1971

УДК 517.941

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПАРАМЕТРА

Ш. И. Стрелиц, Ю. Э. Дегутис

В этой работе мы опишем метод сведения вопроса о существовании бесконечной последовательности собственных значений для дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{m_1}\lambda^j p_{j_1}(x)y^{(n-1)}+\sum_{j=0}^{m_2}\lambda^j p_{j_2}(x)y^{(n-2)}+$$
$$+\ldots+\sum_{j=0}^{m_n}\lambda^j p_{jn}(x)y=0 \tag{1}$$

с краевыми условиями вида

$$y^{(k)}(0,\ \lambda)=\sum_{i=0}^{n-1}a_{ki}(\lambda)y^{(i)}(l,\ \lambda),\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \tag{2}$$

где $a_{ki}(\lambda)$, $i,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, – некоторые полиномы от параметра λ, к изучению некоторой задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которую иногда удается исследовать до конца.

Наш метод использует результаты, полученные в статье [2]. Поэтому, естественно, мы от функций $p_{jk}(x)$ потребуем выполнения следующих условий: функции

$$(-1)^{m_k}p_{m_k k}(x),\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{3}$$

– непрерывны и положительны, а

$$p_{jk}(x),\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ m_k-1;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{4}$$

– непрерывны на отрезке $[0,\ l]$.

1. Уравнение (1), удовлетворяющее условиям (3), (4), легко привести (см. [2]) к уравнению

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{m_1}(-1)^{j+1}\lambda^j p_{j1}(x)y^{(n-1)}+\sum_{j=0}^{m_2}(-1)^{j+1}\lambda^j p_{j2}(x)y^{(n-2)}+$$
$$+\ldots+\sum_{j=0}^{m_n}(-1)^{j+1}p_{jn}(x)y=0, \tag{1.1}$$

с более жесткими условиями, наложенными на коэффициенты уравнения: все функции $p_{jk}(x)$, $j=0, 1, \ldots, m_k$; $k=1, 2, \ldots, n$, — непрерывны и неотрицательны, причем $p_{m_k k}(x)>0$, $k=1, 2, \ldots, n$ на отрезке $[0, l]$.

Краевые условия (2) преобразуем к иному виду, введя новые величины ν_i соотношением:

$$\frac{y^{(i)}(l)}{y(l)}=\nu_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n-1, \tag{2.1}$$

считая, что $y(l)\neq 0$.

Это дает возможность записать краевые условия (2) в следующем виде:

$$y^{(k)}(0)=\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_{ki}(\lambda)\nu_i\right]y(l), \qquad k=0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.1}$$

2. Решение задачи (1.1)—(3.1) будем искать в виде ряда

$$y(x, \lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\varphi_j(x). \tag{1.2}$$

От функций $\varphi_j(x)$, $j=0, 1, 2, \ldots$, потребуем выполнения следующих начальных условий:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0^{(k)}(0)=\sum_{i=0}^{n-1} a_{ki}(\lambda)\nu_i, \qquad k=0, 1, \ldots, n-1 \\ &\varphi_j^{(k)}(0)=0, \qquad k=0, 1, \ldots, n-1; \; j=1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Тогда для того чтобы удовлетворялись условия (3.1), должно быть $y(l)=1$, т. е.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(l)\lambda^j=1. \tag{3.2}$$

Формально дифференцируем ряд (1.2) n раз и подставляем в уравнение (1.1). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0^{(n)}-p_{01}(x)\varphi_0^{(n-1)}-p_{02}(x)\varphi_0^{(n-2)}-\ldots-p_{0n}(x)\varphi_0=0, \\ &\varphi_j^{(n)}-p_{01}(x)\varphi_j^{(n-1)}-p_{02}(x)\varphi_j^{(n-2)}-\ldots-p_{0n}(x)\varphi_j=f_j(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

где правые части $f_j(x)$ линейные функции от произведений $p_{jk}(x)\varphi_i^{(m)}(x)$) $m=0, 1, \ldots, n-1$, $i<j$. (Подробнее см. [2]). Поэтому, зная $\varphi_0(x)$ найдем $\varphi_1(x)$; зная $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, найдем $\varphi_2(x)$ и т. д.

Докажем следующее предложение:

Функции $\varphi_j(x)$ *имеют вид*

$$\varphi_j(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{ki}(\lambda)\nu_i\psi_{jk}(x), \qquad j=0, 1, \ldots, \tag{5.2}$$

где $\psi_{jk}(x)$ – *соответствующие решения задачи Коши уравнений системы* (4.2) *удовлетворяющие условиям*:

$$\psi_{0k}^{(i)}(0)=\delta_{ik}, \quad \delta_{ik}=\begin{cases}0, & i\neq k,\\ 1, & i=k, \quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\end{cases} \tag{6.2}$$

$$\psi_{jk}^{(i)}(0)=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots;\quad k,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{7.2}$$

Действительно, существование решений $\psi_{0k}(x)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ уравнения

$$\varphi_0^{(n)}-p_{01}(x)\varphi_0^{(n-1)}-p_{02}(x)\varphi_0^{(n-2)}-\ldots-p_{0n}(x)\varphi_0=0, \tag{8.2}$$

удовлетворяющих начальным условиям (6.2), следует из общей теории существования решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений [1]. Ясно, что и функция

$$\varphi_0(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}a_{ki}(\lambda)\nu_i\psi_{0k}(x) \tag{9.2}$$

тоже будет решением уравнения (8.2). Нетрудно убедиться в том, что $\varphi_0(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2.2). Т. е. $\varphi_0(x)$ и есть решение уравнения (8.2) искомого вида.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi_1^{(n)}-p_{01}(x)\varphi_1^{(n-1)}-\ldots-p_{0n}(x)\varphi_1=-\sum_{k=1}^{n}p_{1k}(x)\varphi_0^{(k-1)}(x), \tag{10.2}$$

или, имея в виду (9.2),

$$\varphi_1^{(n)}-p_{01}(x)\varphi_1^{(n-1)}-\ldots-p_{0n}(x)\varphi_1=$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}p_{1k}(x)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu i}\nu_i\psi_{0\mu}^{(k-1)}(x)\right).$$

Правую часть перегруппируем:

$$\varphi_1^{(n)}-p_{01}(x)\varphi_1^{(n-1)}-\ldots-p_{0n}(x)\varphi_1=$$
$$=-\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}p_{1k}(x)a_{\mu i}\nu_i\psi_{0\mu}^{(k-1)}(x).$$

Обозначив

$$A_\mu=\sum_{i=0}^{n-1}a_{\mu i}\nu_i, \qquad \mu=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

получаем

$$\varphi_1^{(n)}-p_{01}(x)\varphi_1^{(n-1)}-\ldots-p_{0n}(x)\varphi_1=-\sum_{\mu=0}^{n-1}A_\mu\sum_{k=1}^{n}p_{1k}(x)\psi_{0\mu}^{(k-1)}(x).$$

Решение последнего уравнения, состоит из суммы решений следующих уравнений:

$$\psi_{1\mu}^{(n)}-p_{01}(x)\psi_{1\mu}^{(n-1)}-\ldots-p_{0n}(x)\psi_{1\mu}=-A_\mu\sum_{k=1}^{n}p_{1k}(x)\psi_{0\mu}^{(k-1)},$$
$$\mu=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Введем в эти уравнения новые искомые функции

$$\psi_{1\mu} = A_\mu \tilde{\psi}_{1\mu}, \qquad \mu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Тогда они преобразуются к виду

$$\tilde{\psi}_{1\mu}^{(n)} - p_{01}(x)\,\tilde{\psi}_{1\mu}^{(n-1)} - \ldots - p_{0n}(x)\,\tilde{\psi}_{1\mu} = -\sum_{k=1}^{n} p_{1k}(x)\,\psi_{0\mu}^{(k-1)},$$
$$\mu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Для последних уравнений решения $\tilde{\psi}_{1\mu}(x)$, $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$, удовлетворяющие однородным условиям (7.2) ($j = 1$), существуют.

Поэтому

$$\varphi_1(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} A_\mu \psi_{1\mu}(x)$$

или, так как $A_\mu = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{\mu i}\nu_i$,

$$\varphi_1(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_{\mu i}\nu_i\,\psi_{1\mu}(x) \tag{11.2}$$

есть решение уравнения (10.2), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. (Здесь для удобства знак „$\sim$" опущен).

Допустим сейчас, что все функции $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$ имеют форму (5.2). Рассмотрим уравнение (4.2) при $j = n_0$:

$$\varphi_{n_0}^{(n)} - p_{01}(x)\,\varphi_{n_0}^{(n-1)} - \ldots - p_{0n}(x)\,\varphi_{n_0} =$$
$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k} (-1)^{m_k - l} p_{lk}(x)\,\varphi_{n_0-l-1}^{(n-k)}(x).$$

(Здесь мы правую часть $f_j(x)$ написали полностью). Используя (5.2) для $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$, получаем

$$\varphi_{n_0}^{(n)} - p_{01}(x)\,\varphi_{n_0}^{(n-1)} - \ldots - p_{0n}(x)\,\varphi_{n_0} =$$
$$= -\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_{\mu i}\nu_i \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k} (-1)^{m_k - l} p_{lk}(x)\psi_{n_0-l-1,\,\mu}^{(n-k)}\right].$$

Рассуждая так же, как и при $j = 1$, легко получаем что $\varphi_{n_0}(x)$ имеет вид (5.2).

3. Как следует из изложенного в предыдущем п. 2, решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.2), есть следующий ряд:

$$y(x,\ \lambda) = \sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \psi_{j\mu}(x) \sum_{i=0}^{n-1} a_{\mu i}\nu_i. \tag{1.3}$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (1.3), нужно построить сходящуюся мажоранту. Это делается совсем так же, как и в статье [2]. (Заметим только, что выполнение лемм 1.3, 2.4 указанной статьи, для построения мажоранты не нужны).

Для того, чтобы решение (1.3) удовлетворяло краевым условиям (2), должны выполняться следующие равенства:

$$y(l)=1;\quad y^{(i)}(l)=\nu_i,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\psi_{j\mu}^{(k)}(l)=S_{\mu}^{(k)},\qquad \mu,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{3.3}$$

Тогда условия (2.3) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\mu=0}^{n-1}S_{\mu}^{(0)}\sum_{i=0}^{n-1}a_{\mu i}\nu_i=\nu_0,\\&\sum_{\mu=0}^{n-1}S_{\mu}^{(k)}\sum_{i=0}^{n-1}a_{\mu i}\nu_i=\nu_k,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.\end{aligned}\right\}$$

Здесь $\nu_0=1$.

Меняя порядок суммирования, получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1}\nu_i\sum_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu i}S_{\mu}^{(0)}=\nu_0,\\&\sum_{i=0}^{n-1}\nu_i\sum_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu i}S_{\mu}^{(k)}=\nu_k,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1}\nu_i\left(\sum_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu i}S_{\mu}^{(0)}-\delta_{i0}\right)=0,\\&\sum_{i=0}^{n-1}\nu_i\left(\sum_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu i}S_{\mu}^{(k)}-\delta_{ik}\right)=0,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

где

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0, & i\neq k,\\ 1, & i=k,\end{cases}\qquad i,\ k=0,\ 1\ \ldots,\ n-1.$$

Относительно ν_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ условия (4.3) представляют однородную линейную систему. Для того чтобы она имела решение необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$u(l,\ \lambda)=\begin{vmatrix}\sum\limits_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu0}S_{\mu}^{(0)}-1 & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu1}S_{\mu}^{(0)}\ldots & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu,\,n-1}S_{\mu}^{(0)}\\ \sum\limits_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu0}S_{\mu}^{(1)} & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu1}S_{\mu}^{(1)}-1\ldots & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu,\,n-1}S_{\mu}^{(1)}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \sum\limits_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu0}S_{\mu}^{(n-1)} & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu1}S_{\mu}^{(n-1)}\ldots & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1}a_{\mu,\,n-1}S_{\mu}^{(n-1)}-1\end{vmatrix} \tag{5.3}$$

был равен нулю, т. е.

$$u(l, \lambda)=0. \tag{6.3}$$

Определитель (5.3) есть целая функция параметра λ. Чтобы найти порядок $u(x, \lambda)$, рассмотрим функции $S_\mu^{(k)}(x)$, k, $\mu=0, 1, \ldots, n-1$. Определитель

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu 0} S_\mu^{(0)}(x)-1 & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu 1} S_\mu^{(0)}(x) \ldots & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu, n-1} S_\mu^{(0)}(x) \\ \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu 0} S_\mu^{(1)}(x) & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu 1} S_\mu^{(1)}(x)-1 \ldots & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu, n-1} S_\mu^{(1)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu 0} S_\mu^{(n-1)}(x) & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu 1} S_\mu^{(n-1)}(x) \ldots & \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu, n-1} S_\mu^{(n-1)}(x)-1 \end{vmatrix} \tag{7.3}$$

продифференцируем по x-у. Производная $u_x'(x, \lambda)$ состоит из суммы определителей, которые будут отличаться от первоначального только одной строкой. Таких определителей будет n. У одного слагаемого в последнюю строку войдут $S_\mu^{(n)}$, т. е. n-ные производные $\psi_{j\mu}^{(n)}(x)$, $j=0, 1, \ldots; \mu=0, 1, \ldots, n-1$, (см. обозначения (3.3)). Так как функции $\psi_{j\mu}(x)$ являются решениями уравнения (1.1), то их n-ю производную выразим из этого уравнения через сумму производных более низкого порядка. Тогда этот определитель представим как сумму n определителей, в строках которых не будут присутствовать $S_\mu^{(n)}$.

Таким образом, мы $u_x'(x, \lambda)$ представим как сумму $2n-1$ определителей. Обозначая каждое слагаемое через $u_j(x, \lambda)$, $j=1, 2, \ldots, 2n-1$, продифференцируем их один раз по x-у. $S_\mu^{(n)}$ заменим, используя уравнение (1.1) через $S_\mu^{(k)}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. После этого производные $u_j'(x, \lambda)$, $j=1, 2, \ldots, 2n-1$, будут опять представленны в виде суммы определителей.

Для тех определителей, которые не совпадают с $u_j(x, \lambda)$, $j=1, 2, \ldots, 2n-1$, введем новые обзначения $u_{2n-1+j}(x, \lambda)$, $j=1, 2, \ldots, q$ (q — некоторое целое определенное число) и опять повторим описанный прием. Процесс закончим после того, когда в выражениях $u_j'(x, \lambda)$ не появятся новые определители.

Окончательно получим некоторую систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Присоединяя к этой системе однородные условия, мы сможем представить функцию $u(x, \lambda)$, т. е. определитель (7.3), как некоторый степенной ряд (относительно параметра λ) с переменными коэффициентами. Получение и исследование этого ряда не предполагает знания решений $S_\mu^{(k)}$, μ, $k=0, 1, \ldots, n-1$, что необходимо для изучения самого определителя. Это обстоятельство, на наш взгляд, существенно упрощает исследование.

Мы раньше предполагали $y(l)\neq 0$. Если $y(l)=0$ первоначальной краевой задачи, а $y^{(s)}(l)\neq 0$, где s — некоторое положительное целое число, меньшее

n (все $y^{(s)}(l)$, $s=0, 1, \ldots, n-1$ не могут равняться одновременно нулю, ибо тогда $y(x)\equiv 0$, то величины ν_i надо ввести при помощи равенства:

$$\frac{y^{(i)}(l)}{y^{(s)}(l)}=\nu_i, \qquad i=0, 1, \ldots, n-1.$$

с $\nu_s=1$. Краевые условия (2) тогда принимают вид

$$y^{(k)}(0)=\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_{ki}(\lambda)\nu_i\right] y^{(s)}(l), \qquad k=0, 1, \ldots, n-1,$$

а условие (3.2)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^{(s)}(l)\lambda^j=1.$$

Повторяя все сказанное выше при $y(l)\neq 0$, мы прийдем к тому же определителю (5.3) и уравнению (6.3).

Нужно отметить, что при большом n, система уравнений для $u(x, \lambda)$ содержит большое число уравнений, что осложняет ее исследование.

В следующей работе описанным методом мы докажем существование бесконечной последовательности собственных значений задачи (1)–(2е) когда $n=2$.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 22.IV.1970

Литература

1. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Ф.–М., Л., 1958.
2. Ю. Э. Дегутис, Ш. И. Стрелиц, Существование собственных значений для одного дифференциального оператора, зависящего от параметра, Лит. матем. сб., **XI**, 3(1971), 535–556.

APIE VIENĄ DIFERENCIALINIO OPERATORIAUS SU KRAŠTINĖMIS SĄLYGOMIS, PRIKLAUSANČIOMIS NUO PARAMETRO, NUOSAVŲ REIKŠMIŲ EGZISTAVIMO ĮRODYMO METODĄ

Š. Strelicas, J. Degutis

Reziumė)

Nagrinėjama diferencialinė lygtis

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{m_1}\lambda^j p_{j_1}(x)\, y^{(n-1)}+\sum_{j=0}^{m_2}\lambda^j p_{j_2}(x)\, y^{(n-2)}+\ldots+\sum_{j=0}^{m_n}\lambda^j p_{jn}(x)\, y=0$$

su kraštinėmis sąlygomis

$$y^{(k)}(0, \lambda)=\sum_{i=0}^{n-1} a_{ki}(\lambda)\, y^{(i)}(l, \lambda), \qquad k=0, 1, \ldots, n-1;$$

čia $a_{ki}(\lambda)$, $i, k=0, 1, \ldots, n-1$ – polinomai λ atžvilgiu, $(-1)^{m_k} p_{m_k k}(x)$, $k=1, 2, \ldots, n$ – tolydinės ir teigiamos, o $p_{jk}(x)$, $j=0, 1, \ldots, m_k-1$; $k=1, 2, \ldots, n$ – tolydinės atkarpoje $[0, l]$ funkcijos.

Nurodomas metodas, kaip šios lygties nuosavų reikšmių egzistavimo uždavinį galima suvesti į pirmos eilės tiesinių diferencialinių lygčių sistemos Koši uždavinį.

ON THE METHOD DEMONSTRATING EXISTENCE OF EIGENVALUES FOR A DIFFERENTIAL OPERATOR WITH BOUNDARY CONDITIONS DEPENDENT ON PARAMETER

Š. Strelicas, J. Degutis

(*Summary*)

The paper is concerned with the method wchich helps the differential operator

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{m_1}\lambda^j p_{j_1}(x)\,y^{(n-1)}+\sum_{j=0}^{m_2}\lambda^j p_{j_2}(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+\sum_{j=0}^{m_n}\lambda^j p_{jn}(x)\,y=0$$

with the boundary conditions

$$y^{(k)}(0,\ \lambda)=\sum_{i=0}^{n-1}a_{ki}(\lambda)\,y^{(i)}(l,\ \lambda),\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

where $a_{ki}(\lambda)$, i, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ are polynomials with regard to λ, $(-1)^{m_k}p_{m_k k}(x)$, $k=1,2,\ldots,n-$ continuous and positive and $p_{jk}(x)$, $j=0,\ 1,\ldots,\ m_k-1$; $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ – continuos functions in the interval $[0,\ l]$, the problem of the eigenvalues existence may be reduced to the problem of Cauchy for the system of linear differential equations of the first order.