УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ НЕОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Л. И. Саулис

Пусть $\xi_j=(\xi_{j1}, \xi_{j2}, \ldots, \xi_{jk})$, $j=1, 2, \ldots, n$, – независимые неодинаково распределенные векторы k-мерного евклидова пространства R_k. Предположим, что математические ожидания компонент вектора ξ_j равны нулю.

Введем следующие обозначения: $(\mathbf{t},\mathbf{x})$ – скалярное произведение k-мерных векторов $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ и $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ пространства R_k, $|\mathbf{t}|$ – длина вектора $\mathbf{t}$; σ_{jl}^2 – дисперсия случайной величины ξ_{jl}, $j=1, 2, \ldots, n$, $l=1, 2, \ldots, k$, $|\sigma_j|$ – длина вектора

$$\boldsymbol{\sigma}_j=(\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, \ldots, \sigma_{jk}),\quad B_{nl}^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_{jl}^2,$$

$|B_n|$ – длина вектора $\mathbf{B}_n=(B_{n1}, B_{n2}, \ldots, B_{nk})$;

$$\tilde{\sigma}_l^2=\frac{B_{nl}^2}{n},\quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}=(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \ldots, \tilde{\sigma}_k);$$

$\gamma_j=\frac{\xi_j}{\tilde{\sigma}}=\left(\frac{\xi_{j1}}{\tilde{\sigma}_1}, \frac{\xi_{j2}}{\tilde{\sigma}_2}, \ldots, \frac{\xi_{jk}}{\tilde{\sigma}_k}\right)$ – случайный вектор с функцией распределения $F_j(\mathbf{x})$, $f_j(\mathbf{t})$ – характеристическая функция вектора γ_j; $\boldsymbol{\Theta}=(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$ – k-мерный случайный вектор с функцией распределения $F(\mathbf{x})=$ $=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x})$, V – ковариационная матрица вектора $\boldsymbol{\Theta}$, Δ – определитель матрицы V, $Q(\mathbf{t})=\mathbf{t}V\mathbf{t}'=\mathbf{M}[(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{t})^2]$ – квадратная форма, $\mathbf{t}'$ – вектор-столбец; $\beta_r(\mathbf{t})$ и $\varkappa_{rj}(\mathbf{t})$ – абсолютный момент и семиинвариант r-того порядка случайных величин $(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{t})$ и $(\gamma_j, \mathbf{t})$, $\mathbf{t}\in R_k$ соответственно; $\varkappa_r(\mathbf{t})=$ $=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varkappa_{rj}(\mathbf{t})$; $f_n(\mathbf{t})$ и $p_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{x})$ – характеристическая функция и плотность распределения нормированной суммы

$$\mathbf{S}_n=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\xi_{j1}}{B_{n1}}, \frac{\xi_{j2}}{B_{n2}}, \ldots, \frac{\xi_{jk}}{B_{nk}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \ldots, \gamma_{jk}).$$

Через $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(p)}|\sigma_j|$ обозначим p-тый максимум совокупности

$$|\sigma_1|, |\sigma_2|, \ldots, |\sigma_n|, \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}^{(1)}|\sigma_j|\geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)}|\sigma_j|\geqslant\cdots\right).$$

Нам понадобятся многочлены $P_r(it)$, определяемые с помощью формального равенства

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{s-3}\frac{\varkappa_{\nu+2}(it)}{(\nu+2)!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right\}=1+$$

$$+\sum_{r=1}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r}P_r(it)+\sum_{r=s-2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r}\bar{P}_r(it).$$

Пусть

$$P_r(-\varphi)(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}P_r(it)\,e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}\,d\mathbf{t}.$$

Для вычисления интеграла $P_r(-\varphi)(\mathbf{x})$ достаточно в полиномах $P_r(i\mathbf{t})$ вместо произведения $(it_1)^{l_1}(it_2)^{l_2}\ldots(it_k)^{l_k}$ подставить

$$(-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_k}\frac{\partial^{l_1+l_2+\cdots+l_k}\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}\ldots\partial x_k^{l_k}},$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ — плотность k-мерного нормального закона:

$$\varphi(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}e^{-\mathbf{t}(\mathbf{t},\mathbf{x})-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}\,d\mathbf{t}.$$

Настоящая заметка посвящена изучению строения остаточного члена в асимптотическом разложении плотности распределения сумм независимых неодинаково распределенных случайных векторов. При $k=1$ этот вопрос глубоко изучил В. А. Статулявичус в [3].

Случай, когда ξ_j одинаково распределены, исследован А. Бикялисом в [6].

Теорема. *Если случайные векторы ξ_j имеют конечные моменты s-того порядка ($s\geqslant 3$) и ограниченные плотности $p_{\xi_j}(\mathbf{x})\leqslant A_j<\infty$, причем выполняются условия:*

1) *ковариационная матрица V невырождена,*

2) *существует константа M такая, что для всех $j=1, 2, \ldots, n$*

$$|\sigma_j|^{2k}A_j^2\leqslant M,$$

то

$$p_{S_n}(\mathbf{x})=\sum_{r=0}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r}P_r(-\varphi)(\mathbf{x})+R_n(\mathbf{x}),$$

где

$$\sup_{x} |R_n(x)| \leqslant \frac{2^{3s+2}(3s+k-2)^{s-2}\,\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{(s+k-2)\,\pi^{\frac{k}{2}}\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|t|=1} \frac{\beta_s(t)}{Q^{\frac{s}{2}}(t)} +$$

$$+ 2\left(\frac{4\pi M}{C_k}\right)^{\frac{k}{2}} \exp\left\{ - \frac{C_k}{16\pi^2 kM} \min\left[\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|t|=1} \frac{\beta_s(t)}{Q^{\frac{s}{2}}(t)}\right)^{-\frac{2}{3(s-2)}},\right.\right.$$

$$\left.\left. C^2\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|t|=1} \frac{\beta_s(t)}{Q^{\frac{s}{2}}(t)}\right)^{-\frac{2}{s-2}}\right]\right\} +$$

$$+ \left(\frac{4\pi M |B_n|^2}{C_k \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1}}^{n} |\sigma_j|^2}\right)^{\frac{k}{2}} \exp\left\{ - \frac{C_k}{16M} \frac{|B_n|^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sigma_j|^2}\right\} +$$

$$+ \frac{\sqrt{M}\,|B_n|^k}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(2)} |\sigma_j|^k}\left(\exp\left\{ - \frac{C_k}{8M} \frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1,\, j\neq r_2}}^{n} |\sigma_j|^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(2)} |\sigma_j|^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{C_k}{M}(n-2)\right\}\right).$$

Здесь $C_k = C' Q_{k-1}^2$, C' *— абсолютная константа,* Q_{k-1} *— объем* $(k-1)$*-мерной единичной сферы;* $C = \min\left\{\frac{1}{4}, \left(\frac{s}{3\cdot 4^s}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right\}$, *а* r_1 *и* r_2 *определяются по условиям:*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(1)} |\sigma_j| = |\sigma_{r_1}|, \quad \max_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(2)} |\sigma_j| = |\sigma_{r_2}|.$$

Замечание (см. [7]). Наименьшее значение $|\sigma_j|^2$ при условии $p_{\xi_j}(x) \leqslant A_j$ равно

$$[k/k+2)] \cdot \left[\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\right]^{\frac{2}{k}} \pi^{-1} A_j^{-\frac{2}{k}}.$$

Оно достигается при равномерном распределении ξ_j внутри k-мерной сферы объема A_j^{-1} с центром в начале координат. Следовательно, условие 2 означает, что отношеиие $|\sigma_j|^2$ к ее минимально возможному значению остается ограниченным при изменении j.

Для доказательства теоремы нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1 (см. [7]). *Если k-мерный случайный вектор ξ имеет плотность распределения $p(x)$, ограниченную константой A* $M\xi = 0$, и $|\sigma|^2 = M|\xi|^2 < \infty$, *то для характеристической функции $\varphi(t)$ справедливо неравенство:*

$$\sup_{|t|\geqslant \frac{\pi}{|\sigma|}} |\varphi(t)| \leqslant 1 - \frac{C_k}{|\sigma|^{2k} A^2},$$

где $C_k = C' Q_{k-1}^2$, C' *— абсолютная константа, а* Q_{k-1} *— объем* $(k-1)$*-мерной единичной сферы.*

Следующая лемма является многомерным аналогом известной леммы Крамера [4].

Лемма 2 (см. [7]). *Если* $\varphi(\mathbf{t})$ *многомерная характеристическая функция, такая, что* $|\varphi(\mathbf{t})| \leqslant p < 1$ *при* $|\mathbf{t}| \geqslant b$, *то при* $|\mathbf{t}| < b$

$$|\varphi(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{1-p^2}{8b^2}|\mathbf{t}|^2\right\}.$$

Для характеристической функции $f_n(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{n} f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)$ нормированной суммы $\mathbf{S}_n$ справедлива следующая.

Лемма 3 (см. [5]). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *независимые случайные векторы с конечными моментами* s-*го порядка* ($s \geqslant 3$). *Тогда*

$$f_n(\mathbf{t}) = e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}\left(1 + \sum_{r=1}^{s-3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r P_r(i\mathbf{t})\right) + \frac{4^s\beta_s(\mathbf{t})}{n^{\frac{s-2}{2}}}e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}},$$

при

$$\mathbf{t} \in D \cap N,$$

где

$$D = \left\{\mathbf{t}:\ Q(\mathbf{t})\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \sqrt{n}\right\},$$

$$N = \left\{\mathbf{t}:\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{1}{s-2}} \leqslant C\sqrt{n}\right\},\quad C = \min\left\{\frac{1}{4},\ \left(\frac{s}{3\cdot 4^s}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right\}.$$

Лемма 4 (см. [5]).

$$|\bar{P}_r(i\mathbf{t})| \leqslant 2^r\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{r}{s-2}} \cdot \sum_{\nu=1}^{r}\frac{[Q(\mathbf{t})]^\nu}{4^\nu\,\nu!},\quad r = s-2,\ s-1,\ s,\ \ldots$$

Замечание. Для многочленов $P_r(i\mathbf{t})$ при $r \leqslant s-2$ также верна эта оценка.

Лемма 5. *Пусть для случайных векторов* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *с ограниченными плотностями* $p_{\xi_j}(\mathbf{x}) \leqslant A_j < \infty$ *выполнено условие*:

существует конечное число M *такое, что для всех* $j = 1, 2, \ldots, n$

$$|\sigma_j|^{2k}A_j^2 \leqslant M.$$

Тогда при $|\mathbf{t}| \leqslant \frac{\pi|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\sigma_j|}$ *имеет место следующая оценка*:

$$|f_n(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{C_k}{8\pi^2 M}|\mathbf{t}|^2\right\}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right),$$

где $\varphi_j(\mathbf{t})$ — характеристическая функция случайного вектора ξ_j. Принимая во внимание тот факт, что область

$$\left|\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right| \geqslant \frac{\pi}{|\sigma_j|}$$

содержит в себе область

$$|\mathbf{t}| \geqslant \frac{\pi\,|B_n|}{|\sigma_j|},$$

согласно лемме 1 имеем

$$\sup_{|\mathbf{t}| \geqslant \frac{\pi |B_n|}{|\sigma_j|}} \left|\varphi_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right| \leqslant 1 - \frac{C_k}{|\sigma_j|^{2k} A_j^2}. \tag{1}$$

Тогда, учитывая условие настоящей леммы, при помощи леммы 2 получаем:

$$\sup_{|\mathbf{t}| < \frac{\pi |B_n|}{|\sigma_j|}} \left|\varphi_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{C_k\,|\sigma_j|^2}{8\pi^2 M\,|B_n|^2}\,|\mathbf{t}|^2\right\}. \tag{2}$$

Отсюда, замечая что $|B_n|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} |\sigma_j|^2$, находим

$$|f_n(\mathbf{t})| = \prod_{j=1}^{n} \left|\varphi_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{C_k}{8\pi^2 M}\,|\mathbf{t}|^2\right\},$$

при

$$|\mathbf{t}| \leqslant \frac{\pi\,|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sigma_j|}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Ввиду того, что случайные векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют ограниченные плотности, нормированная сумма $\mathbf{S}_n$ тоже будет иметь плотность

$$p_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k} e^{-i\varkappa(\mathbf{t},\mathbf{x})} f_n(\mathbf{t})\,dt;$$

и поскольку

$$\sum_{r=0}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r P_r(-\varphi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}} \sum_{r=0}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r P_r(i\mathbf{t})\,dt,$$

то

$$R_n(\mathbf{x}) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \tag{3}$$

Здесь

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{D\cap N} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})} \left[f_n(\mathbf{t}) - e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}} \sum_{r=1}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r P_r(i\mathbf{t})\right] dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k \setminus (D\cap N)} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}} \sum_{r=0}^{s-3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r P_r(i\mathbf{t})\,dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{G_3} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})} f_n(\mathbf{t})\,dt,$$

где

$$G_3 = \left\{ \mathbf{t} : \mathbf{t} \in R_k \setminus (D \cap N), \ |\mathbf{t}| \leqslant \frac{\pi |B_n|}{\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\sigma_j|} \right\};$$

$$I_4 = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{G_4} e^{-i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} f_n(\mathbf{t})\, d\mathbf{t},$$

где

$$G_4 = \left\{ \mathbf{t} : \frac{\pi |B_n|}{\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\sigma_j|} < |\mathbf{t}| \leqslant \frac{\pi |B_n|}{\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\sigma_j|} \right\};$$

$$I_5 = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{G_5} e^{-i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} f_n(\mathbf{t})\, d\mathbf{t},$$

где

$$G_5 = \left\{ \mathbf{t} : |\mathbf{t}| > \frac{\pi |B_n|}{\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\sigma_j|} \right\}.$$

Оценим интегралы I_1 и I_2. В силу леммы 3

$$|I_1| \leqslant \frac{4^s}{(2\pi)^k n^{\frac{s-2}{2}}} \int\limits_{R_k} \beta_s(\mathbf{t})\, e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}}\, d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^s}{(2\pi)^k} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})} \cdot \int\limits_{R_k} Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})\, e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{4}}\, d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{3s}\, \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{\pi^{\frac{k}{2}} \sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}, \tag{4}$$

так как

$$\int\limits_{R_k} Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})\, e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{4}}\, d\mathbf{t} = \frac{2^{s+k} \pi^{\frac{k}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{\sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

При помощи замечания леммы 4 получаем

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k \setminus (D \cap N)} e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{2}} \sum_{r=0}^{s-3} \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^r \left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{r}{s-2}} \cdot \sum_{\nu=1}^{r} \frac{[Q(\mathbf{t})]^\nu}{4^\nu \nu!}\, d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k \setminus D} e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{4}} \cdot \sum_{r=0}^{s-3} \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^r \left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{r}{s-2}} d\mathbf{t} +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k \setminus N} e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{4}} \cdot \sum_{r=0}^{s-3} \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^r \left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{r}{s-2}} d\mathbf{t}. \tag{5}$$

Из определения области N имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k\setminus N} e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{4}}\sum_{r=0}^{s-3}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^r\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{r}{s-2}}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\pi)^k C^{s-2}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\cdot\sum_{r=0}^{s-3}(2C)^r\int\limits_{R_k}Q^{\frac{s-2}{2}}(\mathbf{t})\,e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{4}}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^s\,\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{(s+k-2)\,\pi^{\frac{k}{2}}\,C^{s-2}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\Delta}}\;\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}, \tag{6}$$

поскольку

$$C=\min\left\{\frac{1}{4},\ \left(\frac{s}{3\cdot 4^s}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right\}\leqslant\frac{1}{4}.$$

Далее,

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k\setminus D} e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{4}}\sum_{r=0}^{s-3}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^r\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{r}{s-2}}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\pi)^k}\cdot\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\sum_{r=0}^{s-3}2^r\int\limits_{R_k}[Q(\mathbf{t})]^{\frac{3(s-2)-2r}{2}}e^{-\frac{Q(\mathbf{t})}{4}}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{3(s-2)}}{\pi^{\frac{k}{2}}\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\;\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\sum_{r=0}^{s-3}\left(\frac{1}{2}\right)^r\Gamma\left(\frac{3(s-2)-2r+k}{2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4\cdot 2^{3(s-2)}}{3\cdot\pi^{\frac{k}{2}}\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\,\Gamma\left(\frac{3s+k}{2}-3\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{2(s-1)}(3s+k-8)^{s-3}\,\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{\pi^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\Delta}}\;\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}, \tag{7}$$

так как

$$\Gamma\left(\frac{3s+k}{2}-3\right)=\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)\cdot\prod_{j=4}^{s}\left(\frac{s+k}{2}+s-j\right)\leqslant\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)\left(\frac{3s+k-8}{2}\right)^{s-3}.$$

Неравенства (5)—(7) позволяют утверждать, что

$$|I_2|\leqslant\frac{2^s\,\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{(s+k-2)\,\pi^{\frac{k}{2}}\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\;\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\times$$

$$\times\left[\left(2\,(3s+k-8)\right)^{s-2}+\max\left\{4^{s-2},\ \frac{3\cdot 4^s}{s}\right\}\right].$$

Отсюда и из оценки (4), учитывая, что $\max\left\{4^{s-2}, \frac{3-4^s}{s}\right\} \leqslant 4^s$ при $s \geqslant 3$, окончательно получаем

$$|I_1+I_2| \leqslant \frac{2^{3s+2}(3s+k-8)^{s-2}}{(s+k-2)\,\pi^{\frac{k}{2}}\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}. \tag{8}$$

Перейдем к оценке интеграла I_3. Принимая во внимание определение области $D=\left\{\mathbf{t}:\ Q(\mathbf{t})\left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \sqrt{n}\right\}$ и то, что

$$Q(\mathbf{t}) = \mathbf{M}\left[(\Theta,\ \mathbf{t})^2\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}\left(\frac{\xi_j}{\mathbf{B}_n},\ \mathbf{t}\right)^2 \leqslant k\,|\mathbf{t}|^2, \tag{9}$$

выводим

$$|\mathbf{t}| \leqslant k^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\right)^{-\frac{1}{3(s-2)}}.$$

Аналогично, вспомнив определение области $N=\left\{\mathbf{t}:\ \left(\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q(\mathbf{t})}\right)^{\frac{1}{s-2}} \leqslant C\sqrt{n}\right\}$ и используя оценку (9), выводим

$$|\mathbf{t}| \leqslant C k^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\right)^{-\frac{1}{s-2}}.$$

Имеем:

$$|I_3| = \left|\frac{1}{(2\pi)^k} \int_{G_3} e^{-i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})} f_n(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{G_3^{(1)}} |f_n(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} + \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{G_3^{(2)}} |f_n(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t},$$

где

$$G_3^{(1)} = \left\{\mathbf{t}:\ k^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\right)^{-\frac{1}{3(s-2)}} \leqslant |\mathbf{t}| \leqslant \frac{\pi\,|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sigma_j|}\right\},$$

$$G_3^{(2)} = \left\{\mathbf{t}:\ Ck^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\right)^{-\frac{1}{s-2}} \leqslant |\mathbf{t}| \leqslant \frac{\pi\,|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sigma_j|}\right\}.$$

Привлекая лемму 5 находим, что

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{G_3^{(1)}} |f_n(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}+\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{G_3^{(2)}} |f_n(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\exp\left\{-\frac{C_k C^2}{16\pi^2 kM}\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\right)^{-\frac{2}{s-2}}\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{-\frac{C_k}{16\pi^2 kM}\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\right)^{-\frac{2}{3(s-2)}}\right\}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R_k}\exp\left\{-\frac{C_k}{8\pi^2 M}\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}\right\}d\mathbf{t}\leqslant 2\left(\frac{4\pi M}{C_k}\right)^{\frac{k}{2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{C_k}{16\pi^2 kM}\min\left[\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\right)^{-\frac{2}{3(s-2)}},\right.\right.$$

$$\left.\left.C^2\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}\right)^{-\frac{2}{s-2}}\right]\right\}. \tag{10}$$

Отметим, что

$$\frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\beta_s(\mathbf{t})}{Q^{\frac{s}{2}}(\mathbf{t})}=\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbf{M}\left|\left(\frac{\xi_j}{\mathbf{B}_n},\mathbf{t}\right)\right|^s}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbf{M}\left(\frac{\xi_j}{\mathbf{B}_n},\mathbf{t}\right)^2\right]^{\frac{s}{2}}}.$$

При оценке интеграла I_4 поступаем следующим образом:

$$I_4=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{G_4} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})} f_n(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\frac{\pi|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(1)}|\sigma_j|}\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\pi|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)}|\sigma_j|}} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})} f_n(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\frac{\pi|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)}|\sigma_j|}\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\pi|B_n|}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\sigma_j|}} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})} f_n(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}=I_4^{(1)}+I_4^{(2)}. \tag{11}$$

При помощи неравенств (1), (2) и условия 2 доказываемой теоремы находим, что при

$$\frac{\pi\,|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(1)}|\sigma_j|}\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\pi\,|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(2)}|\sigma_j|}$$

$$|f_n(\mathbf{t})|\leqslant\exp\left\{-\frac{C_k}{8\pi^2M}\,\frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1}}^{n}|\sigma_j|^2}{|B_n|^2}\,|\mathbf{t}|^2-\frac{C_k}{M}\right\}.$$

Здесь r_1 определяем по условию $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(1)}|\sigma_j|=|\sigma_{r_1}|$.

Следовательно,

$$|I_4^{(1)}|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^k}\,e^{-\frac{C_k}{M}}\int\limits_{\frac{\pi\,|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(1)}|\sigma_j|}\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\pi\,|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(2)}|\sigma_j|}}\exp\left\{-\frac{C_k}{8\pi^2M}\,\frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1}}^{n}|\sigma_j|^2}{|B_n|^2}\,|\mathbf{t}|^2\right\}d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\pi)^k}\,e^{-\frac{C_k}{M}}\exp\left\{-\frac{C_k\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1}}|\sigma_j|^2}{16\,M\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(1)}|\sigma_j|^2}\right\}\times$$

$$\times\int\limits_{R_k}\exp\left\{-\frac{C_k}{8\pi^2M}\,\frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1}}|\sigma_j|^2}{|B_n|^2}\,\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}\right\}d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{4\pi\,M\,|B_n|^2}{C_k\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1}}^{n}|\sigma_j|^2}\right)^{\frac{k}{2}}\exp\left\{-\frac{C_k}{16\,M}\,\frac{|B_n|^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\sigma_j|^2}\right\}. \tag{12}$$

Далее, используя неравенства (1) и (2), получаем, что

$$\left|\varphi_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right|\leqslant\exp\left\{-\frac{C_k}{8\,M}\,\frac{|\sigma_j|^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(2)}|\sigma_j|^2}\right\}$$

при

$$\frac{\pi\,|B_n|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}{}^{(2)}|\sigma_j|}\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{\pi\,|B_n|}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\sigma_j|},$$

для всех $j=\overline{1,\,n}$, $j\neq r_1$.

Отсюда следует, что

$$|I_4^{(2)}| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^k} \exp\left\{ -\frac{C_k}{8M} \frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1,\, j\neq r_2}}^{n} |\sigma_j|^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)} |\sigma_j|^2} \right\} \times$$

$$\times \int\limits_{R_k} \left| \varphi_{r_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right) \varphi_{r_2}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right) \right| d\mathbf{t}. \tag{13}$$

Здесь r_2 находим из условия $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)} |\sigma_j| = |\sigma_{r_2}|$. Согласно многомерному равенству Парсеваля ([6], стр 67),

$$\frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R_k} |\varphi_{r_1}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} = \int\limits_{R_k} p^2_{\xi_{r_1}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Следовательно, учитывая условие 2 теоремы и обобщенное неравенство Гельдера ([8] стр. 197), имеем:

$$\int\limits_{R_k} \left| \varphi_{r_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right) \varphi_{r_2}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right) \right| d\mathbf{t} \leqslant |B_n|^k \left(\int\limits_{R_k} |\varphi_{r_1}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{R_k} |\varphi_{r_2}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^k |B_n|^k (A_{r_1} A_{r_2})^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{(2\pi)^k \sqrt{M} |B_n|^k}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)} |\sigma_j|^k}. \tag{14}$$

Из неравенств (14) и (13) следует, что

$$|I_4^{(2)}| \leqslant \frac{\sqrt{M} |B_n|^k}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)} |\sigma_j|^k} \exp\left\{ -\frac{C_k}{8M} \frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1,\, j\neq r_2}}^{n} |\sigma_j|^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)} |\sigma_j|^2} \right\}. \tag{15}$$

Соотношение (11) и неравенства (12), (15) позволяют утверждать, что

$$|I_4| \leqslant \left(\frac{4\pi M |B_n|^2}{C_k \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1}}^{n} |\sigma_j|^2} \right)^{\frac{k}{2}} \exp\left\{ -\frac{C_k}{16M} \frac{|B_n|^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sigma_j|^2} \right\} +$$

$$+ \frac{\sqrt{M} |B_n|^k}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)} |\sigma_j|^k} \exp\left\{ -\frac{C_k}{8M} \frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1,\, j\neq r_2}}^{n} |\sigma_j|^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)} |\sigma_j|^2} \right\}. \tag{16}$$

Осталось оценить интеграл I_5. Используя неравенство (1) и условие 2 доказываемой теоремы находим, что

$$|f_n(\mathbf{t})| = \prod_{j=1}^{n} \left| \varphi_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right| \leqslant \left| \varphi_{r_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right) \varphi_{r_2}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right| \exp\left\{ -\frac{C_k}{M}(n-2)\right\},$$

при

$$|\mathbf{t}| \geqslant \frac{\pi |B_n|}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sigma_j|}.$$

Следовательно, используя оценку (14), имеем

$$|I_5| = \left| \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{|\mathbf{t}| \geqslant \frac{\pi |B_n|}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sigma_j|}} e^{-i(\mathbf{t},\, \mathbf{x})} f_n(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^k} \exp\left\{ -\frac{C_k}{M}(n-2)\right\} \cdot \int\limits_{R_k} \left| \varphi_{r_1}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right) \varphi_{r_2}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right| d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{M}\, |B_n|^k}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}^{(2)} |\sigma_j|^k} \exp\left\{ -\frac{C_k}{M}(n-2)\right\}. \tag{17}$$

Утверждение теоремы следует из соотношений (3), (8), (10), (16) и (17).

Впрочем, если кроме условий 1 и 2 настоящей теоремы выполнено условие

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sigma_j|}{|B_n|} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

то интегралы I_3, I_4 и I_5 стремятся к нулю при $n\to\infty$, ибо тогда

$$\frac{|B_n|^2}{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1}}^{n} |\sigma_j|^2} = 1 + o(1), \quad \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r_1,\, j\neq r_2}}^{n} |\sigma_j|^2 = |B_n|^2\bigl(1+o(1)\bigr), \quad |B_n| = o\left(e^{\beta_k n}\right),$$

где β_k — положительная величина. Отсюда, впрочем, легко следует доказательство теорем 1 и 2 статьи [5].

Автор искренне благодарен проф. В. А. Статулявичусу за постановку задачи и постоянное внимание к работе и доц. А. Бикялису за ряд ценных советов.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
8.XII.1970

Литература

1. Ю. В. Прохоров, Локальная теорема для плотностей, ДАН, **83**, № 6(1952) 797–800.
2. П. Сурвила, О локальной предельной теореме для плотностей, Лит. матем. сб., **III**, 2(1963), 225–236.
3. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределении сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., **10**, 4 (1965), 645–659.
4. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, 1947.
5. А. Бикялис, Об асимптотическом разложении для произведений многомерных характеристических функций, Теория вероятн. и ее примен., XIV, вып. 3 (1969), 508–511.
6. А. Бикялис, Асимптотические разложения для плотностей и распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов, Лит. матем. сб., VIII, 3(1968), 405–422.
7. Т. Л. Шервашидзе, Л. И. Саулис, О многомерных предельных теоремах для плотностей распределения, Сообщ. АН Груз. ССР № 3(1970).
8. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд и Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, М., 1948.
9. S. Bochner, K. Chandrasekharan, Fourier Transforms, Princeton.

NEPRIKLAUSOMŲ NEVIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ DAUGIAMAČIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMOS TANKIO ASIMPTOTINIS DĖSTINYS

L. Saulis

(*Reziumė*)

Darbe gautas nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių vektorių normuotos su mos tankio asimptotinis dėstinys. Išnagrinėta liekamojo nario struktūra.

ON AN ASYMPTOTIC EXPANSION OF INDEPENDENT RANDOMLY DISTRIBUTED MULTIDIMENSIONAL RANDOM VARIABLES SUM DENSITY

L. Saulis

(*Summary*)

The asymptotic expansion of randomly distributed independent random vectors sum density is obtained. The structure of the remainder term is investigated as well.