1971

УДК-513

О ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В P_3

А. Ю. Пекарскене

Рассматривается расслоенное пространство, элементом базиса которого является плоскость и лежащая в ней кривая второго порядка. С каждым таким элементом базиса ассоциированна прямая, пересекающая упомянутую кривую в двух действительных точках. На таком расслоенном пространстве определено восьмипараметрическое многообразие, как секущая поверхность расслоенного пространства. Методами подвижного репера и внешних форм Картана [4], и инвариантным методом Г. Ф. Лаптева [1] исследована первая дифференциальная окрестность этого многообразия.

§ 1. Дифференциальные уравнения

Пусть V_8 — восьмипараметрическое многообразие, образующим элементом которого является плоскость $x^4=0$ и невырожденная кривая второго порядка

$$\begin{cases} x^1 x^2 + x^1 x^3 + x^2 x^3 = 0, \\ x^4 = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где x^i — однородные координаты точки в пространстве P_3 относительно координатного тетраэдра $\{A_i\}$ $(i, j, k=1, 2, 3, 4)$. Локальные координаты (u^α) $(\alpha=1, 2, \ldots, 8)$ этого многообразия являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы

$$\vartheta_p=0, \quad \Theta_I=0, \quad \omega_I^4=0,$$

где

$$\vartheta_1=\omega_1^2, \quad \vartheta_2=\omega_2^1,$$
$$\Theta_1=\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_3^1,$$
$$\Theta_2=\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_3^2,$$
$$\Theta_3=\omega_3^1+\omega_3^2,$$
$$(p, q=1, 2; \quad I, K=1, 2, 3)$$

и ω_i^j — формы инфинитезимальных проективных перемещений тетраэдра [4] $pA_i=\omega_i^j A_j$, удовлетворяющие уравнениям структуры трехмерного проективного пространства

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k, \omega_k^j].$$

С каждой точкой (u^α) многообразия V_8, называемого базисным пространством (база), мы ассоциируем новое десятимерное многообразие $V_{10}(u^\alpha)$, которое называется локальным пространством (слой), соответствующим данной точке (u^α) базисного пространства, т. е. с каждой точкой (u^α) базиса V_8, мы ассоциируем прямую, пересекающую кривую (1.1) в двух действительных точках. Выполняем частичную канонизацию подвижного репера $\{A_i\}$ путем совмещения ребра A_1A_2 с упомянутой прямой. Локальные пространства, ассоциированные с различными точками (u^α), предполагаются изоморфными друг другу. Множество всех этих локальных пространств, ассоциированных с точками базы, называется расслоенным пространством, которое обозначим через $V_{10}(V_8)$. Локальные координаты слоя $V_{10}(u_0^\alpha)$ будем считать первыми интегралами вполне интегрируемой системы

$$\omega_p^3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \vartheta_p,\ \Theta_I,\ \omega_I^4).$$

На расслоенном пространстве $V_{10}(V_8)$ определяем восьмипараметрическое многообразие, как секущую поверхность пространства $V_{10}(V_8)$. В работах [2] и [3] показано, что это многообразие определяется линейными дифференциальными уравнениями

$$\omega_p^3 = a_p^q \vartheta_q + b_p^I \Theta_I + c_p^I \omega_I^4 \tag{1.2}$$

и соответствующими внешними квадратичными уравнениями. a_p^q, b_p^I, c_p^I образуют фундаментальный объект первого порядка многообразия (1.2).

Разложив внешние квадратичные уравнения многообразия (1.2) по лемме Картана, получаем, что уравнения инфинитезимальных преобразований коэффициентов a_1^q, b_1^I и c_1^I, когда первичные параметры фиксированы, следующие:

$$\begin{aligned}
\delta a_1^1 &= [a_1^1 + b_1^3 - b_1^2 + (a_1^1)^2 - a_1^2 a_2^1 + 2a_2^1 b_1^2 - a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_1^1 - 2a_1^1 b_1^1]\,\pi_3^2, \\
\delta a_1^2 &= (-3a_1^2 - b_1^3 + b_1^1 - a_1^2 a_2^2 + a_1^1 a_1^2 + 2a_2^2 b_1^2 - a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^1 - 2a_1^2 b_1^1)\,\pi_3^2, \\
\delta b_1^1 &= [-2b_1^1 + b_1^3 - 2(b_1^1)^2 - b_1^2 b_1^1 + 2b_1^2 b_2^1 + b_1^1 b_2^1 + a_1^1 b_1^1 - a_1^2 b_2^1]\,\pi_3^2, \\
\delta b_1^2 &= [-b_1^3 - (b_1^2)^2 - 2b_1^2 b_1^1 + b_1^1 b_2^2 + 2b_1^2 b_2^2 + a_1^1 b_1^2 - a_1^2 b_2^2]\,\pi_3^2, \\
\delta b_1^3 &= (-b_1^3 + a_1^1 b_1^3 - a_1^2 b_2^3 + 2b_1^2 b_2^3 - b_1^3 b_1^2 + b_1^1 b_2^3 - 2b_1^3 b_1^1)\,\pi_3^2, \\
\delta c_1^1 &= c_1^1(\pi_4^4 - \pi_2^2) + b_1^1 \pi_4^1 + a_1^1 \pi_4^2 - \pi_4^3 - \\
&\quad - (a_1^2 c_2^1 - a_1^1 c_1^1 - 2b_1^2 c_2^1 + b_1^2 c_1^1 - b_1^1 c_2^1 + 2b_1^1 c_1^1 - c_1^3 - c_1^1)\,\pi_3^2, \\
\delta c_1^2 &= c_1^2(\pi_4^4 - \pi_2^2) + a_1^2 \pi_4^1 + b_1^2 \pi_4^2 - \\
&\quad - (c_1^2 + c_1^3 - a_1^1 c_1^2 + a_1^2 c_2^2 - 2b_1^2 c_2^2 - b_1^1 c_2^2 + b_1^2 c_1^2 + 2b_1^1 c_1^2)\,\pi_3^2, \\
\delta c_1^3 &= c_1^3(\pi_4^4 - \pi_2^2) + b_1^3(\pi_4^1 + \pi_4^2) - b_1^2(\pi_4^3 + \pi_4^2) - \\
&\quad - b_1^1(\pi_4^1 + \pi_4^3) - (a_1^2 c_2^3 - a_1^1 c_1^3 - 2b_1^2 c_2^3 - b_1^1 c_2^3 + b_1^2 c_1^3 + 2b_1^1 c_1^3)\,\pi_3^2,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где δ – символ дифференцирования относительно вторичных параметров и $\pi_i^j = \omega_i^j(\delta)$.

Уравнения инфинитезимальных преобразований остальных коэффициентов a_2^q, b_2^I и c_2^I, когда первичные параметры фиксированы, получаются после замены индексов: $1 \leftrightarrow 2$.

§ 2. Геометрические интерпретации

1. Неподвижность плоскости $x^4=0$, прямой A_1A_2 и полюса $P=A_1+A_2-A_3$ этой прямой относительно кривой (1.1), определяется следующими линейными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\omega_1^4=\omega_2^4=\omega_3^4=0,\\
&\omega_1^3=\omega_2^3=0,\\
&\omega_1^1+\omega_2^1-\omega_3^1-\omega_3^3=0,\\
&\omega_1^2+\omega_2^2-\omega_3^2-\omega_3^3=0.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Таким образом, при выполнении условий (2.1), из восьмипараметрического многообразия (1.2) выделяем однопараметрическое. Характеристические точки

$$M_i=v_iA_1-\frac{v_i}{v_i+1}A_2+A_3\tag{2.2}$$

однопараметрического семейства кривых (1.1) находим из уравнения

$$v^4+4v^3+\left(4+\frac{p+s}{p}+\frac{q}{p}\right)v^2+2\left(\frac{p+s}{p}+\frac{q}{p}\right)v+\frac{q}{p}=0,\tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned}
&p=2\,(a_{[1}^2b_{2]}^3+b_{[1}^3b_{2]}^1),\\
&s=2\,(a_{[1}^1b_{2]}^3+b_{[1}^3b_{2]}^2),\\
&q=2\,(a_{[1}^1a_{2]}^2+b_{[1}^2b_{2]}^1+a_{[2}^1b_{1]}^1+a_{[1}^2b_{2]}^2),
\end{aligned}\tag{2.4}$$

причем полагаем, что $p\neq 0$.

Формулы инфинитезимальных преобразований этих величин, когда первичные параметры фиксированы, следующие:

$$\begin{aligned}
&\delta p=(\alpha-2)\,p\,\pi_3^2,\\
&\delta s=(\alpha+2)\,s\,\pi_3^2,\\
&\delta q=(\alpha q-2p-2s)\,\pi_3^2,
\end{aligned}\tag{2.5}$$

где

$$\alpha=a_1^1-a_2^2-b_1^2+b_2^1+2b_2^2-2b_1^1.$$

Обозначим $h_1=\frac{p+s}{p}$ и $h_2=\frac{q}{p}$. Тогда, используя уравнение (2.5), получаем:

$$\begin{aligned}
&\delta h_1=4\,\pi_3^2(h_1-1),\\
&\delta h_2=2\,\pi_3^2(h_2-h_1).
\end{aligned}\tag{2.6}$$

Окончательно, из этих уравнений следует, что h_1 и h_2 образуют двухкомпонентный линейный неоднородный дифференциально-геометрический объект, а h_1 — однокомпонентный линейный неоднородный дифференциально-геометрический объект.

2. Неподвижность плоскости $x^4=0$ и точек A_1, A_2 определяется следующими линейными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
&\omega_1^4=\omega_2^4=\omega_3^4=0,\\
&\omega_1^2=\omega_1^3=\omega_2^1=\omega_2^3=0.
\end{aligned}\tag{2.7}$$

Рассуждая так же как раннее, характеристические точки

$$M_p = v_p A_1 - \frac{v_p}{v_p+1} A_2 + A_3 \tag{2.8}$$

однопараметрического семейства кривых (1.1) находим из уравнения

$$v^2 + \left(\frac{m}{r} + \frac{k}{r} + 1\right) v + \frac{m}{r} = 0, \tag{2.9}$$

где

$$m = 2b_{[1}^2 b_{2]}^1,$$

$$k = 2b_{[1}^3 b_{2]}^2,$$

$$r = 2b_{[1}^3 b_{2]}^1, \tag{2.10}$$

причем полагаем, что $r \neq 0$.

Формулы инфинитезимальных преобразований этих величин, когда первичные параметры фиксированы, следующие:

$$\delta m = (\alpha m - r - k)\pi_3^2,$$

$$\delta k = (\alpha + 1) k \pi_3^2,$$

$$\delta r = (\alpha - 1) r \pi_3^2. \tag{2.11}$$

Обозначив $h_3 = \frac{k}{r}$ и $h_4 = \frac{m}{r}$, из (2.11) имеем:

$$\delta h_3 = 2\pi_3^2 h_3,$$

$$\delta h_4 = \pi_3^2 (h_4 - h_3 - 1). \tag{2.12}$$

Из этих уравнений следует, что h_3 и h_4 образуют двухкомпонентный линейный неоднородный дифференциально-геометрический объект, а h_3 — однокомпонентный линейный однородный дифференциально-геометрический объект (относительный инвариант).

Прямые, проходящие через точки M_1, M_2 и через точки A_1, A_2 пересекаются в точке

$$K = h_3 \cdot A_1 + A_2.$$

Касательная в точке P к кривой, которую описывает полюс P при выполнении условий (2.7), пересекает прямую A_1A_2 в точке

$$L = -h_3 \cdot A_1 + A_2.$$

Пара точек A_1 и A_2 разделяет гармонически пару точек L и K.

3. Точка $N = A_1 + tA_2 - \frac{t}{1+t} A_3$ при любом t лежит на кривой (1.1).

Кривые (1.1) многообразия (1.2), проходящие через четыре точки

$$N_i = A_1 + t_i A_2 - \frac{t_i}{1+t_i} A_3,$$

образуют однопараметрическое семейство плоских кривых второго порядка. Этим самым, прямая A_1A_2, входящая в состав образующего элемента многообразия (1.2), тоже будет описывать однопараметрическое семейство прямых в плоскости.

Найдем характеристическую точку $R = A_1 + \lambda A_2$ этого однопараметрического семейства прямых.

Неподвижность плоскости $x^4=0$, точек N_i и точки R определяется следующими дифференциальными уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^4=\omega_2^4=\omega_3^4=0,\\
&t_i^4\,\omega_2^1+t_i^3\,(\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_2^1-\omega_3^1)+t_i^2\,(\omega_2^2-2\omega_3^3+\omega_1^1)+\\
&+t_i\,(\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_1^2-\omega_3^2)+\omega_1^2+(1+t_i)^3\,\omega_1^3+t_i\,(1+t_i)^3\,\omega_2^3=0,\\
&\omega_1^3+\lambda\omega_2^3=0,\\
&d\lambda+\lambda\,(\omega_2^2-\omega_1^1)-\lambda^2\,\omega_2^1+\omega_1^2=0.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Используя уравнения (1.2), первые восемь уравнений выражаем через главные формы ϑ_q, Θ_I, ω_I^4. Исходя из требования независимости одной из этих форм, получаем, что определитель, составленный из коэффициентов при главных формах, равен нулю. Итак, точка R определяется уравнением:

$$
\begin{vmatrix}
f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1) & f_4(t_1) & f_5(t_1)\\
f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2) & f_4(t_2) & f_5(t_2)\\
f_1(t_3) & f_2(t_3) & f_3(t_3) & f_4(t_3) & f_5(t_3)\\
f_1(t_4) & f_2(t_4) & f_3(t_4) & f_4(t_4) & f_5(t_4)\\
a_1^1+\lambda a_2^1 & a_1^2+\lambda a_2^2 & b_1^1+\lambda b_2^1 & b_1^2+\lambda b_2^2 & b_1^3+\lambda b_2^3
\end{vmatrix}=0,
\tag{2.14}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&f_1(t_i)=(1+t_i)+a_1^1\,(1+t_i)^3+a_2^1 t_i\,(1+t_i)^3,\\
&f_2(t_i)=t_i^3\,(1+t_i)+a_1^2\,(1+t_i)^3+a_2^2 t_i\,(1+t_i)^3,\\
&f_3(t_i)=t_i^2\,(1+t_i)+b_1^1\,(1+t_i)^3+b_2^1 t_i\,(1+t_i)^3,\\
&f_4(t_i)=t_i\,(1+t_i)+b_1^2\,(1+t_i)^3+b_2^2 t_i\,(1+t_i)^3,\\
&f_5(t_i)=t_i^2+b_1^3\,(1+t_i)^3+b_2^3 t_i\,(1+t_i)^3.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Когда точки N_i совпадают между собой, получаем совокупность кривых (1.1), имеющих в точке $N_i\equiv N$ соприкосновение третьего порядка. В таком случае уравнение (2.14) принимает вид:

$$
\begin{vmatrix}
f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) & f_5(t)\\
f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) & f_4'(t) & f_5'(t)\\
f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) & f_4''(t) & f_5''(t)\\
f_1'''(t) & f_2'''(t) & f_3'''(t) & f_4'''(t) & f_5'''(t)\\
a_1^1+\lambda a_2^1 & a_1^2+\lambda a_2^2 & b_1^1+\lambda b_2^1 & b_1^2+\lambda b_2^2 & b_1^3+\lambda b_2^3
\end{vmatrix}=0.
\tag{2.16}
$$

Кроме того, касательная в точке P к кривой, которую теперь опишет полюс P, пересекает прямую A_1A_2 в точке $T=A_1+\rho A_2$, определяемой следующим уравнением:

$$
\begin{vmatrix}
f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) & f_5(t)\\
f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) & f_4'(t) & f_5'(t)\\
f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) & f_4''(t) & f_5''(t)\\
f_1'''(t) & f_2'''(t) & f_3'''(t) & f_4'''(t) & f_5'''(t)\\
1 & -\rho & -\rho & 1 & 0
\end{vmatrix}=0.
\tag{2.17}
$$

4. Неподвижность точек A_1 и A_2 определяется следующими линейными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} &\omega_1^2=\omega_1^3=\omega_1^4=0, \\ &\omega_2^1=\omega_2^3=\omega_2^4=0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

При помощи этих уравнений и уравнений (1.2) из рассматриваемого восьмипараметрического многообразия выделяем двухпараметрическое. Изменение одного из этих свободных первичных параметров обуславливает поворот плоскости $x^4=0$ вокруг A_1A_2, т. е. получается однопараметрическое семейство плоскостей в пространстве P_3. Тем самым, в каждой фиксированной плоскости этого семейства находится кривая второго порядка (1.1), зависящая от второго свободного первичного параметра. При изменении этого параметра полюс $P=A_1+A_2-A_3$ прямой A_1A_2 относительно кривой (1.1) описывает некоторую кривую. Совокупность таких кривых составляет в P_3 поверхность. Касательная плоскость в точке P к этой поверхности определяется точками

$$P;\quad A_3-\frac{k+r}{n}A_4;\quad -A_2+A_3-\frac{r}{n}A_4, \tag{2.19}$$

где $n=2c_{[1}^3b_{2]}^3$.

При изменении только вторичных параметров получаем:

$$\delta n=\alpha\cdot n\cdot\pi_3^2+n\pi_3^2+n(\pi_4^4-\pi_2^2)+k(\pi_4^2+\pi_4^3)+r(\pi_4^1+\pi_4^3). \tag{2.20}$$

Обозначая $h_5=\dfrac{k}{n}$ и $h_6=\dfrac{r}{n}$, где $n\neq 0$, находим:

$$\begin{aligned} &\delta h_5=-(h_5)^2(\pi_4^2+\pi_4^3)-h_5h_6(\pi_4^1+\pi_4^3)-h_5(\pi_4^4-\pi_2^2), \\ &\delta h_6=-(h_6)^2(\pi_4^1+\pi_4^3)-h_5h_6(\pi_4^2+\pi_4^3)-h_6(\pi_4^4-\pi_1^1), \end{aligned} \tag{2.21}$$

т. е. h_5 и h_6 образуют двухкомпонентный однородный дифференциально-геометрический объект.

5. Неподвижность прямой A_1A_2 и некоторой поверхности второго порядка

$$x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3+x^4\cdot\beta_i\cdot x^i=0, \tag{2.22}$$

проходящей через кривую (1.1), определяется следующими линейными дифференциальными уравнениями:

$$\omega_1^3=\omega_1^4=\omega_2^3=\omega_2^4=0, \tag{2.23}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_1^2+\omega_1^3+\beta_1\omega_1^4=0, \\ &\omega_2^1+\omega_2^3+\beta_2\omega_2^4=0, \\ &\omega_3^1+\omega_3^2+\beta_3\omega_3^4=0, \\ &\omega_3^2+\omega_3^3+\omega_1^2+\beta_1\omega_3^4+\beta_3\omega_1^4-\omega_2^2-\omega_2^3-\omega_1^3-\beta_1\omega_2^4-\beta_2\omega_1^4=0, \\ &\omega_3^1+\omega_3^3+\omega_2^1+\beta_2\omega_3^4+\beta_3\omega_2^4-\omega_1^1-\omega_1^3-\omega_2^3-\beta_2\omega_1^4-\beta_1\omega_2^4=0, \end{aligned}\right. \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} d\beta_1 = \omega_4^2 + \omega_4^3 + \beta_1(\omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_2^3 - \omega_1^3) + \\ \quad + \beta_2\omega_1^2 + \beta_3\omega_1^3 + 2\beta_4\omega_1^4 - (\beta_1)^2\omega_2^4 - \beta_1\beta_2\omega_1^4, \\ d\beta_2 = \omega_4^1 + \omega_4^3 + \beta_1\omega_2^1 + \beta_2(\omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_2^3 - \omega_1^3) + \\ \quad + \beta_3\omega_2^3 + 2\beta_4\omega_2^4 - (\beta_2)^2\omega_1^4 - \beta_1\beta_2\omega_2^4, \\ d\beta_3 = \omega_4^1 + \omega_4^2 + \beta_1\omega_3^1 + \beta_2\omega_3^2 + \beta_3(\omega_4^4 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_2^3 - \omega_1^3) + \\ \quad + 2\beta_4\omega_3^4 - \beta_1\beta_3\omega_2^4 - \beta_2\beta_3\omega_1^4, \\ d\beta_4 = \beta_1\omega_4^1 + \beta_2\omega_4^2 + \beta_3\omega_4^3 + \beta_4(2\omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_2^3 - \omega_1^3) - \\ \quad - \beta_1\beta_4\omega_2^4 - \beta_2\beta_4\omega_1^4. \end{cases} \tag{2.25}$$

Требуем, чтобы поверхность (2.22) была конической, т. е. чтобы имело место соотношение:

$$(\beta_1)^2 + (\beta_2)^2 + (\beta_3)^2 - 2\beta_1\beta_2 - 2\beta_1\beta_3 - 2\beta_2\beta_3 + 4\beta_4 = 0. \tag{2.26}$$

Вершиной этого конуса будет точка

$$S(\beta_2 + \beta_3 - \beta_1;\ \beta_1 + \beta_3 - \beta_2;\ \beta_1 + \beta_2 - \beta_3;\ -2).$$

Из дифференциальных уравнений (2.23), (2.24) и (1.2) получаем:

$$\begin{cases} \vartheta_p = 0, \\ \omega_p^4 = 0, \\ \Theta_p - \beta_p\omega_3^4 = 0, \\ \Theta_3 + \beta_3\omega_3^4 = 0, \\ b_p^I\Theta_I + c_p^3\omega_3^4 = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Когда имеет место система дифференциальных уравнений (2.27), из рассматриваемого восьмипараметрического многообразия можно выделить однопараметрическое, потребовав, чтобы ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных главных формах в системе (2.27), был равен 7, т. е. когда выполнялись бы условия:

$$\beta_1 b_p^2 + \beta_2 b_p^1 - \beta_3 b_p^3 + c_p^3 = 0. \tag{2.28}$$

Вершина S упомянутого конуса в этом случае опишет прямую, определяемую следующей системой уравнений:

$$(b_p^3 - b_p^1)x^1 + (b_p^3 - b_p^2)x^2 - (b_p^1 + b_p^2)x^3 + c_p^3 x^4 = 0. \tag{2.29}$$

Эту же самую прямую определяют две точки:

$$A\left(\frac{l+g}{m};\ -\frac{l+g}{m};\ \frac{l-g}{m};\ -2\right),$$

$$B\left(\frac{m-k-r}{m};\ \frac{m+k+r}{m};\ \frac{-m-k+r}{m};\ 0\right) \qquad (m \neq 0),$$

где

$$l = 2c_{[1}^3 b_{2]}^2,$$

$$g = 2c_{[1}^3 b_{2]}^1. \qquad (2.30$$

При изменении только вторичных параметров, получаем:

$$\delta l = l(\pi_4^4-\pi_1^1)+k(\pi_4^1+\pi_4^2)+m(\pi_4^1+\pi_4^3)+\alpha l\pi_3^2-n\pi_3^2,$$
$$\delta g = g(\pi_4^4-\pi_1^1)+r(\pi_4^1+\pi_4^2)-m(\pi_4^2+\pi_4^3)+\alpha g\pi_3^2+n\pi_3^2. \qquad (2.31)$$

Обозначая $h_7=\frac{l}{m}$, $h_8=\frac{g}{m}$, $h_9=\frac{k}{m}$ и $h_{10}=\frac{r}{m}$, находим:

$$\delta h_7 = h_7h_9\pi_3^2+h_8h_9\pi_3^2+h_7(\pi_4^4-\pi_1^1)+h_9(\pi_4^1+\pi_4^2)+(\pi_4^1+\pi_4^3),$$
$$\delta h_8 = h_8h_{10}\pi_3^2+h_7h_{10}\pi_3^2+h_8(\pi_4^4-\pi_2^2)+h_{10}(\pi_4^1+\pi_4^2)-(\pi_4^2+\pi_4^3), \qquad (2.32)$$
$$\delta h_9=(h_9+h_{10}+1)h_9\pi_3^2,$$
$$\delta h_{10}=(h_{10}+h_9-1)h_{10}\pi_3^2.$$

На основании (2.32) делаем вывод, что h_7, h_8, h_9 и h_{10} образуют четырехкомпонентный неоднородный дифференциально-геометрический объект, при этом h_9 и h_{10} образуют двухкомпонентный однородный дифференциально-геометрический объект (геометрически – координаты точки B, т. е. точки, в которой прямая (2.29) пересекает плоскость $x^4=0$).

6. Неподвижность прямой

$$\begin{cases} x^3=\gamma_1 x^1, \\ x^4=0 \end{cases}$$

и некоторой конической поверхности второго порядка

$$\begin{cases} x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3+x^4\beta_i x^i=0, \\ (\beta_1)^2+(\beta_2)^2+(\beta_3)^2-2\beta_1\beta_2-2\beta_1\beta_3-2\beta_2\beta_3+4\beta_4=0, \end{cases} \qquad (2.33)$$

проходящей через кривую (1.1), определяется линейными диференциальными уравнениями (2.24), (2.25) и уравнениями:

$$\omega_1^4=-\gamma_1\omega_3^4,$$
$$\omega_2^3=\gamma_1\omega_2^1, \qquad (2.34)$$
$$\omega_2^4=0,$$
$$d\gamma_1=(\gamma_1)^2\omega_3^1+\gamma_1(\omega_1^1-\omega_3^3)-\omega_1^3.$$

Используя дифференциальные уравнения (2.24), (2.34) и (1.2) из рассматриваемого восьмипараметрического многообразия можно выделить однопараметрическое, потребовав, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных главных формах ϑ_q, Θ_l, ω_l^4, был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \beta_2-\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_1 \\ 1 & 1 & -1 & \beta_1-\beta_2-\beta_3\gamma_1 \\ a_1^1 & 1+b_1^1 & b_1^2 & c_1^3-\beta_2-\beta_3 b_1^3-\beta_2\gamma_1-\gamma_1 c_1^1 \\ a_2^1 & b_2^1 & b_2^2 & c_2^3-\beta_3 b_2^3-\gamma_1 c_2^1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.35)$$

Полагая $\gamma_1=\text{const}$ $(\gamma_1\neq-1)$ будем иметь, что вершина S конуса (2.33) в этом случае описывает плоскость

$$[(a_1^1b_2^3-a_2^1b_1^3+2b_1^2b_2^3-2b_2^2b_1^3+b_1^1b_2^3-b_2^1b_1^3+a_2^1b_1^1-$$
$$-a_1^1b_2^1+2b_1^1b_2^2-2b_1^2b_2^1+b_2^3-b_2^1)x^1+(a_1^1b_2^3-a_2^1b_1^3+2b_1^2b_2^3-2b_2^2b_1^3+b_1^1b_2^3-$$

$$
\begin{aligned}
&-b_2^1 b_1^3+b_1^2 b_2^1-b_1^1 b_2^2-a_1^1 b_2^2+a_2^1 b_1^2+b_2^3-b_2^2)\, x^2+\\
&+(a_2^1 b_1^2-a_1^1 b_2^2+a_2^1 b_1^1-a_1^1 b_2^1+b_1^1 b_2^2-b_1^2 b_2^1-b_2^2-b_2^1)\, x^3+\\
&+(a_1^1 c_2^3-a_2^1 c_1^3+2b_1^2 c_2^3-2b_2^2 c_1^3+b_1^1 c_2^3-b_2^1 c_1^3+c_2^3)\, x^4]\,\gamma_1+\\
&+[(a_2^1 b_1^1-a_1^1 b_2^1+2b_1^1 b_2^2-2b_1^2 b_2^1-b_2^1)\, x^1+\\
&+(2a_1^1 b_2^2-2a_2^1 b_1^2+a_1^1 b_2^1-a_2^1 b_1^1-a_2^1)\, x^2-(a_2^1+2b_2^2+b_2^1)\, x^3+\\
&+(a_2^1 c_1^1-a_1^1 c_2^1+2b_2^2 c_1^1-2b_1^2 c_2^1-b_1^1 c_2^1+b_2^1 c_1^1-c_2^1)\, x^4]=0.
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

При изменении γ_1, уравнение (2.36) является уравнением пучка плоскостей, ось которого следующая:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(a_1^1 b_2^3-a_2^1 b_1^3+2b_1^2 b_2^3-2b_2^2 b_1^3+b_1^1 b_2^3-b_2^1 b_1^3+\\
&+a_2^1 b_1^1-a_1^1 b_2^1+2b_1^1 b_2^2-2b_1^2 b_2^1+b_2^3-b_2^1)\, x^1+\\
&+(a_1^1 b_2^3-a_2^1 b_1^3+2b_1^2 b_2^3-2b_2^2 b_1^3+b_1^1 b_2^3-b_2^1 b_1^3+\\
&+b_1^2 b_2^1-b_1^1 b_2^2-a_1^1 b_2^2+a_2^1 b_1^2+b_2^3-b_2^2)\, x^2+\\
&+(a_2^1 b_1^2-a_1^1 b_2^2+a_2^1 b_1^1-a_1^1 b_2^1+b_1^1 b_2^2-b_1^2 b_2^1-b_2^2-b_2^1)\, x^3+\\
&+(a_1^1 c_2^3-a_2^1 c_1^3+2b_1^2 c_2^3-2b_2^2 c_1^3+b_1^1 c_2^3-b_2^1 c_1^3+c_2^3)\, x^4=0,\\
&(a_2^1 b_1^1-a_1^1 b_2^1+2b_1^1 b_2^2-2b_1^2 b_2^1-b_2^1)\, x^1+\\
&+(2a_1^1 b_2^2-2a_2^1 b_1^2+a_1^1 b_2^1-a_2^1 b_1^1-a_2^1)\, x^2-(a_2^1+2b_2^2+b_2^1)\, x^3+\\
&+(a_2^1 c_1^1-a_1^1 c_2^1+2b_2^2 c_1^1-2b_1^2 c_2^1-b_1^1 c_2^1+b_2^1 c_1^1-c_2^1)\, x\;=0.
\end{aligned}
\right.
\tag{2.37}
$$

7. Требуем неподвижности прямой

$$
\left\{
\begin{aligned}
&x^3=\gamma_2 x^2,\\
&x^4=0
\end{aligned}
\right.
$$

и конической поверхности (2.33), проходящей через кривую (1.1). Для получения результатов в этом случае достаточно в результатах п. 6 произвести замену индексов: $1\leftrightarrow 2$. Конкретно, после упомянутой замены индексов система уравнений (2.37) принимает следующий вид:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(a_2^2 b_1^3-a_1^2 b_2^3+2b_2^1 b_1^3-2b_1^1 b_2^3+b_2^2 b_1^3-b_1^2 b_2^3+\\
&+b_2^1 b_1^2-b_1^1 b_2^2-a_2^2 b_1^1+a_1^2 b_2^1+b_1^3-b_1^1)\, x^1+\\
&+(a_2^2 b_1^3-a_1^2 b_2^3+2b_2^1 b_1^3-2b_1^1 b_2^3+b_2^2 b_1^3-\\
&-b_1^2 b_2^3+a_1^2 b_2^2-a_2^2 b_1^2+2b_1^1 b_2^2-2b_2^1 b_1^2+b_1^3-b_1^2)\, x^2+\\
&+(a_1^2 b_2^1-a_2^2 b_1^1+a_1^2 b_2^2-a_2^2 b_1^2+b_1^1 b_2^2-b_2^1 b_1^2-b_1^1-b_1^2)\, x^3+\\
&+(a_2^2 c_1^3-a_1^2 c_2^3+2b_2^1 c_1^3-2b_1^1 c_2^3+b_2^2 c_1^3-b_1^2 c_2^3+c_1^3)\, x^4=0,\\
&(2a_2^2 b_1^1-2a_1^2 b_2^1+a_2^2 b_1^2-a_1^2 b_2^2-a_1^2)\, x^1+\\
&+(a_1^2 b_2^2-a_2^2 b_1^2+2b_1^1 b_2^2-2b_2^1 b_1^2-b_1^2)\, x^2-(a_1^2+2b_1^1+b_1^2)\, x^3+\\
&+(a_1^2 c_2^2-a_2^2 c_1^2+2b_1^1 c_2^2-2b_2^1 c_1^2-b_2^2 c_1^2+b_1^2 c_2^2-c_1^2)\, x^4=0.
\end{aligned}
\right.
\tag{2.38}
$$

Прямые (2.37) и (2.38) пересекают прямую (2.29).

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору К. И. Гринцевичюсу за постановку задачи и неустанное внимание при ее решении.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
27.X.1970

Литература

1. Г. Ф. Лаптев, Геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического общества, 1953, 2, 275–382.
2. А. Ю. Пекарскене, О некоторых семействах вырожденных плоских кривых третьего порядка в P_3, Лит. матем. сб., **X**, 3(1970), 644–645.
3. А. Ю. Пекарскене, О многообразии вырожденных плоских кривых третьего порядка в трехмерном проективном пространстве, Лит. матем. сб., **XI**, 2 (1971), 178–179.
4. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М.–Л., 1948.
5. A. Kawaguchi, Über die Differentialgeometrie von Kegelschnitten im Dreidimentionalen projektiven Raume, Journ. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., 1930, Ser. 1, Vol. 1, N 1, 1—23.

IŠSIGIMUSIŲ PLOKŠČIŲ TREČIOS EILĖS KREIVIŲ DAUGDAROS ERDVĖJE P_3 GEOMETRIJOS KLAUSIMU

A. Pekarskienė

(*Reziumė*)

Straipsnyje G. Laptevo metodu nagrinėjamos aštuonparametrinės daugdaros, kurios sudaromuoju elementu yra plokštuma, joje gulinti antros eilės kreivė ir ją kertanti dviejuose realiuose taškuose tiesė, pirmos eilės diferencialinė aplinka. Surasta eilė diferencialinių-geometrinių objektų ir išaiškinta jų geometrinė prasmė.

ÜBER GEOMETRIE DER MANNIGFALTIGKEIT DER ABARTIGEN EBENEN KURVEN DRITTER ORDNUNG IM PROJEKTIVEN RAUME P_3

A. Pekarskienė

(*Zusammenfassung*)

Im vorliegenden Artikel wird die Differentialumgebung erster Ordnung der achtparametrigen Mannigfaltigkeit mit Hilfe der Methode von G. Laptew behandelt. Ein bildendes Element dieser Mannigfaltigkeit ist eine Ebene, die darauf liegende Kurve zweiter Ordnung und eine Gerade, die zwei reelle gemeinsame Punkte mit dieser Kurve hat. Es ist eine Reihe von den geometrisch-differentialen Objekten gefunden und ihre geometrische Interpretation aufgeklärt.