_1).$$

Нетрудно видеть, что для любого x, $x\geqslant 0$,

$$\int\limits_{x}^{\infty}dF_{X_2}(u|\xi_1)\leqslant e^{-ax^\gamma}\int\limits_{0}^{\infty}e^{au^\gamma}\,dF_{X_2}(u|\xi_1)\leqslant C_2e^{-ax^\gamma}.$$

Аналогично оценка верна и для

$$\int\limits_{-\infty}^{x}dF_{X_2}(u|\xi_1),\quad x\leqslant 0.$$

Согласно полученному

$$\int\limits_{0}^{\infty}x^p\,dF_{X_2}(x|\xi_1)=-\int\limits_{0}^{\infty}x^p d\left(\int\limits_{x}^{\infty}dF_{X_2}(u|\xi_1)\right)=p\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\infty}x^{p-1}\int\limits_{x}^{\infty}dF_{X_2}(u|\xi_1)\,du\leqslant C_2\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{p}{\gamma}+1\right). \tag{43}$$

Так как для $\int\limits_{-\infty}^{0}(-x)^p\,dF_{X_2}(x|\xi_1)$ оценка та же самая, то из (43) мы получаем (42). Лемм 1 доказана.

Лемма 2. *При выполнении условия* Б с $0\leqslant\beta\leqslant\frac{1}{2}$

$$\sup_{u\in I_1,\,|t|\leqslant\varepsilon_1}\left\|\frac{d^q}{dt^q}R(it, u)\right\|\leqslant B^q\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right),\quad q=1, 2, \ldots, \varepsilon_1<\varepsilon.$$

Доказательство. По определению резольвентного оператора

$$R(it, u)\,Q(it, u)=I, \tag{44}$$

где обозначено

$$Q(it, u)=uI-P(it)$$

и I — единичный оператор. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы

$$\|P(it)\| \geqslant \frac{1}{2}, \qquad |t| \leqslant \varepsilon_1.$$

Отсюда и из (44) следует, что

$$A = \sup_{u \in I_1,\, |t| \leqslant \varepsilon_1} \|R(it, u)\| < \frac{2}{3-2r_1} < \frac{2}{3-2\alpha}. \tag{45}$$

Дифференцируя (44) по t, находим

$$R_t^{(1)}(it, u) = R(it, u) P^{(1)}(it) R(it, u), \qquad |t| \leqslant \varepsilon_1,$$

где оператор

$$\left(P^{(q)}(it)g\right)(\omega) = i^q \int_\Omega X_2^q(\tilde{\omega}) e^{itX_1(\tilde{\omega})} g(\tilde{\omega}) P(\omega, d\tilde{\omega}), \; g \in \mathscr{B}, \; q = 1, 2, \ldots$$

Согласно лемме 1 и (45)

$$\sup_{u \in I_1,\, |t| \leqslant \varepsilon_1} \|R_t^{(1)}(it, u)\| \leqslant 2C_2 A^2 \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right). \tag{46}$$

Дифференцируя (44) два раза по t, получаем

$$R_t^{(2)}(it,u) = 2R_t^{(1)}(it,u) P^{(1)}(it) R(it,u) + R(it, u) P^{(2)}(it) R(it, u), \; |t| \leqslant \varepsilon_1. \tag{47}$$

Для дальнейшего нам потребуется неравенство

$$\frac{\Gamma\left(\frac{q-m}{\gamma}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{\gamma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right)} \leqslant \frac{\Gamma(q-m+1)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(q+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, q,$$
$$0 < \gamma \leqslant 1. \tag{48}$$

Для этого следует показать, что функция

$$\Psi(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{q-m}{\gamma}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{\gamma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, q, \quad 0 < \gamma \leqslant 1,$$

является не убывающей. Это нетрудно показать, взяв производную и воспользовавшись тем, что (см. [10], стр. 771)

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right)\frac{dx}{x}, \quad a > 0.$$

Пользуясь леммой 1, (45), (46) и (48), получаем из (47)

$$\sup_{u \in I_1,\, |t| \leqslant \varepsilon_1} \|R_t^{(2)}(it, u)\| \leqslant 2C_2 A^2 (1 + 2AC_2)\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right).$$

Применяя метод индукции и используя (48), находим

$$\sup_{u \in I_1,\, |t| \leqslant \varepsilon_1} \|R_t^{(q)}(it, u)\| \leqslant 2A^2 C_2 (1 + 2AC_2)^{q-1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{q}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right),$$
$$q = 1, 2, \ldots$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При выполнении условия* Б с $0<\beta\leqslant\frac{1}{2}$

$$|\Lambda^{(q)}(it)|\leqslant B^q\,\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right),\qquad |t|\leqslant\varepsilon_2<\varepsilon_1,\qquad q=1,\ 2,\ \ldots$$

Согласно обозначениям (13), (15) и (16) имеем

$$B(it)=\Lambda(it)\,C(it),\qquad |t|\leqslant\varepsilon. \tag{49}$$

Кроме того, из (14)

$$B(it)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I_1}uP_1R(it,\ u)\,du\,\psi,$$

$$C(it)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I_1}P_1R(it,\ u)\,du\psi.$$

Выбрав соответствующим образом $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, из (22), (23) и леммы 2 мы получим

$$|\Lambda(it)|\leqslant 1,$$

$$|C(it)|\geqslant\frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{d^q}{dt^q}B(it)\right|\leqslant 2\alpha(1+\alpha)A^2C_2(1+2AC_2)^{q-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{q}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right),$$

$$\left|\frac{d^q}{dt^q}C(it)\right|\leqslant 2aA^2C_2(1+2AC_2)^{q-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{q}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right)q=1,\ 2,\ldots,\ |t|\leqslant\varepsilon_2.$$

Дифференцируя (49), имеем

$$\frac{d}{dt}B(it)=C(it)\frac{d}{dt}\Lambda(it)+\Lambda(it)\frac{d}{dt}C(it).$$

Из последних неравенств находим

$$\left|\frac{d}{dt}\Lambda(it)\right|\leqslant 4\alpha(\alpha+2)A^2C_2\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right),\quad |t|\leqslant\varepsilon_2.$$

Продолжая дифференцировать (49) и используя неравенство (48), методом индукции мы докажем, что

$$\left|\frac{d^q}{dt^q}\Lambda(it)\right|\leqslant 4\alpha(\alpha+2)A^2C_2\Big((1+2\alpha A)(1+2AC_2)\Big)^{q-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{q}{\gamma}}\times$$

$$\times\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right),\qquad |t|\leqslant\varepsilon_2,\qquad q=1,\ 2,\ \ldots$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *При выполнении условия* Б с $0<\beta\leqslant\frac{1}{2}$

$$|\varkappa_q(it)|\leqslant B^q\,\Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right),\qquad |t|\leqslant\varepsilon_3<\varepsilon_2,\qquad q=1,\ 2,\ \ldots$$

Имеем

$$\varkappa_q(it)=\frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}}\left(\frac{1}{\Lambda(it)}\cdot\frac{d}{dt}\Lambda(it)\right),\qquad q=1,\ 2,\ \ldots,\qquad |t|\leqslant\varepsilon.$$

Выбрав $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$ так, чтобы

$$|\Lambda(it)| \geqslant \frac{1}{2}, \qquad |t| \leqslant \varepsilon_3,$$

мы можем далее рассуждать как и при доказательстве лемм 2 и 3, используя при этом основное неравенство (48). Получим

$$|\varkappa_q(it)| \leqslant 8\alpha(\alpha+2)A^2C_2\Big((1+2\alpha A)(1+2AC_2)(5+2\alpha)\Big)^{q-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{q}{\gamma}} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{q}{\gamma}+1\right), \qquad |t| \leqslant \varepsilon_3, \qquad q=1,\ 2,\ \ldots$$

Тем самым лемма 4 доказана.

Имея ввиду (30), из (41) мы получим

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\left(1+\frac{B}{n^{3\mu}}\right) \int\limits_{|t| \leqslant n^{-\mu}} e^{-i\sqrt{n}xt}\Lambda^n(it)\,dt + Be^{-n^{2\beta}}\eta_2. \tag{50}$$

Дальнейшее доказательство проводится как и для независимых случайных величин (см. [3], [6]). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассуждаем также как и при доказательстве теоремы 2. Имеем по (50)

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\left(1+\frac{B}{n^{3\mu}}\right) \int\limits_{|t| \leqslant n^{-\mu}} e^{-i\sqrt{n}xt}\,\Lambda^n(it)\,dt + Be^{-n^{2\beta}}\eta_2,$$

только здесь

$$\frac{1}{6} \leqslant \beta < \frac{1}{2}, \qquad 0 < \mu \leqslant \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{2} \leqslant \gamma < 1.$$

Используя леммы 3 и 4, дальнейшее доказательство мы проводим как и в случае независимых одинаково распределенных случайных величин (см. [3], [6]). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Как и при доказательстве теоремы 1, выберем целые положительные числа l_0, l_1, $\ldots$, l_N таким образом, что

$$1 = l_0 < l_1 < \cdots < l_N \leqslant n,$$

$$l_j - l_{j-1} = \left[\frac{\rho(n)}{\alpha}\right] + 2, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

$$N = \left[\frac{n-1}{\left[\frac{\rho(n)}{\alpha}\right]+2}\right].$$

Тогда из (4), (5), (7), (8) и (9) следует, что при достаточно большом n

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant \left\{e^{-\frac{\alpha^2}{64}\left(1-|f_{X_1}(t)|^2\right)} + (1-\alpha)^{\left[\frac{\rho(n)}{\alpha}\right]}\right\}^N \leqslant$$

$$\leqslant e^{1-\frac{\alpha^2 n}{128\rho(n)}\left(1-|f_{X_1}(t)|^2\right)}.$$

Этим неравенством мы свели задачу рассмотрения функции концентрации случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова, к аналогичной задаче для независимых одинаково распределенных случайных величин (см. [1]). Теорема 4 доказана.

В заключение искренне благодарю В. А. Статулявичуса за постоянное внимание и ценные указания при выполнении этой работы.

Вильнюский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
8. XII. 1970

Литература

1. C.-G. Esseen, On the Kolmogorov–Rogozin inequality for the concentration function, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitsheorie und veiwandte Gebiete, B. 5, H. 3, 1966, 216.
2. К. Иосида, Функциональный анализ, Москва, 1967.
3. Ю.В. Линник, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. I, Теор. вероятн. и ее примен., 6. вып. 2 (1961), 145–163.
4. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теор. вероятн. и ее примен., 11, вып. 4 (1957), 389–416.
5. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теор. вероятн. и ее примен., 6, вып. 1 (1961). 67–86.
6. В. В. Петров, Предельные теоремы для больших уклонений при нарушении условия Крамера. I, Вестник ЛГУ, № 19 (1963), 49–68.
7. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. I, Лит. матем. сб., IX, 2(1969), 346–362.
8. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. II, Лит. матем. сб., IX, 3(1969), 635–672.
9. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, III, Лит. матем. сб., X, 1 (1970), 161–169.
10. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, II. Москва, 1966.

DIDELIŲ NUKRYPIMŲ LOKALINĖS TEOREMOS HOMOGENINĖMS MARKOVO GRANDINĖMS

E. Misevičius

Reziumė)

Sakykime, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, yra atsitiktiniai dydžiai, surišti į homogeninę Markovo grandinę $\{\xi_j, j=1, 2, \ldots, n\}$ su bet kokia būsenų aibe Ω, jos poaibių σ-algebra $\mathcal{F}$, perėjimo per vieną žingsnį tikimybine funkcija $P(\omega, A)$, $\omega\in\Omega$, $A\in\mathcal{F}$, ir stacionariu pradiniu pasiskirstymu $P(A)$, $A\in\mathcal{F}$.

Sąlyga A: *egzistuoja sąlyginis tankis* $p_{X_2}(x \mid \xi_1, \xi_3)$,

$$\text{essential sup } p_{X_2}(x \mid \xi_1, \xi_3) < \infty.$$

Sąlyga B: *egzistuoja baigtinė konstanta* a, $a>0$, *tokia, jog*

$$\text{essential sup } M\{e^{a|X_2|^{\frac{4\beta}{1+2\beta}}} \mid \xi_1\} < \infty, \qquad 0<\beta\leq\frac{1}{2}.$$

Straipsnyje įrodytos šios teoremos.

1 teorema. *Jeigu ergodiškumo koeficientas* $\alpha>0$, *išpildytos* A *ir* B *sąlygos,* $\beta=\frac{1}{2}$, *tai intervale* $1\leq x\leq o(\sqrt{n})$, $n\to\infty$,

$$p_{Z_n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left\{1+P_{s-1}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)+B\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right\}.$$

Čia:

$$S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad Z_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n, \qquad \sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{DS_n}{n},$$

$p_s\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $s=1, 2, \ldots,-s$-jo laipsnio dviejų kintamųjų polinomas, $\lambda(t)$ – Kramerio eilutė, konverguojanti tam tikroje taško $t=0$ aplinkoje,

$$\lambda(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j t^j,$$

$$p_{Z_n}(x)=\frac{d}{dx}P\{Z_n<x\},$$

$\rho(n)\to\infty$, kai $n\to\infty$, – monotoniška kaip norima lėtai didėjanti funkcija, B – baigtinė teigiama konstanta.

2 teorema. *Jeigu* $\alpha>0$, *išpildytos* A *ir* B *sąlygos,* $0<\beta<\frac{1}{6}$, *tai intervale*

$$0\leqslant x\leqslant\frac{n^\beta}{\rho(n)}, \qquad n\to\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{Z_n}(x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}=1.$$

3 teorema. *Jeigu* $\alpha>0$, *išpildytos* A *ir* B *sąlygos,* $\frac{1}{6}\leqslant\beta<\frac{1}{2}$, *tai intervale*

$$0\leqslant x\leqslant\frac{n^\beta}{\rho(n)}, \qquad n\to\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{Z_n}(x)\qquad\rho(n)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda^{[s]}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}}=1.$$

Čia:

$$\lambda^{[s]}(t)=\sum_{j=0}^{s}\lambda_j t^j,$$

sveikas skaičius s randamas iš nelygybių

$$\frac{1}{2}\,\frac{s+1}{s+3}\leqslant\beta<\frac{1}{2}\,\frac{s+2}{s+4}.$$

4 teorema. *Jeigu* $\alpha>0$, *tai bet kokiems teigiamiems skaičiams* λ *ir* L, $\lambda\leqslant L$, $n\to\infty$, *atsitiktinio dydžio* S_n *koncentracijos funkcija*

$$Q_{S_n}(L)\leqslant\sqrt{\frac{\rho(n)}{n}}\;\frac{BL}{\lambda\sqrt{1-Q_{X_1}(\lambda)}}.$$

Čia: $Q_{X_1}(\lambda)$ – atsitiktinio dydžio X_1 koncentracijos funkcija.

LOCAL THEOREMS OF LARGE DEVIATIONS FOR HOM OGENEOUS MARKOV CHAINS

E. Misevičius

(Summary)

Let us assume $X_1, X_2, \ldots, X_n$, are random variables, bound into a homogeneous Markov chain $\{\xi_j, j=1, 2, \ldots, n,\}$ with any set of states Ω, σ-algebra $\mathcal{F}$ of its parts, with the probability function of transition by a step $P(\omega, A)$, $\omega\in\Omega$, $A\in\mathcal{F}$, and stationary initial distribution $P(A), A\in\mathcal{F}$.

Condition A: *there is conventional density* $p_{X_2}(x \mid \xi_1, \xi_3)$,

essential $\sup p_{X_2}(x \mid \xi_1, \xi_3) < \infty$.

Condition B: *the existing final constant a*, $a > 0$, *is such, that*

$$\text{essential sup } M\left\{e^{a|X_2|^{\frac{4\beta}{1+2\beta}}} \mid \xi_1\right\} < \infty, \qquad 0 < \beta \leq \frac{1}{2}.$$

These theorems are proved in thes present article.

Theorem 1. *If the ergodic coefficient* $\alpha > 0$, *the conditions* A *and* B, $\beta = \frac{1}{2}$, *are fulfilled, then in the interval* $1 \leq x \leq o(\sqrt{n})$, $n \to \infty$,

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left\{1 + P_{s-1}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + B\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right\}.$$

Here:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n, \qquad \sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{DS_n}{n},$$

$P_s\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $s = 1, 2, \ldots$, — the polynomial of two variables of the „s" power, $\lambda(t)$ — Kramer row, converging in certain surroundings of the point $t = 0$,

$$\lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j t^j,$$

$$p_{Z_n}(x) = \frac{d}{dx} P\{Z_n < x\},$$

$\rho(n) \to \infty$, when $n \to \infty$, — monotonic arbitury slowly increasing function, and β — the final affirmative constant.

Theorem. 2. *If* $\alpha > 0$, *the conditions* A *and* B, $0 < \beta < \frac{1}{6}$, *are fulfilled, then in the interval*

$$0 \leq x \leq \frac{n^\beta}{\rho(n)}, \qquad n \to \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{Z_n}(x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} = 1.$$

Theorem 3. *If* $\alpha > 0$, *the conditions* A *and* B, $\frac{1}{6} \leq \beta < \frac{1}{2}$ *are fulfilled, so in the interval*

$$0 \leq x \leq \frac{n^\beta}{\rho(n)}, \qquad n \to \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{Z_n}(x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda^{[s]}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}} = 1.$$

Here:

$$\lambda^{[s]}(t) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j t^j,$$

the integer s is found from the inequalities:

$$\frac{1}{2}\,\frac{s+1}{s+3} \leqslant \beta < \frac{1}{2}\,\frac{s+2}{s+4}.$$

Theorem 4. *If* $\alpha > 0$, *then for any affirmative numbers* λ *and* L, $\lambda \leqslant L$, $n \to \infty$, *the concentration function of random variables* S_n *is*

$$Q_{S_n}(L) \leqslant \sqrt{\frac{\rho(n)}{n}}\,\frac{BL}{\lambda\sqrt{1-Q_{X_1}(\lambda)}}.$$

Here: $Q_{X_1}(\lambda)$ is the concentration function of the random variable X_1.