УДК 513

О НЕГОЛОНОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ОБОБЩЕННОГО ЕВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Л. И. Стиклаките

В этой статье рассматривается неголономная гиперповерхность обобщенного евклидового пространства, оснащенная левой нормалью, нормалью и правой нормалью. Найдены левые кривизны, кривизны и правые кривизны первого и второго рода интегральных кривых рассматриваемой гиперповерхности, а также определены линии кривизны этой гиперповерхности.

В работе основным аппаратом исследования является теоретико-групповой метод дифференциально-геометрического исследования погруженных многообразий, развитый Г. Ф. Лаптевым (см. [6]).

1. Определение неголономной гиперповерхности пространства H_n

Обобщенным евклидовым n-мерным пространством H_n называется вещественное ориентированное n-мерное аффинное пространство, в котором определено скалярное произведение векторов при помощи не вырожденного дважды ковариантного несимметрического тензора h_{ij}, симметрическая часть которого определяет некоторую собственно евклидовую метрику (см. [1]). Структурные уравнения пространства H_n имеют вид ($i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, \ldots, n-1$):

$$\begin{aligned} &D\,\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k, \\ &D\,\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k, \\ &\nabla h_{ij} \equiv h_{kj}\,\omega^k_i + h_{ik}\,\omega^k_j = 0, \qquad h_{ij} \neq \pm h_{ji}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Гиперповерхность H_{n-1} обобщенного евклидового пространства определяется дифференциальными уравнениями

$$\omega^i = \Lambda^i_\alpha\,\Theta^\alpha, \tag{1.2}$$

$$(\nabla\Lambda^i_\alpha + \ldots) \wedge \Theta^\alpha = 0,$$

где

$$\begin{aligned} &D\,\Theta^\alpha = \Theta^\beta \wedge \Theta^\alpha_\beta, \\ &D\,\Theta^\alpha_\beta = \Theta^\gamma_\beta \wedge \Theta^\alpha_\gamma + \Theta^\gamma \wedge \Theta^\alpha_{\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Векторы

$$\Lambda_\alpha = \Lambda^i_\alpha\,\mathbf{e}_i$$

образуют базис касательной гиперплоскости E_{n-1} гиперповерхности H_{n-1}.

Величины Λ^i_α являются компонентами дифференциально-геометрического объекта, который называется первым фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом $H^{(1)}$ гиперповерхности $H_{n-1} \subset H_n$. В частично канонизированном репере, т.е. при $\Lambda^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$, и $\Lambda^n_\beta = 0$, гиперповехность H_{n-1} определяется уравнениями

$$\omega^n = 0, \tag{1.4}$$

а поле дифференциально-геометрического объекта $H^{(1)}$ задается системой

$$\omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\beta}\,\omega^\beta, \quad \Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}, \tag{1.5}$$
$$(\nabla\Lambda_{\alpha\beta} + \dots) \wedge \omega^\beta = 0.$$

Дадим следующее (см. [4]).

Определение 1. *Обобщенное евклидовое пространство H_n с заданным полем дифференциально-геометрического объекта $H^{(1)}$ называется неголономной гиперповерхностью H_n^{n-1} обобщенного евклидового пространства H_n.*

В частично канонизированном репере уравнения неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} пространства H_n имеют вид:

$$\omega_\alpha^n = a_{\alpha\beta}\,\omega^\beta + a_\alpha\,\omega^n, \tag{1.6}$$
$$(\nabla a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}\,\omega_n^n + a_\alpha\,a_{[\gamma\beta]}\,\omega^\gamma) \wedge \omega^\beta + (\nabla a_\alpha - a_{\alpha\beta}\,\omega_n^\beta + a_\alpha\,a_\gamma\,\omega^\gamma) \wedge \omega^n = 0. \tag{1.7}$$

Развертывая уравнения (1.7) по лемме Картана, получим

$$\nabla a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}\,\omega_n^n = a_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma + b_{\alpha\beta}\,\omega^n, \tag{1.8}$$
$$\nabla a_\alpha - a_{\alpha\beta}\,\omega_n^n = c_{\alpha\beta}\,\omega^\beta + c_\alpha\,\omega^n,$$

где

$$a_{\alpha[\beta\gamma]} = -a_\alpha\,a_{[\gamma\beta]},$$
$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + a_\alpha\,a_\beta.$$

Элементом неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} является пара (A, Π), состоящая из точки A обобщенного евклидового пространства H_n и касательной гиперплоскости $\Pi\,(A \in \Pi)$. Пару (A, Π) будем называть опорным элементом неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} пространства H_n, а гиперплоскость Π-опорной гиперплоскостью той же гиперповерхности.

§2. Метрические нормали неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} пространства H_n

Метрический тензор h_{ij} обобщенного евклидового пространства H_n определяется следующим образом:

$$h_{ij} = \langle \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \rangle,$$

где $\{A, \mathbf{e}_i\}$ подвижной репер пространства H_n. Если репер канонизирован ($\Lambda_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$, $\Lambda_\beta^n = 0$), т.е. векторы $\mathbf{e}_\alpha$ лежат в опорной касательной ги перплос кости, то метрический тензор этой гиперплоскости имеет вид

$$h_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \rangle, \tag{2.1}$$

компоненты которого являются решениями дифференциальных уравнений

$$\nabla h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta,\gamma}\,\omega^\gamma + h'_{\alpha\beta}\,\omega^n, \tag{2.2}$$

где

$$h_{\alpha\beta,\gamma} = h_{n\beta}\,a_{\alpha\gamma} + h_{\alpha n}\,a_{\beta\gamma},$$
$$h'_{\alpha\beta} = h_{n\beta}\,a_\alpha + h_{\alpha n}\,a_\beta.$$

Вектор

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_n + n^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha \tag{2.3}$$

называется левой нормалью неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} пространства H_n, если он ортогонален слева к опорной гиперплоскости рассматриваемой гиперповерхности, т.е.

$$<\mathbf{N}\cdot \mathbf{e}_\beta> = 0$$

или

$$h_{n\beta} + n^\alpha h_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.4}$$

Скобками $< \ldots >$ обозначается несимметрическое скалярное произведение векторов, а скобками $(\ldots)$ — симметрическое скалярное произведение векторов.

Вектор

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_n + m^\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{2.5}$$

называется правой нормалью гиперповерхности H_n^{n-1}, если он ортогонален справа к опорной гиперплоскости неголономной гиперповерхности, т.е.

$$<\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{M}> = 0$$

или

$$h_{\beta n} + m^\alpha h_{\beta\alpha} = 0. \tag{2.6}$$

Вектор

$$\mathfrak{N} = \mathbf{e}_n + \nu^\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{2.7}$$

является нормалью неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}, если

$$(\mathfrak{N}\cdot \mathbf{e}_\beta) = 0,$$

т.е.

$$g_{n\beta} + \nu^\alpha g_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.8}$$

где

$$g_{\alpha\beta} = h_{(\alpha\beta)}.$$

Введем обозначения ($n_\alpha \neq 0$, $m_\alpha \neq 0$, $\nu_\alpha \neq 0$):

$$\begin{aligned} n_\alpha &= h_{\alpha n} + n^\beta h_{\alpha\beta}, \\ m_\alpha &= h_{n\alpha} + m^\beta h_{\beta\alpha}, \\ \nu_\alpha &= h_{\alpha n} + \nu^\beta h_{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Если $\det \|h_{\alpha\beta}\| \neq 0$ и $\det \|g_{\alpha\beta}\| \neq 0$, то из (2.4), (2.6) и (2.8) получаем

$$\begin{aligned} n^\alpha &= -h_{n\beta} h^{\beta\alpha}, \\ m^\alpha &= -h_{\beta n} h^{\alpha\beta}, \\ \nu^\alpha &= -g_{\beta n} g^{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$h_{\alpha\beta} h^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha, \qquad h_{\beta\alpha} h^{\gamma\beta} = \delta^\gamma_\alpha, \qquad g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha.$$

Оказывается, что

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{M}| = \sqrt{g_{nn} + n^\alpha h_{\alpha n}} = \sqrt{g_{nn} + m^\alpha h_{n\alpha}}.$$

Введем обозначения

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{M}| \equiv \overline{\mathbf{H}} \tag{2.11}$$

и

$$|\mathfrak{N}| = \sqrt{g_{nn} + \nu^\alpha g_{\alpha n}} \equiv H. \tag{2.12}$$

Объекты $\bar{H}$ и H являются решениями следующих дифференциальных уравнений

$$d\bar{H}=\bar{H}\,\omega_n^n+\bar{H}_\alpha\,\omega^\alpha+\bar{H}'\,\omega^n\,,$$
$$dH=H\,\omega_n^n+H_\alpha\,\omega^\alpha+H'\,\omega^n\,, \tag{2.13}$$

где

$$\bar{H}_\alpha=\frac{\bar{H}}{2}\,(n^\beta+m^\beta)\,a_{\beta\alpha}\,,$$
$$\bar{H}'=\frac{\bar{H}}{2}\,(n^\beta+m^\beta)\,a_\beta\,,$$
$$H_\alpha=H\,\nu^\beta\,a_{\beta\alpha}\,,$$
$$H'=H\,\nu^\beta\,a_\beta\,.$$

Дифференцируя (2.10), получаем

$$\nabla n^\alpha+\omega_n^\alpha-n^\alpha\,\omega_n^n=(n^\alpha\,n^\beta-h^{\beta\alpha}\,\bar{H}^2)\;\omega_\beta^n\,,$$
$$\nabla m^\alpha+\omega_n^\alpha-m^\alpha\,\omega_n^n=(m^\alpha\,m^\beta-h^{\alpha\beta}\,\bar{H}^2)\;\omega_\beta^n, \tag{2.14}$$
$$\nabla\nu^\alpha+\omega_n^\alpha-\nu^\alpha\,\omega_n^n=(\nu^\alpha\,\nu^\beta-g^{\alpha\beta}\,H^2)\,\omega_\beta^n\,.$$

Единичные векторы метрических нормалей имеют вид

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{e}_n+\mathbf{n}^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha}{\bar{H}}\,, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{m}=\frac{\mathbf{e}_n+m^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha}{\bar{H}}\,, \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\mathbf{e}_n+\nu^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha}{H}\,, \tag{2.17}$$

Дифференцируя эти равенства, мы получим

$$d\mathbf{n}=\left[\frac{\mathbf{n}}{2}\,(n^\alpha-m^\alpha)-h^{\alpha\beta}\,\bar{H}\mathbf{e}_\beta\right]\,(a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma+a_\alpha\,\omega^n)\,,$$
$$d\mathbf{m}=\left[\frac{\mathbf{m}}{2}\,(m^\alpha-n^\alpha)-h^{\beta\alpha}\,\bar{\mathbf{H}}\,\mathbf{e}_\beta\right]\,(a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma+a_\alpha\,\omega^n), \tag{2.18}$$
$$d\nu=-g^{\beta\alpha}\,H\,\mathbf{e}_\beta\,(a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma+a_\alpha\,\omega^n).$$

§3. Поляритет Пантази

Кривая K в пространстве H_n определяется системой дифференциальных уравнений

$$\omega^i=y^i\,\Theta,\quad D\,\Theta=0. \tag{3.1}$$

Любой кривой K обобщенного евклидового пространства H_n соответствует кривая на неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} — однопараметрическое семейство опорных элементов. Кривая K называется центроидой кривой $(K,\ \Pi)$ неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}, а $(K,\ \Pi)$ — лифтом кривой K (см. [4]). Дифференциальные уравнения кривой $(K,\ \Pi)$ имеют вид (1.6) и (3.1).

Пусть $(K,\ \Pi)$ произвольная кривая неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}. Характеристика однопараметрического семейства гиперплоскостей $\Pi(K)$ имеет вид

$$x^n=0,\quad a_{\alpha\beta}\,x^\alpha\,y^\beta+a_\alpha\,x^\alpha\,y^n+y^n=0. \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что любому вектору $\mathbf{y}=y^i\mathbf{e}_i$ пространства H_n ставится в соответствие $(n-2)$-мерная плоскость (3.2). Это соответствие называется поляритетом Пантази (см. [4]).

На неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} пространства H_n существуют такие кривые (K, П), вдоль центроиды K которых опорные гиперплоскости П смещаются параллельно. Это будет тогда, когда характеристика (3.2) является несобственной плоскостью, т.е.

$$a_{\alpha\beta}y^\beta+y^n=0, \qquad y^n\neq 0. \tag{3.3}$$

Определение 2. *Направления, являющиеся решением уравнений* (3.3) *называется аффинной нормалью неголономной гиперповерхности* H_n^{n-1}.

Если $\det\|a_{\alpha\beta}\|\neq 0$, то существует единственная аффинная нормаль неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} пространства H_n. Если ранг $\|a_{\alpha\beta}\|=p$, то аффинные нормали образуют $(n-p)$-мерную плоскость.

§4. Кривизны интегральной кривой

Вектор

$$\frac{d\mathbf{A}}{\Theta}=y^\alpha\mathbf{e}_\alpha+y^n\mathbf{e}_n$$

является касательным вектором центроиды K кривой (K, П) на неголономной гиперповерхности. Дифференцируя последнее равенство внешним образом и развертывая по лемме Картана, мы получаем

$$dy^\alpha+y^\beta\omega_\beta^\alpha+y^n\omega_n^\alpha=y_{(1)}^\alpha\Theta,$$

$$dy^n+y^n\omega_n^n=(y_{(1)}^n-a_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta-a_\alpha y^\alpha y^n)\Theta.$$

Отсюда следует, что y^n является относительным инвариантом кривой (K, П).

Определение 3. *Кривая* (K, П) *неголономной гиперповерхности* H_n^{n-1} *обобщенного евклидового пространства* H_n *называется интегральной кривой этой гиперповерхности, если относительный инвариант* y^n *тождественно равен* нулю.

Касательный вектор интегральной кривой имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{\Theta}=y^\alpha\mathbf{e}_\alpha, \tag{4.1}$$

т.е. лежит в касательной опорной гиперплоскости. Длина дуги центроиды K интегральной кривой определяется следующим образом:

$$ds=\sqrt{h_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta}\,\Theta=F\Theta. \tag{4.2}$$

Так как $h_{[\alpha\beta]}y^\alpha y^\beta=0$, то

$$ds=\sqrt{g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta}\,\Theta. \tag{4.3}$$

Дифференцируя уравнение (4.2), получаем (вдоль интегральной кривой)

$$dF=F'\Theta, \tag{4.4}$$

где

$$F'=\frac{1}{2F}\,(h_{\alpha\beta,\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma+h_{\alpha\beta}y_{(1)}^\alpha y^\beta+h_{\alpha\beta}y^\alpha y_{(1)}^\beta). \tag{4.5}$$

Единичный касательный вектор центроиды K интегральной кривой имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{y^\alpha \mathbf{e}_\alpha}{F}\ . \tag{4.6}$$

Из (4.3), (4.4) и (4.6) следует

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{(y^{\alpha}_{(1)} F - y^\alpha F')\ \mathbf{e}_\alpha + a_{(\alpha\beta)} y^\alpha y^\beta F \mathbf{e}_n}{F^3}$$

или

$$\frac{d\tau}{ds} = {}^*\tau^\alpha\ \mathbf{e}_\alpha + \frac{a_{\gamma\beta} \bar{H} y^\gamma y^\beta}{F^2}\ \mathbf{n}, \tag{4.7}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \tau^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \frac{a_{\gamma\beta} H y^\gamma y^\beta}{F^2}\ \boldsymbol{\nu}\ , \tag{4.8}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \tau^{*\alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{a_{\gamma\beta} \bar{\bar{H}} y^\gamma y^\beta}{F^2}\ \mathbf{m}\ , \tag{4.9}$$

где

$$a_{[\gamma\beta]} y^\gamma y^\beta = 0.$$

Векторы τ и $\frac{d\tau}{ds}$ образуют инвариантную двумерную соприкасающуюся плоскость.

Определение 4. *Вектор, лежащий в двумерной соприкасающейся плоскости* $\left\{\tau,\ \frac{d\tau}{ds}\right\}$ *и перпендикулярный слева (перпендикулярный, перпендикулярный справа) к касательному вектору центроиды K, называется вектором левой абсолютной кривизны (абсолютной кривизны, правой абсолютной кривизны) интегральной кривой (K, П) неголономной гиперповехности H_n^{n-1}.*

Векторы левой абсолютной кривизны $\mathbf{N}_1$, абсолютной кривизны $\mathfrak{N}_1$ и правой абсолютной кривизны $\mathbf{M}_1$ имеют вид (см. [2])

$$\mathbf{N}_1 = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \tau \\ \lambda_{21} & \frac{d\tau}{ds} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{N}_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \tau \\ \alpha_{21} & \frac{d\tau}{ds} \end{vmatrix}, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \tau & \frac{d\tau}{ds} \end{vmatrix},$$

где

$$\lambda_{11} = <\tau\cdot\tau>, \qquad \lambda_{12} = <\tau\cdot\frac{d\tau}{ds}>, \quad \lambda_{21} = <\frac{d\tau}{ds}\cdot\tau>,$$

$$\alpha_{11} = (\tau\cdot\tau), \qquad \alpha_{21} = \left(\tau\cdot\frac{d\tau}{ds}\right).$$

Векторы (4.10), в силу (4.6), (4.7), (4.8) и (4.9), можно записать следующим образом

$$\mathbf{N}_1 = {}^*\tau_1^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \frac{a_{(\gamma\beta)} \bar{H} y^\gamma y^\beta}{F^2} \mathbf{n}, \tag{4.11}$$

$$\mathfrak{N}_1 = \tau_1^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \frac{a_{(\gamma\beta)} H y^\gamma y^\beta}{F^2} \mathbf{v}, \tag{4.12}$$

$$\mathbf{M}_1 = \tau^*{}_1^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \frac{a_{(\gamma\beta)} \bar{H} y^\gamma y^\beta}{F^2} \mathbf{m}, \tag{4.13}$$

где

$${}^*\tau_1^\alpha = {}^*\tau^\alpha - \frac{h_{\gamma\beta} y^\beta y^\alpha}{F^2} \tau^\gamma,$$

$$\tau_1^\alpha = \tau^\alpha - \frac{g_{\gamma\beta} y^\gamma y^\alpha}{F^2} \tau^\beta,$$

$$\tau^*{}_1^\alpha = \tau^{*\alpha} - \frac{h_{\gamma\beta} y^\gamma y^\alpha}{F^2} \tau^{*\beta}.$$

Длины векторов $\mathbf{N}_1$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathbf{M}_1$ называются, соответственно, левой абсолютной, абсолютной и правой абсолютной кривизной интегральной кривой (K, П) неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}. Так как

$$|\mathbf{N}_1| = |\mathbf{M}_1|, \tag{4.14}$$

то левая абсолютная и правая абсолютная кривизны совпадают.

Определение 4. *Векторы* $\bar{\mathbf{k}}_{(n)}\mathbf{n}$, $k_{(n)}\mathbf{v}$ *и* $\bar{k}_{(n)}\mathbf{m}$, *где*

$$\bar{k}_{(n)} = \frac{a_{(\alpha\beta)} \bar{H} y^\alpha y^\beta}{F^2}, \tag{4.15}$$

$$k_{(n)} = \frac{a_{(\alpha\beta)} H y^\alpha y^\beta}{F^2} \tag{4.16}$$

называются соответственно векторами левой нормальной кривизны, нормальной кривизны и правой нормальной кривизны интегральной кривой (K, П), *а векторы* ${}^*\tau_1^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, $\tau_1^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ *и* $\tau^*{}_1^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ — *соответственно, вектором левой геодезической кривизны, геодезической кривизны и правой геодезической кривизны интегральной кривой* (K, П).

Скаляры $\bar{k}_{(n)}$ называется левой-правой нормальной кривизной, а величины $k_{(n)}$ — нормальной кривизной интегральной кривой (K, П).

Длины векторов геодезических кривизн, т.е. величины

$${}^*k_{(g)} = \sqrt{g_{\alpha\beta}^{*} \tau_1^{\alpha *} \tau_1^\beta}\ .$$

$$k_{(g)} = \sqrt{g_{\alpha\beta} \tau_1^\alpha \tau_1^\beta}\ ,$$

$$k_{(g)}^* = \sqrt{g_{\alpha\beta} \tau^*{}_1^\alpha \tau^*{}_1^\beta}\ ,$$

будем называть, соответственно, левой геодезической кривизной, геодезической кривизной и правой геодезической кривизной рассматриваемой интегральной кривой.

§5. Линии кривизны неголономной гиперповерхности

1. Линии кривизны первого рода. Нормальные кривизны $\bar{k}_{(n)}$, $k_{(n)}$ интегральных кривых зависят от вектора $\{y^\alpha\}$ опорной гиперплоскости, т.е.

$$\bar{k}_{(n)} = \bar{k}_{(n)}\,(y^1, \dots, y^{n-1}), \qquad k_{(n)} = k_{(n)}\,(y^1, \dots, y^{n-1}).$$

Определение 7. *Стационарные значения левой-правой нормальной кривизны, нормальной кривизны интегральной кривой (K, П) неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} называется, соответственно, главными левыми-правыми кривизнами первого рода и главными кривизнами первого рода неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}, а направления касательной гиперплоскости, которые им соответствуют, называются, соответственно, левыми-правыми главными направлениями и главными направлениями опорной гиперплоскости неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}.*

Из (4.15) и (4.16) следует, что

$$(g_{\alpha\beta}\,\bar{k}_{(n)} - \bar{\mathring{a}}_{\alpha\beta})\,y^\alpha y^\beta = 0, \tag{5.1}$$

$$(g_{\alpha\beta}\,k_{(n)} - \mathring{a}_{\alpha\beta})\,y^\alpha y^\beta = 0, \tag{5.2}$$

где

$$\bar{\mathring{a}}_{\alpha\beta} = \bar{H}\,a_{\alpha\beta}, \qquad \mathring{a}_{\alpha\beta} = H\,a_{\alpha\beta}.$$

Стационарные значения кривизн $\bar{k}_{(n)}$, $k_{(n)}$ найдем из уравнений (см. [4], §5.1):

$$\bar{R}_0\,\bar{k}_{(n)}^{n-1} - R_1\,\bar{k}_{(n)}^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2}\,R_{n-2}\,\bar{k}_{(n)} + (-1)^{n-1}\,\bar{R}_{n-1} = 0, \tag{5.3}$$

$$R_0\,k_{(n)}^{n-1} - R_1\,k_{(n)}^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2}\,R_{n-2}\,k_{(n)} + (-1)^{n-1}\,R_{n-1} = 0, \tag{5.4}$$

где

$$\bar{R}_0 = R_0 = \det\,\|g_{\alpha\beta}\|,$$

$$R_{n-1} = \det\,\|\mathring{a}_{(\alpha\beta)}\|, \qquad \bar{R}_{n-1} = \det\,\|\bar{\mathring{a}}_{(\alpha\beta)}\|,$$

$$\bar{R}_p = (I)^p\,R_p, \qquad I = \frac{\bar{H}}{H}.$$

Остальные $\bar{R}_a$, R_a $(a = 1, \dots, n-2)$ являются упорядоченными суммами различных определителей $(n-1)$-го порядка, составленных из элементов матрицы $\|g_{\alpha\beta}\|$, в которых a столбцов заменены соответствующими столбцами матрицы $\|\mathring{a}_{\alpha\beta}\|$ или матрицы $\|\bar{\mathring{a}}_{\alpha\beta}\|$.

Определение 8. *Инвариант $\bar{K}_p$, определенный равенством* $(p = 1, \dots, n-1)$

$$\bar{K}_p = \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots(n-p)} \sum_{\substack{\alpha_1=1 \\ (\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_p)}}^{n-1} \dots \sum_{\alpha_p=1}^{n-1} \bar{k}_{\alpha_1} \dots \bar{k}_{\alpha_p}, \tag{5.5}$$

где $\bar{k}_{\alpha_p}$ корни уравнения (5.3), *называется левой-правой p-той кривизной первого рода неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}, а инвариант —*

$$K_p = \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots(n-p)} \sum_{\substack{\alpha_1=1 \\ (\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_p)}}^{n-1} \dots \sum_{\alpha_p=1}^{n-1} k_{\alpha_1} \dots k_{\alpha_p}, \tag{5.6}$$

где k_{α_p} – корни уравнения (5.4), *р-ой кривизной первого рода той же гиперповерхности H_n^{n-1}.*

Из (5.3), (5.4) и определения 8 следует, что

$$\bar{K}_p = \frac{p!}{(n-1)(n-2)\dots(n-p)} \frac{\bar{R}_p}{R_0}, \tag{5.7}$$

$$K_p = \frac{p!}{(n-1)(n-2)\dots(n-p)} \frac{R_p}{R_0}, \tag{5.8}$$

и в частности, что

$$\bar{K}_1 = \frac{1}{n-1} g^{\alpha\beta} \mathring{\bar{a}}_{(\alpha\beta)}, \tag{5.9}$$

$$K_1 = \frac{1}{n-1} g^{\alpha\beta} \mathring{a}_{(\alpha\beta)}, \tag{5.10}$$

$$\bar{K}_{n-1} = \frac{\det \| \mathring{\bar{a}}_{(\alpha\beta)} \|}{\det \| g_{\alpha\beta} \|}, \tag{5.11}$$

$$K_{n-1} = \frac{\det \| \mathring{a}_{(\alpha\beta)} \|}{\det \| g_{\alpha\beta} \|}. \tag{5.12}$$

Кривизну $\bar{K}_1$ будем называть левой-правой средней кривизной первого рода и кривизну K_1 – средней кривизной первого рода неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}, а кривизны $\bar{K}_{n-1}$ и K_{n-1} будем называть, соответственно, полной левой-правой кривизной первого рода и полной кривизной первого рода той же гиперповерхности.

Кривизны $\bar{K}_p$ и K_p связаны соотношениями

$$\bar{K}_p = (I)^p K_p.$$

Если $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ корни уравнения (5.3), то им соответствующие главны направления определяюся уравнениями:

$$(\bar{k}_1 g_{\alpha\beta} - \mathring{\bar{a}}_{(\alpha\beta)}) \bar{y}_1^\alpha = 0,$$

$$(\bar{k}_2 g_{\alpha\beta} - \mathring{\bar{a}}_{(\alpha\beta)}) \bar{y}_2^\beta = 0. \tag{5.13}$$

Свертывая (5.13) с $\bar{y}_1^\beta$ и $\bar{y}_2^\beta$, получим

$$(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) g_{\alpha\beta} \bar{y}_1^\alpha \bar{y}_2^\beta = 0. \tag{5.14}$$

Аналогичным образом получается, что

$$(k_1 - k_2) g_{\alpha\beta} y_1^\alpha y_2^\beta = 0, \tag{5.15}$$

где k_1, k_2 – корни уравнения (5.4), а y_1^α, y_2^α им соответствующие главные направления.

Так как $k_1 \neq k_2$, то из (5.14) и (5.15) следует.

Теорема. *Левые-правые главные направления и главные направления первого рода опорной гиперплоскости неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} ортогональны между собой (в смысле метрики, определенной симметрической частью метрического тензора $h_{\alpha\beta}$).*

Определение 9. *Интегральные кривые* (*K*, П), *левые-правые нормальные кривизны которых экстремальны, называются левыми-правыми линиями кривизны первого рода неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} пространства*

H_n и интегральные кривые (K, П), нормальные кривизны которых экстремальны, называются линиями кривизны первого рода неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}.

2. Линии кривизны второго рода. Пусть (K, П) – произвольная интегральная кривая. Построим линейчатые поверхности $N(K)$, $M(K)$, $\mathfrak{N}(K)$, образующими которых являются, соответственно, левые, правые нормали и нормали неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} обобщенного евклидового пространства H_n, а направляющая кривая совпадает с центроидой интегральной кривой (K, П).

Определение 10. *Если ассоциированные к интегральной кривой (K, П) левая линейчатая поверхность $N(K)$, правая линейчатая поверхность $M(K)$ и линейчатая поверхность $\mathfrak{N}(K)$ являются развертывающимися поверхностями, то интегральная кривая (K, П) называется, соответственно, левой, правой линией кривизны второго рода или линией кривизны второво рода неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} пространства H_n.*

Линейчатые поверхности $N(K)$, $M(K)$ и $\mathfrak{N}(K)$ можно представить следующими уравнениями:

$$^*L = A + {}^*\rho\, \mathbf{n}, \tag{5.14}$$

$$L^* = A + \rho^*\, \mathbf{m}, \tag{5.15}$$

$$L = A + \rho\, \mathbf{v}. \tag{5.16}$$

Так как

$$\frac{d\,{}^*L}{\Theta} = (\ldots)\, \mathbf{n} + (y^\alpha - {}^*\rho\, h^{\lambda\alpha}\, \overline{H}\, a_{\lambda\gamma} y^\gamma)\, \mathbf{e}_\alpha, \tag{5.17}$$

$$\frac{d\mathbf{L}^*}{\Theta} = (\ldots)\, \mathbf{m} + (y^\alpha - \rho^*\, h^{\alpha\lambda}\, \overline{H}\, a_{\lambda\gamma} y^\gamma)\, \mathbf{e}_\alpha, \tag{5.18}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{\Theta} = (\ldots)\mathbf{v} + (y^\alpha - \rho\, g^{\alpha\lambda}\, H\, a_{\lambda\gamma} y^\gamma)\, e_\alpha, \tag{5.19}$$

то ассоциированные линейчатые поверхности являются развертывающимися поверхностями, если

$$\begin{aligned} &y^\alpha - {}^*\rho\, h^{\lambda\alpha}\, \overline{H}\, a_{\lambda\gamma} y^\gamma = 0, \\ &y^\alpha - \rho^*\, h^{\alpha\lambda}\, \overline{H}\, a_{\lambda\gamma} y^\gamma = 0, \\ &y^\alpha - \rho\, g^{\alpha\lambda}\, H\, a_{\lambda\gamma} y^\gamma = 0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

или

$$\begin{aligned} &(\delta^\alpha_\gamma + {}^*\rho\, {}^*B^\alpha_\gamma)\, y^\gamma = 0, \\ &(\delta^\alpha_\gamma + \rho^*\, B^{*\alpha}_\gamma)\, y^\gamma = 0, \\ &(\delta^\alpha_\gamma + \rho\, B^\alpha_\gamma)\, y^\gamma = 0, \end{aligned} \tag{5.21}$$

где

$$^*B^\alpha_\gamma = -h^{\lambda\alpha}\, \mathring{a}_{\lambda\gamma}, \qquad B^{*\alpha}_\gamma = -h^{\alpha\lambda}\, \mathring{a}_{\lambda\gamma}, \qquad B^\alpha_\gamma = -g^{\alpha\lambda}\, \mathring{a}_{(\lambda\gamma)}.$$

Если введем обозначения

$$^*t = \frac{1}{{}^*\rho}, \qquad t^* = \frac{1}{\rho^*}, \qquad t = \frac{1}{\rho},$$

то из (5.21) следует, что величины $^*t$, t^*. t являются решениями следующих уравнений:

$$^*t^{n-1} + {^*a_1}\, {^*t^{n-2}} + \ldots + {^*a_{n-2}}\, {^*t} + {^*a_{n-1}} = 0, \qquad (5.22)$$

$$t^{*n-1} + a_1^*\, t^{*n-2} + \ldots + a_{n-2}^*\, t^* + a_{n-1}^* = 0, \qquad (5.23)$$

$$t^{n-1} + a_1\, t^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\, t + a_{n-1} = 0, \qquad (5.24)$$

где

$$^*a_1 = {^*B_\alpha^\alpha}, \ldots, {^*a_p} = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots < \alpha_p \leqslant n-1} {^*B} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_p \\ \alpha_1 \ldots \alpha_p \end{pmatrix}, \ldots, {^*a_{n-1}} =$$

$$= \det \| {^*B_\gamma^\alpha} \|.$$

и $^*B \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_p \\ \alpha_1 \ldots \alpha_p \end{pmatrix}$ — главный минор p-го порядка матрицы $\| {^*B_\beta^\alpha} \|$, а величины a_α^*, a_α аналогичным образом построены из главных миноров матриц $\| B^{*\alpha}_\beta \|$ и $\| B_\beta^\alpha \|$, соответственно.

Определение 11. *Корни уравнений* (5.22), (5.23), (5.24) *называются, соответственно, главными левыми, правыми и главными кривизнами второго рода неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} пространства H_n.*

Определение 12. *Инварианты*

$$^*\mathcal{K}_p = \frac{(-1)^p p!\, {^*a_p}}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}, \qquad \mathcal{K}_p^* = \frac{(-1)^p p!\, a_p^*}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)},$$

$$\mathcal{K}_p = \frac{(-1)^p p!\, a_p}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)} \qquad (5.25)$$

называются, соответственно, p-ой левой, p-ой правой и p-ой кривизнами второго рода неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}.

В частности, средние левая, правая и средняя кривизны второго рода, соответственно, имеют вид

$$^*\mathcal{K}_1 = \frac{1}{n-1} \bar{H} h^{\lambda\alpha} a_{\lambda\alpha}, \qquad \mathcal{K}_1^* = \frac{1}{n-1} \bar{H} h^{\alpha\lambda} a_{\lambda\alpha},$$

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{n-1} H g^{\alpha\lambda} a_{(\alpha\lambda)}. \qquad (5.26)$$

Из (5.10) и (5.26) получаем, что

$$\mathcal{K}_1 = K_1, \qquad \frac{^*\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_1^*}{2} = \bar{K}_1. \qquad (5.27)$$

Отсюда следует

Теорема. *Первая средняя левая-правая кривизна первого рода неголономной гиперповерхности H_n^{n-1} обобщенного евклидового пространства H_n является средним арифметическим первой средней левой и первой средней правой кривизн второго рода, а первая средняя кривизна первого рода совпадает с первой средней кривизной второго рода.*

3. Кривизны первого и второго рода неголономных гиперповерхностей H_3^2 и H_4^3.

Введем обозначения:

$$h=\det\|h_{\alpha\beta}\|,\qquad h'=\det\|h_{[\alpha\beta]}\|,\qquad g=\det\|g_{\alpha\beta}\|,$$

$$a=\det\|\mathring{a}_{\alpha\beta}\|,\qquad a'=\det\|\mathring{a}_{[\alpha\beta]}\|,\qquad a''=\det\|\mathring{a}_{(\alpha\beta)}\|,$$

$$\bar{a}=\det\|\mathring{\bar{a}}_{\alpha\beta}\|,\qquad \bar{a}'=\det\|\mathring{\bar{a}}_{[\alpha\beta]}\|,\qquad \bar{a}''=\det\|\mathring{\bar{a}}_{(\alpha\beta)}\|.$$

Из элементов произвольных матриц $\|u_{\alpha\beta}\|$ и $\|v_{\alpha\beta}\|$ можно построить следующую величину:

$$D_{uv}=\begin{vmatrix} u_{11} & v_{12} & v_{13}\\ u_{21} & v_{22} & v_{23}\\ u_{31} & v_{32} & v_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} v_{11} & u_{12} & v_{13}\\ v_{21} & u_{22} & v_{23}\\ v_{31} & u_{32} & v_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & u_{13}\\ v_{21} & v_{22} & u_{23}\\ v_{31} & v_{32} & u_{33}\end{vmatrix}.$$

Введем следующие обозначения:

$$D_{uv}=\begin{cases} 1)\ \bar{A}_g, \text{ если } u_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}, & v_{\alpha\beta}=\mathring{\bar{a}}_{[\alpha\beta]},\\ 2)\ A_g, \text{ если } u_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}, & v_{\alpha\beta}=\bar{a}_{[\alpha\beta]},\\ 3)\ \bar{A}_1, \text{ если } u_{\alpha\beta}=\mathring{\bar{a}}_{(\alpha\beta)} & v_{\alpha\beta}=\mathring{\bar{a}}_{[\alpha\beta]},\end{cases}$$

$$\begin{cases} 4)\ A_1, \text{ если } u_{\alpha\beta}=\mathring{a}_{(\alpha\beta)}, & v_{\alpha\beta}=\mathring{a}_{[\alpha\beta]},\\ 5)\ H_1 \text{ если } u_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}, & v_{\alpha\beta}=h_{[\alpha\beta]}.\end{cases}$$

Средние кривизны первого и второго рода гиперповерхностей H_3^2 и H_4^3 связаны соотношениями (5.27). Вторые кривизны первого и второго рода неголономной гиперповерхности H_3^2 связаны соотношениями

$$\mathcal{K}_2=K_2+\frac{a'}{g},\quad \frac{\bar{a}}{\bar{\mathcal{K}}_2}-\frac{\bar{a}''}{\bar{K}_2}=h',$$

а те же кривизны неголономной гиперповерхности H_4^3 связаны такими зависимостями

$$\mathcal{K}_2=K_2+\frac{1}{3g}A_g,$$

$$\frac{1}{2}({}^*\mathcal{K}_2+\mathcal{K}_2^*)+\frac{g}{h}\bar{K}_2+\frac{1}{3h}\bar{A}_g.$$

Для полных кривизн первого и второго рода неголономной гиперповерхности H_4^3 верны соотношения:

$$\mathcal{K}_3=K_3+\frac{A_1}{g},\quad \frac{h\bar{\mathcal{K}}_3}{\bar{H}^3}=g\frac{\mathcal{K}_3}{H^3},$$

$$\bar{\mathcal{K}}_3=\bar{K}+\frac{gA_1-\bar{a}''H_1}{gh},\quad \bar{\mathcal{K}}_3\equiv{}^*\mathcal{K}_3=\mathcal{K}_3^*.$$

§ 6. Гиперсферические кривизны неголономной гиперповерхности

Пусть K центроида интегральной кривой (K, Π) неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}. Каждой образующей развертивающихся поверхностей $N(K)$, $M(K)$ и $\mathfrak{N}(K)$ можно сопоставить в соответствие точно единичной гиперсферы $S_{n-1}(A)$. Тогда на $S_{n-1}(A)$ определяется кривые, которых будем называть, соответственно, левой, правой гиперсферической индикатрисами и иперсферической индикатрисой кривой (K, Π).

Вектор

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{n}+\mathbf{m}}{2}$$

будем называть средним нормальным вектором. На гиперсфере $S_{n-1}(A)$ вектор $\mathbf{v}_0$ определяет кривую — среднюю гиперсферическую индикатрису. Касательные векторы индикатрис, определяемых векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$ можно записать в виде

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{-g^{\gamma\alpha} H a_{\gamma\beta} y^\beta}{\sqrt{g_{\lambda\delta} y^\lambda y^\delta}} \mathbf{e}_\alpha ,$$

$$\mathbf{t}_{cp} = \frac{d\mathbf{v}_0}{ds} = \frac{-U^{\alpha\gamma} \bar{H} a_{\gamma\beta} y^\beta}{\sqrt{g_{\lambda\delta} y^\lambda y^\delta}} \mathbf{e}_\alpha ,$$

где

$$U^{\alpha\gamma} = g^{\alpha\gamma} - \frac{1}{4\bar{H}^2} (m^\gamma - n^\gamma)(m^\alpha - n^\alpha).$$

Дифференцируя эти уравнения, мы получаем, что

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = (\ldots)\, \mathbf{e}_\alpha - \frac{g^{\gamma\alpha} \mathring{a}_{\gamma(\beta} \mathring{a}_{|\alpha|\varepsilon|} y^\beta y^\varepsilon}{g_{\lambda\delta} y^\lambda y^\delta} \mathbf{v} ,$$

$$\frac{d\mathbf{t}_{cp}}{ds} = (\ldots)\, \mathbf{e}_\alpha - \frac{U^{\gamma\alpha} \mathring{\mathring{a}}_{\gamma(\beta} \mathring{\mathring{a}}_{|\alpha|\varepsilon)} y^\beta y^\varepsilon}{g_{\lambda\delta} y^\lambda y^\delta} \mathbf{v}_0 .$$

Величины

$$\lambda = \frac{g^{\gamma\alpha} \mathring{a}_{\gamma(\beta} \mathring{a}_{|\alpha|\varepsilon)} y^\beta y^\varepsilon}{g_{\lambda\delta} y^\lambda y^\delta} , \qquad \lambda_{cp} = \frac{U^{\gamma\alpha} \mathring{\mathring{a}}_{\gamma(\beta} \mathring{\mathring{a}}_{|\alpha|\varepsilon)}}{g_{\lambda\delta} y^\lambda y^\delta}$$

будем называть, соответственно, гиперсферической нормальной кривизной интегральной кривой (K, П). Аналогичным образом как в §5, можно определить и найти главные гиперсферические, p-ые гиперсферические, а также главные средние и p-ые средние гиперсферические кривизны неголономной гиперповерхности H_n^{n-1}.

В заключение выражаю глубокую благодарность и.о. проф. В. Близникасу за помощь и руководство.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
29.X.1970

Литература

1. С. М. Бахрах, Геометрия обобщенных евклидовых пространств, Диссертация, Москва, 1961.
2. В. И. Близникас, Некоторые вопросы пространств обобщенной евклидовой связности, Лит. матем. сб. II, 2 (1962), 15–31.
3. В. И. Близникас, Теория поверхностей пространства обобщенной евклидовой связности, Лит.матем.сб., IV, 1 (1964), 5–23.
4. В. И. Близникас, Дифференциальная геометрия неголономной гиперповерхности риманова пространства, Лит. матем сб., XI, 1(1971), 63–76.
5. В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, I, Москва, 1947.
6. Г. Ф. Лаптев, Геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. матем. об-ва, 1953, 2, 275–382.

APIE APIBENDRINTOS EUKLIDINĖS ERDVĖS NEHOLONOMINĮ HIPERPAVIRŠIŲ

L. Stiklakytė

(Reziumė)

Šiame darbe yra išnagrinėti kai kurie apibendrintos euklidinės erdvės neholonominio hiperpaviršiaus geometrijos klausimai: surasta trijų tipų normalės, neholonominio hiperpaviršiaus integralinių kreivių pirmo ir antro tipo kreivumai, neholonominio hiperpaviršiaus kreivumo linijos, taip pat hipersferiniai kreivumai. Trimatės ir keturmatės apibendrintos euklidinės erdvės neholonominiams hiperpaviršiams surasta ryšys tarp pirmo, antro tipo ir hipersferinių kreivumų.

Darbas atliktas G. Laptevo panardintų daugdarų diferencialinio-geometrinio nagrinėjimo metodu.

ÜBER DIE NICHTHOLONOME HYPERFLACHE IN VERALLGEMEINERTEM EUKLIDISCHEM RAUM

L. Stiklakytė

(Zusammenfassung)

In diesem Artikel wird die Differentialgeometrie der nichtholonomen Hyperflache in dem verallgemeinerten euklidischen Raum betrachtet. Es ist die Linksnormale, die Rechtsnormale und die Normale der nichtholonomen Hyperflache, die Krümmungen der Integralkurven und die hyperspherische Krummungen der nichtholonomen Hyperflache konstruiert. Es sind einige Verhaltnise der Krummungen der nichtholonomen Hyperflache in dem dreidimensionalen und vierdimensionalen Raum untersucht.

Die Untersuchund wird mit Hilfe der Methode von G. Laptew durchgeführt.