XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1971

УДК 519.24

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ МНОГОМЕРНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ГАУССОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Р. Бенткус

Введение

В статье мы будем рассматривать стационарную гауссовскую (за исключением § 2) последовательность $\{x_j, j=0, \pm 1, \ldots\}$, где

$$x_j=\{x_j^{(k)}\}_{k=\overline{1, n}}, \quad x_j^{(k)}\in R^1, \quad \mathbf{M}\, x_j^{(k)}=0.$$

Через $B(\nu)$ обозначим корреляционную функцию последовательности $\{x_j\}$

$$B(\nu)=\{B_{kl}(\nu)\}_{k=\overline{1, n}}^{l=\overline{1, n}}, \quad B_{kl}(\nu)=\mathbf{M}\, x_{j+\nu}^{(k)} x_j^{(l)};$$

через $F(\lambda)$ и $f(\lambda)$ – соответственно, спектральную функцию (с. ф.) и спектральную плотность (с. п.) последовательности $\{x_j\}$,

$$F(\lambda)=\{F_{kl}(\lambda)\}_{k=\overline{1, n}}^{l=\overline{1, n}}, \quad f(\lambda)=\{f_{kl}(\lambda)\}_{k=\overline{1, n}}^{l=\overline{1, n}}.$$

Будем предполагать, что с. ф. $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна. Тогда

$$B_{kl}(\nu)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\nu} f_{kl}(\lambda)\, d\lambda$$

и, поскольку величины $x_j^{(k)}$ вещественны, то $f_{kl}(\lambda)=f_{lk}(-\lambda)=\overline{f_{lk}(\lambda)}$. Также предположим, что $F(0)=0$. Тогда для $0<\lambda\leqslant\pi$

$$F_{kl}(-\lambda)=-F_{lk}(\lambda)=-\overline{F_{kl}(\lambda)}.$$

Поэтому с. ф. $F(\lambda)$ достаточно оценить при $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$.

Обозначим

$$I_N(kl;\ \lambda)=\frac{1}{2\pi N}\sum_{s=1}^{N} e^{-is\lambda} x_s^{(k)} \sum_{t=1}^{N} e^{it\lambda} x_t^{(l)}.$$

Мы будем исследовать асимптотическое поведение при $N\to\infty$ оценки

$$F_N(\lambda)=\{F_N(kl;\ \lambda)\}_{k=\overline{1, n}}^{l=\overline{1, n}}, \quad F_N(kl;\ \lambda)=\int_0^{\lambda} I_N(kl;\ \lambda)\, d\lambda,$$

для неизвестной с. ф. $F(\lambda)$, $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$, построенной по выборке $(x_1, \ldots, x_N)$ объема N из последовательности $\{x_j\}$. Основной результат статьи – теорема 1.1. В ней доказывается, что если с. п. $f_{kk}(\lambda)$, $k=\overline{1, n}$, интегрируемые с квадратом на $[-\pi, \pi]$, то случайные процессы

$$\zeta_N(\lambda)=\{\zeta_N(kl;\ \lambda)\}_{k=\overline{1, n}}^{l=\overline{1, n}}, \quad \zeta_N(kl;\ \lambda)=\sqrt{N}\,[F_N(kl;\ \lambda)-F_{kl}(\lambda)], \tag{0.1}$$

и

$$\xi_N(\lambda)=\{\xi_N(kl;\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}},\quad \xi_N(kl;\lambda)=\sqrt{N}[F_N(kl;\lambda)-\mathbf{M}F_N(kl;\lambda)],\quad (0.2)$$

рассматриваемые как случайные элементы со значениями в декартовом произведении $2n^2$ метрических пространств $C[0,\pi]$, при $N\to\infty$ сходятся по распределению к комплексному гауссовскому процессу $\zeta(\lambda)=\{\zeta(kl;\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$, $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$, для которого

$$\mathbf{M}\zeta(\lambda)\equiv 0,\quad \mathbf{M}\zeta(k_1l_1;\lambda)\overline{\zeta(k_2l_2;\mu)}=2\pi\int_0^{\min(\lambda,\mu)} f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)}\,d\alpha,$$

$$\mathbf{M}\zeta(k_1l_1;\lambda)\zeta(k_2l_2;\mu)=2\pi\int_0^{\min(\lambda,\mu)} f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}\,d\alpha,\qquad (0.3)$$

где $k_1,\ l_1,\ k_2,\ l_2=\overline{1,n}$, $0\leqslant\lambda,\ \mu\leqslant\pi$.

Далее всюду будем пользоваться введенными выше обозначениями. Также для краткости записи действительную и мнимую части комплексной величины z иногда будем обозначать через $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$, т. е. $z=z^{(1)}+iz^{(2)}$.

§ 1. Асимптотическое поведение процесса $\zeta_N(\lambda)$

Через $C^{n\times 2n}[0,\pi]$ обозначим декартово произведение пространств $C_{kl}[0,\pi]$, $1\leqslant k\leqslant n$, $1\leqslant l\leqslant 2n$, где $C_{kl}[0,\pi]=C[0,\pi]$ – пространство действительных непрерывных функций на $[0,\pi]$ с топологией равномерной сходимости. Таким образом, $C^{n\times 2n}[0,\pi]$ является полным сепарабельным метрическим пространством, топология которого порождается, например, расстоянием

$$d(z,y)=\max_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant 2n}}\ \sup_{0\leqslant t\leqslant\pi}|z_{kl}(t)-y_{kl}(t)|.$$

Пусть далее $\eta_N(\lambda)$, $N\geqslant 1$, и $\eta(\lambda)$, где $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$ – случайные процессы, почти все реализации которых принадлежат $C^{n\times 2n}[0,\pi]$. Тогда конечномерные распределения процессов η_N и η порождают на борелевской σ-алгебре пространства $C^{n\times 2n}[0,\pi]$, вероятностные меры P_N и P соответственно. Поэтому на процессы η_N и η можно смотреть как на случайные элементы (мы их также будем обозначать через η_N и η) со значениями в $C^{n\times 2n}[0,\pi]$. По определению случайный элемент η_N сходится по распределению к η при $N\to\infty$ (что, как и в [7], обозначим через $\eta_N\xrightarrow{\mathcal{D}}\eta$), если мера P_N слабо сходится к мере P.

Лемма 1.1 *Для сходимости по распределению последовательности* η_N, $N\geqslant 1$, *к* η *при* $N\to\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *конечномерные распределения процесса* η_N *сходились к конечномерным распределениям процесса* η;

2) *последовательность* η_N, $N\geqslant 1$, *была слабо компактной.*

Доказательство леммы 1.1 ничем не отличается от доказательства аналогичного утверждения в случае пространства $C[0,1]$ (см., например, [7], стр. 35).

Лемма 1.2. *Пусть* C *– декартово произведение полных сепарабельных метрических пространств* C_{kl}, $1\leqslant k\leqslant n$, $1\leqslant l\leqslant m$; $\{P_\alpha,\ \alpha\in L\}$ *– совокуп-*

ность вероятностных мер на борелевской σ-алгебре пространства C. Тогда для слабой компактности $\{P_\alpha,\ \alpha \in L\}$ необходима и достаточна слабая компактность маргинальных совокупностей $\{P_\alpha^{kl},\ \alpha \in L\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant m$. Здесь

$$P_\alpha^{kl}(A) = P_\alpha\left(h_{kl}^{-1}(A)\right), \quad A \in \mathscr{B}_{kl},$$

где $\mathscr{B}_{kl}$ — борелевская σ-алгебра в C_{kl}, h_{kl} — оператор проектирования пространства C в C_{kl}.

Лемма 1.2 легко получается из теоремы Прохорова, согласно которой слабая компактность совокупности $\{P_\alpha^{kl},\ \alpha \in L\}$ эквивалентна следующему условию: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset C_{kl}$, что $\sup\limits_{\alpha \in L} P_\alpha^{kl}(C_{kl} \setminus K) < \varepsilon$, и из теоремы Тихонова о декартовом произведении компактов.

Вернемся теперь к случайным процессам $\zeta_N(\lambda)$, $\xi_N(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$ (см. (0.1), (0.2) и (0.3)). Очевидно, что матричнозначная функция принадлежит пространству $C^{n \times 2n}[0, \pi]$ тогда и только тогда, когда ее координатные функции непрерывны на $[0, \pi]$. Следовательно, поскольку почти все реализации процессов $\zeta^{(j)}(kl;\ \lambda)$, $j = 1, 2$, непрерывны (см. [8], стр. 227), то почти все реализации процесса $\zeta(\lambda)$ принадлежат $C^{n \times 2n}[0, \pi]$. Аналогично устанавливаем, что почти все реализации процессов $\zeta_N(\lambda)$ и $\xi_N(\lambda)$ также принадлежат $C^{n \times 2n}[0, \pi]$. Таким образом, в силу сказанного выше, ζ_N, ξ_N и ζ являются случайными элементами со значениями в $C^{n \times 2n}[0, \pi]$.

Теорема 1.1. *Если для стационарной гауссовской последовательности $\{x_j\}$*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}^2(\lambda)\, d\lambda < \infty, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{1.1}$$

то $\zeta_N \xrightarrow{\mathscr{D}} \zeta$ при $N \to \infty$.

Заметим, что теорема 1.1 верна (это видно из ее доказательства) и для случайного элемента ξ_N. Кроме того, так как при любом борелевском A

$$\left| \int_A f_{kl}(\lambda)\, d\lambda \right|^2 \leqslant \int_A f_{kk}(\lambda)\, d\lambda \cdot \int_A f_{ll}(\lambda)\, d\lambda,$$

то из условия (1.1) вытекает, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_{kl}(\lambda)|^2\, d\lambda < \infty, \qquad 1 \leqslant k,\ l \leqslant n.$$

В § 4 доказывается сходимость конечномерных распределений процесса ζ_N к конечномерным распределениям процесса ζ, а в § 5 — слабая компактность последовательностей $\zeta_N^{(1)}(kl;\ \lambda)$ и $\zeta_N^{(2)}(kl;\ \lambda)$ для $k, l = \overline{1, n}$. В силу лемм 1.1 и 1.2, этого достаточно для доказательства теоремы 1.1. В §§ 2, 3 доказывается, что первые два момента процесса $\zeta_N(\lambda)$ асимптотически совпадают с соответствующими моментами процесса $\zeta(\lambda)$.

Теорема 1.1 является многомерным обобщением соответствующей теоремы в случае $n = 1$, доказанной (при дополнительном условии, что у с. ф. $F(\lambda)$

нет интервалов постоянства) И. А. Ибрагимовым [1] и Т. Л. Малевич [4]. Д. Р. Бриллингер [5] доказал, что $\zeta_N \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta$ при $N \to \infty$ для некоторого класса стационарных в узком смысле многомерных последовательностей. В случае гауссовских последовательностей этот класс определяется условием:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\nu B_{kk}(\nu)| < \infty, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

в то время как условие (1.1) эквивалентно условию:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} B_{kk}^2(\nu) < \infty, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

И. А. Ибрагимов [1] рассмотрел пример стационарной гауссовской последовательности, показывающий, что условие (1.1) улучшить нельзя.

§ 2. Математическое ожидание $F_N(\lambda)$

В этом параграфе рассматривается стационарная в широком смысле (не обязательно гауссовская) последовательность $\{x_j\}$ с абсолютно непрерывной с. ф. $F(\lambda)$. Зафиксируем k и l, где $k,\ l = \overline{1,\ n}$.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $\varphi(\lambda)$ *ограничена,* $|\varphi(\lambda)| \leqslant C_1$ *п. в. на* $[-\pi,\ \pi]$. *Тогда при* $N \to \infty$

$$\mathbf{M} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) I_N(kl;\ \lambda)\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) f_{kl}(\lambda)\, d\lambda + o(1).$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\varphi(\lambda)$ *имеет ограниченную вариацию, и*

$$G_{kl}(p) = \int_{-\pi}^{\pi} |f_{kl}(\lambda)|^p\, d\lambda < \infty, \qquad 1 < p \leqslant 2.$$

Тогда

$$\left|\mathbf{M} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) I_N(kl;\ \lambda)\, d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) f_{kl}(\lambda)\, d\lambda\right| \leqslant \frac{\operatorname{Var} \varphi}{N^{1-1/p}} \cdot \varepsilon_N \leqslant \frac{C_2 \cdot \operatorname{Var} \varphi}{N^{1-1/p}},$$

где

$$C_2 = \left[1 + \frac{2^{-1+1/p}}{(p-1)^{1/p}}\right] \cdot \pi^{1-1/p} \cdot \left(G_{kl}(p)\right)^{1/p}, \quad \varepsilon_N \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty$$

и не зависит от φ.

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 почти не отличаются от доказательств соответствующих утверждений в случае $k = l = 1$ (см. [1], § 1), поэтому мы их опускаем. Из теоремы 2.2 легко получается

Следствие 2.1. *Если* $\int_{-\pi}^{\pi} |f_{kl}(\lambda)|^2\, d\lambda < \infty$, *то*

$$\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant \pi} \sqrt{N}\, |\mathbf{M} F_N(kl;\ \lambda) - F_{kl}(\lambda)| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty, \tag{2.1}$$

$$\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant \pi} \sqrt{N}\, |\mathbf{M} F_N(kl;\ \lambda) - F_{kl}(\lambda)| \leqslant 6,1 \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_{kl}(\lambda)|^2\, d\lambda\right)^{1/2}.$$

§ 3. Корреляционные функции процессов ζ_N и ξ_N

В этом параграфе рассматриваются поведения корреляционных функции процессов ζ_N и ξ_N при $N\to\infty$. У нас k_1, l_1, k_2 и l_2 фиксированные, но любые между 1 и n.

Теорема 3.1. *Если для стационарной гауссовской последовательности* $\{x_j\}$ *модули с. п.* $f_{k_1k_2}(\lambda)$, $f_{l_1l_2}(\lambda)$, $f_{k_1l_2}(\lambda)$ *и* $f_{l_1k_2}(\lambda)$ *интегрируемы с квадратом на* $[-\pi, \pi]$, *то для* $0\leqslant\lambda$, $\mu\leqslant\pi$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\xi_N(k_1l_1;\ \lambda)\overline{\xi_N(k_2l_2;\ \mu)}=2\pi\int\limits_0^{\min(\lambda,\mu)} f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)}\,d\alpha, \tag{3.1}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\xi_N(k_1l_1;\ \lambda)\xi_N(k_2l_2;\ \mu)=2\pi\int\limits_0^{\min(\lambda,\mu)} f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}\,d\alpha. \tag{3.2}$$

Обозначим

$$\Psi_N(\alpha,\ \beta;\ \sigma,\ \delta)=\frac{1}{4\pi^2N}D_N(\alpha-\sigma)D_N(\alpha-\delta)D_N(\beta-\sigma)D_N(\beta-\delta), \tag{3.3}$$

где $D_N(\alpha)=\dfrac{\sin\frac{N\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ — ядро Дирихле. Доказательству теоремы 3.1 предпошлем следующие две леммы.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы 3.1*

$$\mathbf{M}\xi_N(k_1l_1;\ \lambda)\overline{\xi_N(k_2l_2;\ \mu)}=$$
$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\beta)}\,d\alpha\,d\beta\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_0^{\mu}\Psi_N(\alpha,\beta;\sigma,\delta)\,d\sigma\,d\delta+$$
$$+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\beta)}\,d\alpha\,d\beta\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_{-\mu}^{0}\Psi_N(\alpha,\ \beta;\ \sigma,\ \delta)\,d\sigma\,d\delta. \tag{3.4}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{M}\xi_N(k_1l_1;\ \lambda)\overline{\xi_N(k_2l_2;\mu)}=$$
$$=N\int\limits_0^{\lambda}d\sigma\int\limits_0^{\mu}[\mathbf{M}I_N(k_1l_1;\ \sigma)\overline{I_N(k_2l_2;\ \delta)}-$$
$$-\mathbf{M}I_N(k_1l_1;\ \sigma)\cdot\mathbf{M}\overline{I_N(k_2l_2;\ \delta)}]\,d\delta.$$

Для любого гауссовского вектора $(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$, $\mathbf{M}z_j=0$, справедливо равенство

$$\mathbf{M}z_1z_2z_3z_4=\mathbf{M}z_1z_2\cdot\mathbf{M}z_3z_4+\mathbf{M}z_1z_3\cdot\mathbf{M}z_2z_4+\mathbf{M}z_1z_4\cdot\mathbf{M}z_2z_3,$$

поэтому

$$\mathbf{M}I_N(k_1l_1;\ \sigma)\overline{I_N(k_2l_2;\ \delta)}=\frac{1}{4\pi^2N^2}\sum_{s_1,r_1,s_2,r_2=1}^{N}\mathbf{M}x_{s_1}^{(k_1)}x_{r_1}^{(l_1)}x_{s_2}^{(k_2)}x_{r_2}^{(l_2)}\times$$
$$\times\exp\{-is_1\sigma+ir_1\sigma+is_2\delta-ir_2\delta\}=\mathbf{M}I_N(k_1l_1;\ \sigma)\cdot\mathbf{M}\overline{I_N(k_2l_2;\ \delta)}+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2N^2}\int_{-\pi}^{\pi} f_{k_1k_2}(\alpha)\sum_{s_1=1}^{N} e^{is_1(\alpha-\sigma)}\sum_{s_2=1}^{N} e^{-is_2(\alpha-\delta)}\,d\alpha\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi} f_{l_1l_2}(\beta)\sum_{r_1=1}^{N} e^{ir_1(\beta+\sigma)}\sum_{r_2=1}^{N} e^{-ir_2(\beta+\delta)}\,d\beta+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2N^2}\int_{-\pi}^{\pi} f_{k_1l_2}(\alpha)\sum_{s_1=1}^{N} e^{is_1(\alpha-\sigma)}\sum_{r_2=1}^{N} e^{-ir_2(\alpha+\delta)}\,d\alpha\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi} f_{l_1k_2}(\beta)\sum_{r_1=1}^{N} e^{ir_1(\beta+\sigma)}\sum_{s_2=1}^{N} e^{-is_2(\beta-\delta)}\,d\beta. \tag{3.5}$$

Кроме того,

$$\sum_{s=1}^{N} e^{is\alpha}=\frac{e^{iN\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1}\,e^{i\alpha}=\frac{\sin\frac{N\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,e^{i\frac{N+1}{2}\alpha}. \tag{3.6}$$

Учитывая обозначение (3.3), из (3.5) и (3.6) получаем (3.4). Лемма доказана.

Лемма 3.2. (см. [2], стр. 44). *Если $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$ интегрируемы с квадратом на $[-\pi, \pi]$, то*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\psi(\beta)\,d\alpha\,d\beta\cdot\int_a^b\int_c^d \Psi_N(\alpha,\ \beta;\ \sigma,\ \delta)\,d\sigma\,d\delta=$$

$$=\begin{cases} 2\pi\displaystyle\int_{\max(a,\,c)}^{\min(b,\,d)}\varphi(\alpha)\psi(\alpha)\,d\alpha, \\ 0,\quad \text{если}\quad [a,\ b]\cap[c,\ d]=\varnothing; \end{cases}$$

причем здесь $a<b$, $c<d$.

Доказательство теоремы 3.1. Формула (3.1) получается из лемм 3.1 и 3.2. Формула (3.2) следует из (3.1), если заметить, что

$$\xi_N(k_2l_2;\ \mu)=\overline{\xi_N(l_2k_2;\ \mu)}.$$

Теорема доказана.

Так как

$$\mathbf{M}\zeta_N(k_1l_1;\ \lambda)\overline{\zeta_N(k_2l_2;\ \mu)}-\mathbf{M}\xi_N(k_1l_1;\ \lambda)\overline{\xi_N(k_2l_2;\ \mu)}=$$

$$=\sqrt{N}[F_{k_1l_1}(\lambda)-\mathbf{M}F_N(k_1l_1;\ \lambda)]\cdot\sqrt{N}[\overline{F_{k_2l_2}(\mu)-\mathbf{M}F_N(k_2l_2;\ \mu)}],$$

то, в силу (2.1), имеет место следствие.

Следствие 3.1. *При условиях теоремы 3.1 и при дополнительном условии, что модули с. п. $f_{k_1l_1}(\lambda)$ и $f_{k_2l_2}(\lambda)$ тоже интегрируемы с квадратом, имеют место равенства:*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{M}\zeta_N(k_1l_1;\ \lambda)\overline{\zeta_N(k_2l_2;\ \mu)}=2\pi\int_0^{\min(\lambda,\,\mu)} f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)}\,d\alpha,$$

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{M}\zeta_N(k_1l_1;\ \lambda)\zeta_N(k_2l_2;\ \mu)=2\pi\int_0^{\min(\lambda,\,\mu)} f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}\,d\alpha.$$

Из теоремы 3.1 и следствия 3.1 очевидным путем получается

Следствие 3.2. *В условиях следствия* 3.1

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\zeta_N^{(1)}(k_1l_1;\ \lambda)\zeta_N^{(1)}(k_2l_2;\ \mu)=\lim_{N\to\infty}\mathbf{M}\xi_N^{(1)}(k_1l_1;\lambda)\xi_N^{(1)}(k_2l_2;\ \mu)=$$

$$=\pi\int_0^{\min(\lambda,\mu)} \operatorname{Re}\left[f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)}+f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}\right]d\alpha,$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\zeta_N^{(2)}(k_1l_1;\ \lambda)\zeta_N^{(2)}(k_2l_2;\ \mu)=\lim_{N\to\infty}\mathbf{M}\xi_N^{(2)}(k_1l_1;\ \lambda)\xi_N^{(2)}(k_2l_2;\ \mu)=$$

$$=\pi\int_0^{\min(\lambda,\mu)} \operatorname{Re}\left[f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)}-f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}\right]d\alpha,$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\zeta_N^{(1)}(k_1l_1;\ \lambda)\zeta_N^{(2)}(k_2l_2;\ \mu)=\lim_{N\to\infty}\mathbf{M}\xi_N^{(1)}(k_1l_1;\ \lambda)\xi_N^{(2)}(k_2l_2;\ \mu)=$$

$$=\pi\int_0^{\min(\lambda,\mu)} \operatorname{Im}\left[-f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)}+f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}\right]d\alpha,$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\zeta_N^{(2)}(k_1l_1;\ \lambda)\zeta_N^{(1)}(k_2l_2;\ \mu)=\lim_{N\to\infty}\mathbf{M}\xi_N^{(2)}(k_1l_1;\ \lambda)\xi_N^{(1)}(k_2l_2;\ \mu)=$$

$$=\pi\int_0^{\min(\lambda,\mu)} \operatorname{Im}\left[f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)}+f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}\right]d\alpha.$$

§ 4. Сходимость конечномерных распределений процесса ζ_N

Теорема 4.1. *Если* $\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}^2(\lambda)\,d\lambda<\infty$, $k=\overline{1,n}$, *то конечномерные распределения случайного процесса* $\zeta_N(\lambda)$, $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$, *при* $N\to\infty$ *сходятся по распределению к конечномерным распределениям комплексного гауссовского процесса* $\zeta(\lambda)=\{\zeta(kl;\ \lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$, $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$, *для которого*

$$\mathbf{M}\zeta(\lambda)\equiv 0,\ \mathbf{M}\zeta(k_1l_1;\ \lambda)\overline{\zeta(k_2l_2;\ \mu)}=2\pi\int_0^{\min(\lambda,\mu)} f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)}\,d\alpha,$$

$$\mathbf{M}\zeta(k_1l_1;\ \lambda)\zeta(k_2l_2;\ \mu)=2\pi\int_0^{\min(\lambda,\mu)} f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}\,d\alpha,$$

где $k_1,\ l_1,\ k_2,\ l_2=\overline{1,n}$.

Доказательство. Рассмотрим $(m\cdot n^2)$-мерный случайный вектор

$$\left(\zeta_N(\lambda_1),\ \ldots,\ \zeta_N(\lambda_m)\right),$$

координаты которого комплексные. Для доказательства теоремы достаточно показать, что случайные величины

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left[a_{jkl}\zeta_N^{(1)}(kl;\ \lambda_j)+b_{jkl}\zeta_N^{(2)}(kl;\ \lambda_j)\right], \tag{4.1}$$

где a_{jkl} и b_{jkl} — произвольные вещественные числа, при $N\to\infty$ асимптотически нормальные со средним 0 и дисперсией

$$2\pi \sum_{j_1, j_2=1}^{m} \sum_{k_1, l_1, k_2, l_2=1}^{n} \Big\{ a_{j_1k_1l_1} a_{j_2k_2l_2} \int\limits_0^{\min(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2})} \operatorname{Re}[f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)} +$$

$$+f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}]\,d\alpha + a_{j_1k_1l_1} b_{j_2k_2l_2} \int\limits_0^{\min(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2})} \operatorname{Im}[-f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)}+$$

$$+f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}]\,d\alpha + b_{j_1k_1l_1} a_{j_2k_2l_2} \int\limits_0^{\min(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2})} \operatorname{Im}[f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)} +$$

$$+f_{k_1l_2}(\alpha)\overline{f_{l_1k_2}(\alpha)}]\,d\alpha +$$

$$+ b_{j_1k_1l_1} b_{j_2k_2l_2} \int\limits_0^{\min(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2})} \operatorname{Re}[f_{k_1k_2}(\alpha)\overline{f_{l_1l_2}(\alpha)} - f_{k_1l_2}(\alpha) f_{l_1k_2}(\alpha)]\,d\alpha \Big\}. \tag{4.2}$$

Так как в силу (2.1)

$$\zeta_N(kl;\ \lambda_j) - \xi_N(kl;\ \lambda_j) \to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty,$$

то заменим случайную величину (4.1) случайной величиной

$$\Theta_N = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} [a_{jkl}\xi_N^{(1)}(kl;\ \lambda_j) + b_{jkl}\xi_N^{(2)}(kl;\ \lambda_j)],$$

не меняя при этом предельного распределения. Простые вычисления, с учетом (4.4) (см. ниже), дают

$$\Theta_N = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sqrt{N}\Big[a_{jkl}\int\limits_0^{\lambda_j} I_N^{(1)}(kl;\ \alpha)\,d\alpha - a_{jkl}\mathbf{M}\int\limits_0^{\lambda_j} I_N^{(1)}(kl;\ \alpha)\,d\alpha +$$

$$+b_{jkl}\int\limits_0^{\lambda_j} I_N^{(2)}(kl;\ \alpha)\,d\alpha - b_{jkl}\mathbf{M}\int\limits_0^{\lambda_j} I_N^{(2)}(kl;\ \alpha)\,d\alpha\Big] =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [(K^{(lk)}x^{(k)},\ x^{(l)}) - \mathbf{M}(K^{(lk)}x^{(k)},\ x^{(l)}) +$$

$$+(S^{(lk)}x^{(k)},\ x^{(l)}) - \mathbf{M}(S^{(lk)}x^{(k)}x^{(l)})] =$$

$$=(Kx,\ x)+(Sx,\ x)-\mathbf{M}(Kx,\ x)-\mathbf{M}(Sx,\ x)=(Hy,\ y)-\mathbf{M}(Hy,\ y),$$

где

$$K_{rs}^{(lk)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{m} a_{jkl}\int\limits_0^{\lambda_j} \cos(r-s)\alpha\,d\alpha,$$

$$S_{rs}^{(lk)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{m} b_{jkl}\int\limits_0^{\lambda_j} \sin(r-s)\alpha\,d\alpha,$$

$$K^{(lk)} = \{K_{rs}^{(lk)}\}_{r=\overline{1,N}}^{s=\overline{1,N}},\quad S^{(lk)} = \{S_{rs}^{(lk)}\}_{r=\overline{1,N}}^{s=\overline{1,N}},\quad x^{(k)} = \{x_s^{(k)}\}_{s=\overline{1,N}},$$

$$K=\{K^{(lk)}\}_{l=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}},\quad S=\{S^{(lk)}\}_{l=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}},\quad x=\{x^{(k)}\}_{k=\overline{1,n}},$$

$$H=\begin{pmatrix} K, & 0 \\ 0, & S \end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Введем еще матрицу Q, положив

$$Q_{j_1j_2}=\frac{1}{2}\ (H_{j_1j_2}+H_{j_2j_1}).$$

Тогда очевидно, что: $\Theta_N=(Q\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})-\mathbf{M}(Q\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})$, Q – самосопряженная матрица, а $\boldsymbol{y}$ можно считать гауссовским вектором.

Для дальнейшего доказательства теоремы 4.1 нам понадобятся приведенные ниже леммы 4.2 – 4.4. Также в виде отдельной леммы 4.1 приведем две простые формулы из теории матриц.

Лемма 4.1. *Пусть*

$$A=\{A_{kl}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}},\quad A_{kl}=\{A_{kl}^{sr}\}_{s=\overline{1,N}}^{r=\overline{1,N}},$$

$$\boldsymbol{y}=\{y_l\}_{l=\overline{1,n}},\quad y_l=\{y_l^r\}_{r=\overline{1,N}},\quad z=\{z_k\}_{k=\overline{1,n}},\quad z_k=\{z_k^s\}_{s=\overline{1,N}},$$

где A_{kl}^{sr}, y_l^r *и* z_k^s *– комплексные числа. Тогда*

$$(A\boldsymbol{y},\ z)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(A_{kl}y_l,\ z_k),\tag{4.4}$$

$$\|A\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\|A_{kl}\|.\tag{4.5}$$

Лемма 4.2.

$$\|Q\|\leqslant\frac{C_1}{\sqrt{N}},$$

где C_1 *– константа, не зависящая от* N.

Доказательство. В силу (4.5), имеем (см. обозначения (4.3)):

$$\|Q\|=\sup_{\|z\|=1}|(Qz,\ z)|=\sup_{\|z\|=1}|(Hz,\ z)|\leqslant\|H\|\leqslant\|K\|+\|S\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[\|K^{(lk)}\|+\|S^{(lk)}\|].\tag{4.6}$$

В свою очередь,

$$\|K^{(lk)}\|=\frac{1}{2\pi\sqrt{N}}\sup_{\|u\|=\|v\|=1}\left|\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{jkl}\int_0^{\lambda_j}\cos(r-s)\,\alpha\,d\alpha\Big)u_s v_r\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi\sqrt{N}}\sup_{\|u\|=\|v\|=1}\left|\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{jkl}\int_0^{\lambda_j}e^{i(r-s)\alpha}d\alpha\Big)u_s v_r\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi\sqrt{N}}\|G^{(lk)}\|.$$

Так как $G^{(lk)}$ – самосопряженная матрица, то

$$\|G^{(lk)}\|=\sup_{\|u\|=1}|(G^{(lk)}u,\ u)|=\sup_{\|u\|=1}\left|\sum_{j=1}^{m}a_{jkl}\int_0^{\lambda_j}\Big|\sum_{s=1}^{N}e^{-is\alpha}u_s\Big|^2d\alpha\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\|u\|=1}\sum_{j=1}^{m}|a_{jkl}|\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{s,r}e^{i(r-s)\alpha}u_s\overline{u_r}\,d\alpha=2\pi\sum_{j=1}^{m}|a_{jkl}|.$$

Аналогично получаем, что

$$\| S^{(lk)} \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{m} | b_{jkl} | .$$

Подставляя полученные оценки в (4.6), имеем

$$\| Q \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} [| a_{jkl} | + | b_{jkl} |] = \frac{C_1}{\sqrt{N}} .$$

Лемма 4.3. *В условиях теоремы* 4.1 *для каждого* $\varepsilon > 0$ *при* $N \to \infty$

$$\| B \| \leqslant C_2 \varepsilon \sqrt{N} + \frac{\sqrt{N}}{\varepsilon} \cdot o(1),$$

где $B = \mathbf{M} yy'$ (*см. обозначения* (4.3)), *а константа* C_2 *не зависит от* N.

Доказательство. Имеем

$$B = \mathbf{M} yy' = \mathbf{M} \begin{pmatrix} xx', & xx' \\ xx', & xx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R, & R \\ R, & R \end{pmatrix},$$

поэтому $\| B \| \leqslant 4 \| R \|$. Так как

$$R = \{ R^{(kl)} \}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}, \qquad R^{(kl)} = \{ \mathbf{M} x_s^{(k)} x_r^{(l)} \}_{s=\overline{1,N}}^{r=\overline{1,N}},$$

то в силу (4.5)

$$\| R \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \| R^{(kl)} \| .$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \| R^{(kl)} \| &= \sup_{\| u \| = \| v \| = 1} | (R^{(kl)} u, v) | = \\ &= \sup \left| \sum_{s=1}^{N} \sum_{r=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-r)\lambda} f_{kl}(\lambda) \, d\lambda \, u_r v_s \right| \leqslant \\ &\leqslant \sup \left| \sum_{s,r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-r)\lambda} [f_{kl}^{(1)}(\lambda)]^+ \, d\lambda \, u_r v_s \right| + \\ &+ \sup \left| \sum_{s,r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-r)\lambda} [f_{kl}^{(1)}(\lambda)]^- d\lambda \, u_r v_s \right| + \\ &+ \sup \left| \sum_{s,r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-r)\lambda} [f_{kl}^{(2)}(\lambda)]^+ \, d\lambda \, u_r v_s \right| + \\ &+ \sup \left| \sum_{s,r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-r)\lambda} [f_{kl}^{(2)}(\lambda)]^- \, d\lambda \, u_r v_s \right| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь sup всюду берется по $\| u \| = \| v \| = 1$.

Теперь зафиксируем $\varepsilon > 0$ и оценим I_1. Очевидно, что $I_1 \leqslant \| A \|$, где

$$A = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-r)\lambda} [f_{kl}^{(1)}(\lambda)]^+ \, d\lambda \right\}_{s=\overline{1,N}}^{r=\overline{1,N}} .$$

Так как A — самосопряженная матрица, и

$$\left|\sum_{s=1}^{N} e^{-is\lambda} z_s\right|^2 \leqslant N\cdot\|z\|^2,$$

то

$$\|A\| = \sup_{\|z\|=1} |(Az,\ z)| = \sup_{\|z\|=1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{s=1}^{N} e^{-is\lambda} z_s\right|^2 [f_{kl}^{(1)}(\lambda)]^+ d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant N\cdot \int\limits_{\{\lambda:[f_{kl}^{(1)}(\lambda)]^+ > \varepsilon\sqrt{N}\}} [f_{kl}^{(1)}(\lambda)]^+ d\lambda +$$

$$+\varepsilon\sqrt{N} \sup_{\|z\|=1} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s,\,r} e^{i(r-s)\lambda} z_s \bar{z}_r d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{N}}{\varepsilon}\cdot \int\limits_{\{\lambda:[f_{kl}^{(1)}(\lambda)]^+ > \varepsilon\sqrt{N}\}} ([f_{kl}^{(1)}(\lambda)]^+)^2 d\lambda + 2\pi\varepsilon\sqrt{N}.$$

Аналогично оценив I_2, I_3 и I_4 и поставив все в (4.7), получим

$$\|R^{(kl)}\| \leqslant 8\pi\varepsilon\sqrt{N} + \frac{\sqrt{N}}{\varepsilon}\cdot \int\limits_{\{\lambda:|f_{kl}(\lambda)|>\varepsilon\sqrt{N}\}} |f_{kl}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Итак,

$$\|B\| \leqslant 32\pi n^2 \varepsilon\sqrt{N} + \frac{\sqrt{N}}{\varepsilon}\cdot 4 \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \int\limits_{\{\lambda:|f_{kl}(\lambda)|>\varepsilon\sqrt{N}\}} |f_{kl}(\lambda)|^2 d\lambda,$$

что и завершает доказательство.

Лемма 4.4. (см. [1], стр. 428). *Пусть:* $\boldsymbol{y}$ — *конечномерный гауссовский вектор со средним* 0 *и корреляционной матрицей* $\boldsymbol{B}$, Q — *самосопряженная матрица. Если* $\|Q\|\cdot\|\boldsymbol{B}\| < \varepsilon$ *и* $\mathbf{D}(Q\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}) > 0$, *то для всех достаточно малых* ε

$$\left|\mathbf{P}\left\{\frac{(Qy,\ y) - \mathbf{M}(Qy,\ y)}{\sqrt{\mathbf{D}(Qy,\ y)}} < z\right\} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right| \leqslant C_3\varepsilon.$$

Теперь мы в состоянии закончить доказательство теоремы 4.1.

Если $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{D}\Theta_N > 0$, то в силу лемм 4.2, 4.3 и 4.4, имеем

$$\frac{\Theta_N}{\sqrt{\mathbf{D}\Theta_N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,\ 1) \quad \text{при} \quad N\to\infty,$$

и, следовательно,

$$\Theta_N \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,\ \lim_{N\to\infty} \mathbf{D}\Theta_N) \quad \text{при} \quad N\to\infty. \tag{4.8}$$

Если $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{D}\Theta_N = 0$, то (4.8) очевидно. Так как в силу следствия 3.2 $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{D}\Theta_N$ равняется выражению (4.2), то теорема доказана.

§ 5. Слабая компактность последовательностей $\zeta_N^{(j)}(kl;\ \lambda)$

Цель этого параграфа — доказать, что последовательности случайных процессов $\zeta_N^{(j)}(kl;\ \lambda)$, $N\geqslant 1$, $j=1,\ 2$, рассматриваемые как последовательности случайных элементов со значениями в $C[0,\ \pi]$, слабо компактны. Здесь, как и всюду ниже, k и l фиксированные, но любые между 1 и n.

Теорема 5.1. *Если для стационарной гауссовской последовательности* $\{x_j\}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}^2(\lambda)\,d\lambda<\infty \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f_{ll}^2(\lambda)\,d\lambda<\infty,$$

то последовательности случайных процессов $\zeta_N^{(j)}(kl;\ \lambda)$, $N\geqslant 1$, $j=1,\ 2$, *слабо компактны.*

Доказательство теоремы 5.1 следует из приведенных ниже лемм 5.1, 5.2 и 5.4. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{N\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha=1, \qquad N=1,\ 2,\ \ldots$$

Лемма 5.1. *Последовательность случайных процессов* $\eta_N(\lambda)$, $N\geqslant 1$, *почти все реализации которых принадлежат* $C[0,\ \pi]$, *слабо компактна тогда и только тогда, когда*

1) *последовательность* $\eta_N(0)$, $N\geqslant 1$, *слабо компактна;*

2) *для каждого* $\varepsilon>0$

$$\sup_N \mathbf{P}\{\sup_{|\lambda_2-\lambda_1|<\delta}|\eta_N(\lambda_2)-\eta_N(\lambda_1)|>\varepsilon\}\to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to 0.$$

Условие 2) *заведомо выполнено, если выполнено условие*

3) *существуют числа* $a,\ b>0$ *и неубывающие на* $[0,\ \pi]$ *функции* $G_N(\lambda)$, $N\geqslant 1$, *для которых*

$$\sup_N \sup_{|\lambda_2-\lambda_1|<\delta}|G_N(\lambda_2)-G_N(\lambda_1)|\to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to 0,$$

такие, что

$$\mathbf{M}|\eta_N(\lambda_2)-\eta_N(\lambda_1)|^a\leqslant|G_N(\lambda_2)-G_N(\lambda_1)|^{1+b}.$$

Для доказательства леммы 5.1 достаточно очевидным образом изменить доказательства теорем 8.2 и 12.3 работы [7].

Лемма 5.2. *В условиях теоремы* 5.1

$$\mathbf{M}|\xi_N(kl;\ \lambda_2)-\xi_N(kl;\ \lambda_1)|^4\leqslant|G_N(\lambda_2)-G_N(\lambda_1)|^2, \tag{5.1}$$

где

$$G_N(\lambda)=\frac{\sqrt{15}}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{N\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}\,d\beta\int_0^{\lambda}[h(\alpha+\beta)+h(\alpha-\beta)]\,d\alpha, \tag{5.2}$$

$$h(\beta)=f_{kk}^2(\beta)+|f_{kl}(\beta)|^2+f_{ll}^2(\beta). \tag{5.3}$$

Здесь $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$, *а функция* $h(\beta)$ *считается периодичной с периодом* 2π.

Для доказательства леммы 5.2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.3. *В условиях теоремы* 5.1

$$\left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{M}\left[\sum_{s=1}^{N} e^{is\alpha} x_s^{(k)} \sum_{t=1}^{N} e^{it\beta} x_t^{(k)}\right] \cdot \mathbf{M}\left[\sum_{s=1}^{N} e^{is\gamma} x_s^{(k)} \sum_{t=1}^{N} e^{-it\beta} x_t^{(l)}\right] d\beta \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} h(\beta) \left| \sum_{s=1}^{N} e^{is(\alpha+\beta)} \right|^2 d\beta \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} h(\beta) \left| \sum_{s=1}^{N} e^{is(\gamma+\beta)} \right|^2 d\beta \right\}^{1/2}. \quad (5.4)$$

Доказательство. Обозначив левую сторону (5.4) через I, имеем

$$I = \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sum_{t=1}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) e^{-itu} du \right) e^{it\beta} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{t=1}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \psi(v) e^{-itv} dv \right) e^{-it\beta} \right) d\beta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\varphi(u) e^{-itu} du \right) e^{it\beta} \right|^2 d\beta \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\psi(v) e^{-itv} dv \right) e^{-it\beta} \right|^2 d\beta \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(u)|^2 du \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(v)|^2 dv \right\}^{1/2},$$

где

$$\varphi(u) = f_{kk}(u) \sum_{s=1}^{N} e^{is(\alpha+u)}, \quad \psi(v) = f_{kl}(v) \sum_{s=1}^{N} e^{is(\gamma+v)}.$$

Отсюда, учитывая (5.3), получаем (5.4). Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства леммы 5.3 видно, что в левой части (5.4) некоторые k можно заменить на l, или некоторые l на k. Оценка при этом не меняется.

Доказательство леммы 5.2. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда

$$M = \mathbf{M} \left| \xi_N(kl;\ \lambda_2) - \xi_N(kl;\ \lambda_1) \right|^4 =$$

$$= \frac{1}{(4\pi^2 N)^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdots \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{M} \prod_{j=1}^{2} \times$$

$$\times \left\{ \sum\nolimits_N (\alpha_j, k) \sum\nolimits_N (-\alpha_j, l) \sum\nolimits_N (-\beta_j, k) \sum\nolimits_N (\beta_j, l) - \right.$$

$$- \sum\nolimits_N (\alpha_j, k) \sum\nolimits_N (-\alpha_j, l) \cdot \mathbf{M} \left[\sum\nolimits_N (-\beta_j, k) \sum\nolimits_N (\beta_j, l) \right] -$$

$$- \mathbf{M} \left[\sum\nolimits_N (\alpha_j, k) \sum\nolimits_N (-\alpha_j, l) \right] \cdot \sum\nolimits_N (-\beta_j, k) \sum\nolimits_N (\beta_j, l) +$$

$$\left. + \mathbf{M} \left[\sum\nolimits_N (\alpha_j, k) \sum\nolimits_N (-\alpha_j, l) \right] \cdot \mathbf{M} \left[\sum\nolimits_N (-\beta_j, k) \sum\nolimits_N (\beta_j, l) \right] \right\} \times$$

$$\times d\alpha_1 d\beta_1 d\alpha_2 d\beta_2,$$

где

$$\sum\nolimits_N (\alpha,\ k)=\sum_{s=1}^{N} e^{is\alpha} x_s^{(k)}.$$

Если $(z_1,\ \ldots,\ z_{2n})$, $z_j\in R^1$, $\mathbf{M}z_j=0$, — гауссовский вектор, то

$$\mathbf{M}z_1\ldots z_{2n}=\sum \mathbf{M}(z_{j_1}z_{j_2})\ldots\mathbf{M}(z_{j_{2n-1}}z_{j_{2n}}),$$

где суммирование ведется по всевозможным неупорядоченным разбиениям множества $(1,\ \ldots,\ 2n)$ по два (см., например, [3], стр. 344), т. е. всего будет $(2n-1)!!$ слагаемых. Поэтому после преобразования и сокращения подобных членов получим

$$M=\frac{1}{(4\pi^2N)^2}\sum\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\ldots\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\prod_{j=1}^{4}\mathbf{M}\left[\sum\nolimits_N(\mu_j,\ \tilde{k})\sum\nolimits_N(\nu_j,\ \tilde{l})\right]\times$$
$$\times d\alpha_1\,d\beta_1\,d\alpha_2\,d\beta_2, \tag{5.5}$$

где суммирование ведется по всем неупорядоченным разбиениям по два множества

$$\{(\alpha_1,k),\ (-\alpha_1,l),\ (-\beta_1,k),\ (\beta_1,l),\ (\alpha_2,k),\ (-\alpha_2,l),\ (-\beta_2,k),\ (\beta_2,l)\},$$

но только по таким, в которых нет элементов $\{(\mu_j,\ \tilde{k}),\ (\nu_j,\ \tilde{l})\}$ с $\mu_j=-\nu_j$. Кроме того,

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(\beta)\left|\sum_{s=1}^{N}e^{is(\alpha+\beta)}\right|^2 d\beta\right\}^{1/2}\cdot\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(\beta)\left|\sum_{s=1}^{N}e^{is(-\alpha+\beta)}\right|^2 d\beta\right\}^{1/2}d\alpha\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(\beta)\,d\beta\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\left|\sum_{s=1}^{N}e^{is(\alpha+\beta)}\right|^2+\left|\sum_{s=1}^{N}e^{is(-\alpha+\beta)}\right|^2\right]d\alpha. \tag{5.6}$$

Поочередное применение к (5.5) леммы 5.3 и неравенства (5.6) с учетом (5.2) дает (5.1). Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Если* $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f_{kl}(\lambda)|^2d\lambda<\infty$ *и при каждом* $\varepsilon>0$

$$\sup_N\mathbf{P}\{\sup_{|\lambda_2-\lambda_1|<\delta}|\xi_N(kl;\ \lambda_2)-\xi_N(kl;\ \lambda_1)|>\varepsilon\}\to 0\quad \text{при}\quad \delta\to 0,$$

то при каждом $\varepsilon_1>0$

$$\sup_N\mathbf{P}\{\sup_{|\lambda_2-\lambda_1|<\delta_1}|\zeta_N(kl;\ \lambda_2)-\zeta_N(kl;\ \lambda_1)|>\varepsilon_1\}\to 0\quad \text{при}\quad \delta_1\to 0.$$

Доказательство леммы 5.4 аналогично доказательству такого же утверждения в случае $k=l=1$ (см. [1], стр. 411), поэтому мы его опускаем.

Я глубоко благодарен В. А. Статулявичусу и И. А. Ибрагимову за постановку задачи и ценные указания, полученные в ходе ее решения.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
27.XI.1970

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса, Теория вероят. и ее примен., **VIII**, 4(1963), 391–430.
2. И. А. Ибрагимов, Т. М. Товстик, Об оценке спектральных функций одного класса стационарных случайных последовательностей, Вестник ЛГУ, № 1 (1964), 42–57.
3. В. П. Леонов, А. Н. Ширяев, К технике вычисления семиинвариантов, Теория вероят. и ее. примен., **IV**, 3(1959), 342–355.
4. Т. Л. Малевич, Об асимптотическом поведении оценки спектральной функции стационарного гауссовского процесса, Теория вероят. и ее примен., **IX**, 2(1964), 386–390.
5. D. R. Brillinger, Asymptotic properties of spectral estimates of second order, Biometrika (1969), **56**, 2, 375–390.
6. Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., **I**, 2(1956), 177–237.
7. P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, J. Wiley, New York, 1968.
8. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, „Наука", М., 1965.
9. Ю. А. Розанов, Стационарные случайные процессы, Физматгиз, М., 1963.

APIE DAUGIAMATĖS STACIONARIOS GAUSO SEKOS SPEKTRINĖS FUNKCIJOS ĮVERTINIMO ASIMPTOTIKĄ

R. Bentkus

(Reziumė)

Sakykime, $\{x_j, j=0, \pm 1, \ldots\}$ (čia $x_j=\{x_j^{(k)}\}\in R^n$, $\mathbf{M}x_j=0$) — stacionari Gauso seka su a priori nežinoma spektrine funkcija $F(\lambda)$. Ši funkcija laikoma absoliučiai tolydine, $F'(\lambda)=f(\lambda)=\{f_{kl}(\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$. Spektrinės funkcijos $F(\lambda)$, $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$, įvertinimui naudojama statistika

$$F_N(\lambda)=\left\{\frac{1}{2\pi N}\int_0^\lambda \sum_{s=1}^N e^{-is\alpha} x_s^{(k)} \sum_{t=1}^N e^{it\alpha} x_t^{(l)}\, d\alpha\right\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}.$$

Darbe nagrinėjama asimptotika, kai $N\to\infty$, n^2-mačio kompleksinio atsitiktinio proceso $\zeta_N(\lambda)=\sqrt{N}[F_N(\lambda)-F(\lambda)]$, $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$, apibrėžiančio atsitiktinį elementą ζ_N su reikšmėmis $2n^2$ metrinių erdvių $C[0,\pi]$ dekartinėje sandaugoje. Įrodoma: jeigu $\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}^2(\lambda)\,d\lambda<\infty$, $1\leqslant k\leqslant n$, tai ζ_N konverguoja pagal pasiskirstymą į atsitiktinį elementą ζ, atitinkantį Gauso procesą $\zeta(\lambda)$, $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$, su charakteristikomis (0.3).

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE SPECTRAL FUNCTION ESTIMATION OF A MULTIVARIATE STATIONARY GAUSSIAN TIME SERIES

R. Bentkus

(Summary)

Let $\{x_j, j=0, \pm 1, \ldots\}$, where $x_j=\{x_j^{(k)}\}\in R^n$, $\mathbf{M}x_j=0$, is a Gaussian stationary time series with the unknown spectral function $F(\lambda)$ supposed to be absolutely continuous, $F'(\lambda)=f(\lambda)=\{f_{kl}(\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$. The statistic

$$F_N(\lambda)=\left\{\frac{1}{2\pi N}\int_0^\lambda \sum_{s=1}^N e^{-is\alpha} x_s^{(k)} \sum_{t=1}^N e^{it\alpha} x_t^{(l)}\, d\alpha\right\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$$

is used as an estimate of $F(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$. The n^2-dimensional complex stochastic process $\zeta_N(\lambda) = \sqrt{N}[F_N(\lambda) - F(\lambda)]$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$, defines the random element ζ_N with values in the Cartesian product of the $2n^2$ metric spaces $C[0, \pi]$. It is proved that if $\int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}^2(\lambda)\, d\lambda < \infty$, $1 \leqslant k \leqslant n$, then ζ_N converges in distribution, when $N \to \infty$, to the random element ζ corresponding to the Gaussian process $\zeta(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$, with characteristics (0.3).