XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1971

УДК 519.21

ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ

Б. Григелионис

Введение

Пусть случайные процессы $X^{(i)}=\{X_t^{(i)},\ t\geqslant 0\}$, $i=1,2$, принимают значения в m-мерном евклидовом пространстве $(R_m,\ \mathscr{B}_m)$ и заданы на вероятностных пространствах $(\Omega^{(i)},\ \mathscr{F}^{(i)},\ \mathbf{P}^{(i)})$, $i=1,2$, соответственно. Обозначим $\mu_T^{(i)}$, $i=1,2$, меры, соответствующие случайным процессам $X^{(i)}$, $i=1,2$, на σ-алгебре $\mathscr{F}_{[0,T]}^{(m)}$, порожденной цилиндрическими множествами в пространстве всех функций, определенных в интервале $[0,\ T]$ и принимающих значения в R_m. Пусть далее $\mathbf{P}_T^{(1)}$ – сужение меры $\mathbf{P}^{(1)}$ на σ-алгебру $\mathscr{F}_T^{(1)}=\sigma(X_s^{(1)},\ 0\leqslant s\leqslant T)$, $P_T^{(2)}$ – мера, определенная на σ-алгебре $\mathscr{F}_T^{(1)}$ по формуле:

$$P_T^{(2)}(A)=\mu_T^{(2)}(B),$$

если

$$A=\{\omega : X^{(1)}(\omega)\in B\},\qquad B\in\mathscr{F}_{[0,T]}^{(m)}.$$

В настоящей работе для широкого класса случайных процессов, в частности, включающего в себя многие случайные процессы, представляющие компоненты многомерных марковских процессов, будут исследованы условия абсолютной непрерывности мер $\mu_T^{(i)}$, $i=1,2$, и мер $P_T^{(i)}$, $i=1,2$, а также найдены формулы для плотностей $\dfrac{dP_T^{(2)}}{dP_T^{(1)}}(X^{(1)})$. Обширную библиографию работ, относящихся к рассматриваемым задачам, можно найти в обзорной статье [1] (см. также работы [2–9]).

[§ 1. Преобразование случайных процессов абсолютно непрерывной заменой меры

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{P})$ задана возрастающая система σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, таких, что $\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_t=\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\mathscr{F}_{t+\varepsilon}=\mathscr{F}_{t+0}$, $t\geqslant 0$, причем $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, пополнены по мере $\mathbf{P}$. Далее мы будем пользоваться обозначениями и определениями работы [10].

Рассмотрим случайный процесс $X=(X_1,\ \ldots,\ X_m)\in\mathfrak{M}_c^{(m),\,\mathrm{loc}}$, такой, что

$$\langle X_i,\ X_j\rangle_t=\int\limits_0^t a_{ij}(s)\,ds,$$

и целочисленную случайную меру $p(A)$, $A \in \mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{B}_m$, согласованную с системой σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$, и удовлетворяющую предположению ($*$) п. 3 в [10], в частности, такую, что для всех $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$$q(t, \Gamma) = p(t, \Gamma) - \int_0^t \Pi(s, \Gamma)\, ds \in \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}. \tag{1}$$

Пусть далее случайные функции $\psi(t) = \left(\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)\right)$ и $\varphi(t, x)$, $t \geqslant 0$, $x \in R_m$, такие, что $\psi_i \in L(\langle X_i \rangle)$, $i = 1, \ldots, m$, $\varphi_1 \in F_Q$ и $\varphi_2 \in F_P$, где

$$\varphi_1(t, x) = \begin{cases} \varphi(t, x) & \text{при } |\varphi(t, x)| < 1, \\ 0 & \text{при } |\varphi(t, x)| \geqslant 1, \end{cases}$$

а $\varphi_2(t, x) = \varphi(t, x) - \varphi_1(t, x)$.

Обозначим

$$X_\psi(t) = \sum_{i=1}^m \int_0^t \psi_i(s)\, dX_i(s),$$

$$\langle X_\psi \rangle_t = \int_0^t \left(\psi(s) A(s), \psi(s)\right) ds,$$

$$\alpha_t = \alpha_t(\psi, \varphi) = \exp\left\{ X_\psi(t) - \frac{1}{2} \langle X_\psi \rangle_t + Q_{\varphi_1}(t) + P_{\varphi_2}(t) - \right.$$

$$- \int_0^t \int_{R_m} \left(e^{\varphi_1(s, y)} - 1 - \varphi_1(s, y)\right) \Pi(s, dy)\, ds -$$

$$\left. - \int_0^t \int_{R_m} (e^{\varphi_2(s, y)} - 1)\, \Pi(s, dy)\, ds \right\}, \tag{2}$$

где

$$A(t) = \| a_{ij}(t) \|_1^m, \qquad (x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i.$$

Аналогично теореме 6.1 в [11], можно показать, что если для всех $t > 0$ почти всюду по мере $\mathbf{P}$ (п. в.)

$$\int_0^t \int_{R_m} \varphi_1^2(s, y)\, \Pi(s, dy)\, ds < \infty \tag{3}$$

и

$$\left| \int_0^t \int_{R_m} (e^{\varphi_2(s, y)} - 1)\, \Pi(s, dy) \right| < \infty, \tag{4}$$

то $\{\alpha_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ является локальным мартингалом.

В предположении, что $\{\alpha_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ является мартингалом, получим, что $\mathbf{E}\alpha_t \equiv 1$, и на σ-алгебре $\mathscr{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup\limits_{t\geqslant 0} \mathscr{F}_t\Big)$ равенством

$$\tilde{\mathbf{P}}(A) = \int\limits_A \alpha_t d\mathbf{P}, \qquad A \in \mathscr{F}_t, \qquad t \geqslant 0, \tag{5}$$

определим вероятностную меру $\tilde{\mathbf{P}}$.

Определим классы случайных процессов $\tilde{\mathfrak{M}}^{(m),\,\mathrm{loc}}$ и т. д. аналогично $\mathfrak{M}^{(m),\,\mathrm{loc}}$ и т. д. лишь с заменой $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ на $(\Omega, \mathscr{F}_\infty, \tilde{\mathbf{P}})$ и обозначим

$$\tilde{X}_t = X_t - \int\limits_0^t \psi(s) A(s)\, ds - \int\limits_0^t \int\limits_{|y| \leqslant 1} y\,(e^{\varphi(s,y)} - 1)\, \Pi(s, dy)\, ds, \tag{6}$$

$$\tilde{\Pi}(t, \Gamma) = \int\limits_\Gamma e^{\varphi(t,y)}\, \Pi(t, dy).$$

Используя обобщенную формулу К. Ито (см., например, [10]) и рассуждая аналогично доказательству теоремы 2 в [4], получим следующее утверждение.

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях* $\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{M}}_c^{(m),\,\mathrm{loc}}$,

$$\langle \tilde{X}_i, \tilde{X}_j \rangle_t = \int\limits_0^t a_{ij}(s)\, ds, \qquad i, j = 1, \ldots, m,$$

и для всех $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$$\tilde{q}(t, \Gamma) = p(t, \Gamma) - \int\limits_0^t \tilde{\Pi}(s, \Gamma)\, ds \in \tilde{\mathfrak{M}}^{\mathrm{loc}}.$$

Пусть далее $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) = (\Omega^{(1)}, \mathscr{F}^{(1)}, \mathbf{P}^{(1)})$, случайный процесс $X^{(1)}$ согласован с системой σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$, его траектории непрерывны справа и имеют пределы слева, а мера скачков $p^{(1)}$ удовлетворяет предположению (*) п.3 в [10] с функцией $\Pi^{(1)}(t, \Gamma)$. Предположим, кроме того, что существует функция $a^{(1)}(t) = \big(a_1^{(1)}(t), \ldots, a_m^{(1)}(t)\big)$ и матрица $A^{(1)}(t) = \| a_{ij}^{(1)}(t) \|_1^m$, такие, что $a_i^{(1)}(t)$, $a_{ij}^{(1)}(t)$, $i, j = 1, \ldots, m$, $\mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{F}$ – измеримы, согласованы с системой σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$,

$$\hat{X}_t^{(1)} = X_t^{(1)} - \int\limits_0^t a^{(1)}(s)\, ds - \int\limits_0^t \int\limits_{|y| \leqslant 1} y q^{(1)}(ds, dy) -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_{|y| > 1} y p^{(1)}(ds, dy) \in \mathfrak{M}_c^{(m),\,\mathrm{loc}} \tag{7}$$

и

$$\langle \hat{X}_i, \hat{X}_j \rangle_t = \int\limits_0^t a_{ij}^{(1)}(s)\, ds.$$

Случайный процесс $\{\alpha_t^{(1)}, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$ определим формулой (2), полагая $X_t=\hat{X}_t^{(1)}$ и $p=p^{(1)}$, и предположим, что он является мартингалом.

Из формул (6) и теоремы 1 получаем такое важное для дальнейшего утверждение.

Следствие 1. *Случайный процесс $X^{(1)}$ относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}^{(1)}$, определенной формулой* (5) *с $\alpha_t=\alpha_t^{(1)}$, удовлетворяет предположениям* (1) *и* (7) *с функциями $\tilde{\Pi}^{(1)}(t, \Gamma)=\int\limits_{\Gamma} e^{\varphi(t,y)}\,\Pi^{(1)}(t, dy)$,*

$$\tilde{a}^{(1)}(t)=a^{(1)}(t)+\psi(t)A^{(1)}(t)+\int\limits_{|y|\leqslant 1} y\,(e^{\varphi(t,y)}-1)\,\Pi^{(1)}(t, dy) \tag{8}$$

и $\tilde{A}^{(1)}(t)=A^{(1)}(t)$.

§ 2. Критерий абсолютной непрерывности мер

Обозначим $\tilde{\mu}_T^{(1)}$ меру на σ-алгебре $\mathscr{F}_{[0,T]}^{(m)}$, соответствующую случайному процессу $X^{(1)}$ относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}^{(1)}$ в предположении, что распределение $X_0^{(1)}$ равно распределению $X_0^{(2)}$. Мы будем далее предполагать, что распределение $X_0^{(2)}$ абсолютно непрерывно относительно распределения $X_0^{(1)}$ с плотностью $\rho_0(x)$.

Имеет место следующий общий критерий абсолютной непрерывности вероятностных мер.

Теорема 2. *Если при некотором выборе функций ψ и φ меры $\tilde{\mu}_T^{(1)}$ и $\mu_T^{(2)}$ совпадают, то $\mu_T^{(2)}\ll\mu_T^{(1)}$, а также $P_T^{(2)}\ll P_T^{(1)}$ и*

$$\frac{dP_T^{(2)}}{dP_T^{(1)}}(X^{(1)})=\rho_0(X_0^{1})\,\mathbf{E}^{(1)}(\alpha_T^{(1)}\,|\,\mathscr{F}_T^{(1)})^{*)}. \tag{9}$$

Доказательство. В силу предположений теоремы имеем, что для всех $B\in\mathscr{F}_{[0,T]}^{(m)}$

$$\mu_T^{(1)}(B)=\mathbf{E}^{(1)}\chi(X^{(1)}\in B)$$

и

$$\mu_T^{(2)}(B)=\tilde{\mu}_T^{(1)}(B)=\mathbf{E}^{(1)}\left(\rho_0(X_0^{(1)})\,\alpha_T^{(1)}\,\chi(X^{(1)}\in B)\right),$$

откуда следует, что $\mu_T^{(2)}\ll\mu_T^{(1)}$.

Далее, поскольку для каждого $A\in\mathscr{F}_T^{(1)}$ существует $B\in\mathscr{F}_{[0,T]}^{(m)}$, такое, что $A=\{\omega : X_{(\omega)}^{(1)}\in B\}$, то

$$P_T^{(1)}(A)=\mathbf{P}^{(1)}\{X^{(1)}\in B\}=\mathbf{E}^{(1)}\chi_A$$

и

$$\begin{aligned} P_T^{(2)}(A)&=\mu_T^{(2)}(B)=\tilde{\mu}_T^{(1)}(B)=\mathbf{E}^{(1)}\left(\rho_0(X_0^{(1)})\,\alpha_T^{(1)}\chi_A\right)=\\ &=\mathbf{E}^{(1)}[\chi_A\rho_0(X_0^{(1)})\,\mathbf{E}^{(1)}(\alpha_T^{(1)}\,|\,\mathscr{F}_T^{(1)})]=\\ &=\int\limits_A \rho_0(X_0^{(1)})\,\mathbf{E}^{(1)}(\alpha_T^{(1)}\,|\,\mathscr{F}_T^{(1)})\,dP_T^{(1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

---

*) Символ $\mathbf{E}^{(1)}$ обозначает среднее по мере $\mathbf{P}^{(1)}$.

Из (10) и следует, что $P_T^{(2)} \ll P_T^{(1)}$ и имеет место формула (9).

Замечание 1. Из (9) имеем, что если $\mathbf{P}^{(1)}\{\rho_0(X_0^{(1)})\alpha_T^{(1)} > 0\} = 1$, то при условиях теоремы 2 $P_T^{(1)} \ll P_T^{(2)}$ и

$$\frac{dP_T^{(1)}}{dP_T^{(2)}}(X^{(1)}) = [\rho_0(X_0^{(1)})\,\mathbf{E}^{(1)}(\alpha_T^{(1)} \mid \mathcal{F}_T^{(1)})]^{-1}.$$

Замечание 2. При конкретных применениях теоремы 2 возникают следующие задачи: 1) найти условия на локальные характеристики $a^{(1)}(t)$, $A^{(1)}(t)$, $\Pi^{(1)}(t, \Gamma)$ случайного процесса $X^{(1)}$ и функции $\psi(t)$, $\varphi(t, x)$, при которых случайный процесс $\{\alpha_t^{(1)}, \mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ является мартингалом; 2) найти условия, при которых начальное распределение и локальные характеристики случайного процесса однозначно определяют меру, соответствующую ему на σ-алгебре $\mathcal{F}_{[0,T]}^{(m)}$, и 3) найти более явное выражение для плотностей мер в формуле (9).

Проиллюстрируем сказанное на некоторых примерах, а задачу 1) более подробно рассмотрим ниже в § 4.

§ 3. Примеры

Пример 1 (см. [4]). Допустим, что локальные характеристики случайного процесса $X^{(1)}$ относительно системы σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$ имеют вид: $a^{(1)}(t) = a^{(1)}(t, X_t^{(1)})$, $A^{(1)}(t) = A^{(1)}(t, X_t^{(1)})$ и $\Pi^{(1)}(t, \Gamma) = \Pi^{(1)}(t, X_t^{(1)}, \Gamma)$ и аналогично локальные характеристики случайного процесса $X^{(2)}$ относительно некоторой монотонной системы σ-алгебр $\mathcal{F}'_t$, $t \geqslant 0$, в вероятностном пространстве $(\Omega^{(2)}, \mathcal{F}^{(2)}, \mathbf{P}^{(2)})$ имеют вид: $a^{(2)}(t) = a^{(2)}(t, X_t^{(2)})$, $A^{(2)}(t) = A^{(2)}(t, X_t^{(2)})$ и $\Pi^{(2)}(t, \Gamma) = \Pi^{(2)}(t, X_t^{(2)}, \Gamma)$, где функции $a^{(i)}(t, x)$, $A^{(i)}(t, x)$ и $\Pi^{(i)}(t, x, \Gamma)$, $i = 1, 2$, неслучайны. Предположим, что начальное распределение и локальные характеристики $a^{(2)}(t, x)$, $A^{(2)}(t, x)$ и $\Pi^{(2)}(t, x, \Gamma)$ однозначно определяют меру $\mu_T^{(2)}$ на σ-алгебре $\mathcal{F}_{[0,T]}^{(m)}$ независимо от вероятностного пространства, на котором рассматривается случайный процесс с такими характеристиками.

Если, кроме того, для всех $\Gamma \in \mathcal{B}_m$

$$\Pi^{(2)}(t, x, \Gamma) \equiv \int_\Gamma \rho(t, x, y)\,\Pi^{(1)}(t, x, dy),$$

$$A^{(1)}(t, x) \equiv A^{(2)}(t, x)$$

и существует функция $\psi(t, x)$ такая, что

$$a^{(2)}(t, x) \equiv a^{(1)}(t, x) + \psi(t, x)\,A^{(1)}(t, x) + \int_{|y| \leqslant 1} y\left(\rho(t, x, y) - 1\right)\Pi^{(1)}(t, x, dy),$$

причем $(\alpha_t^{(1)}, \mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$ при $\psi(t) = \psi(t, X_t^{(1)})$ и $\varphi(t, x) = \ln \rho(t, X_{t-0}^{(1)}, x)$ является мартингалом, то выполнены условия теоремы 2 и

$$\frac{dP_T^{(2)}}{dP_T^{(1)}}(X^{(1)}) = \rho_0(X_0^{(1)})\,\alpha_T^{(1)}.$$

Это утверждение в силу сделанных предположений немедленно следует из следствия 1, теоремы 2 и того, что $\alpha_T^{(1)}$ является $\mathscr{F}_T^{(1)}$ измеримой случайной величиной.

Пример 2. Пусть случайные процессы $X^{(i)}$, $i=1,2$, заданы на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ и относительно непрерывной справа монотонной системы σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, имеют локальные характеристики $a^{(i)}(t)=a^{(i)}(t, \theta_t, X_t^{(i)})$, $A^{(i)}(t)=A^{(i)}(t, \theta_t, X_t^{(i)})$, $\Pi^{(i)}(t, \Gamma)=\Pi^{(i)}(t, \theta_t, X_t^{(i)})$, $i=1, 2$, где θ_t, $t\geqslant 0$, случайный процесс, согласованный с системой σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, и принимающий значения в измеримом пространстве $(\Theta, \mathscr{B}_\Theta)$, а функции $a^{(i)}(t, \theta, x)$, $A^{(i)}(t, \theta, x)$ и $\Pi^{(i)}(t, \theta, x, \Gamma)$, $i=1, 2$, неслучайны. Также как и в примере 1, если начальное распределение и функции $a^{(2)}(t, \theta, x)$, $A^{(2)}(t, \theta, x)$ и $\Pi^{(2)}(t, \theta, x, \Gamma)$ однозначно определяют меру $\mu_T^{(2)}$, $A^{(1)}(t, \theta, x)\equiv A^{(2)}(t, \theta, x)$,

$$\Pi^{(2)}(t, \theta, x, \Gamma)\equiv \int_\Gamma \rho(t, \theta, x, y)\,\Pi^{(1)}(t, \theta, x, dy)$$

и существует функция $\psi(t, \theta, x)$, такая, что

$$a^{(2)}(t, \theta, x)\equiv a^{(1)}(t, \theta, x)+\psi(t, \theta, x)A^{(1)}(t, \theta, x)+$$
$$+\int_{|y|\leqslant 1} y\left(\rho(t, \theta, x, y)-1\right)\Pi^{(1)}(t, \theta, x, dy),$$

причем $(\alpha_t^{(1)}, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0)$ при $\psi(t)=\psi(t, \theta_t, X_t^{(1)})$ и $\varphi(t, x)=\ln\rho(t, \theta_t, X_{t-0}^{(1)}, x)$ является мартингалом, то выполнены условия теоремы 2.

В частности, если случайные процессы $X^{(i)}$, $i=1, 2$, являются решениями стохастических уравнений К. Ито

$$X_t^{(i)}=X_0^{(i)}+\int_0^t c^{(i)}(u)\theta_u, X_u^{(i)})\,du+\sum_{k=1}^r\int_0^t b_k^{(i)}(u, \theta_u, X_u^{(i)})\,dw_k(u)+$$
$$+\int_0^t\int_{|y|\leqslant 1} f^{(i)}(u, \theta_u, X_u^{(i)}, y)\,q(du, dy)+$$
$$+\int_0^t\int_{|y|>1} f^{(i)}(u, \theta_u, X_u^{(i)}, y)\,p(du, dy),$$

$i=1,2$, где $w=(w_1, \ldots, w_r)$ и p является r-мерным винеровским процессом и стандартной пуассоновской мерой, согласованных с системой σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, то нетрудно проверить, что в этом случае

$$\Pi^{(i)}(t, \theta, x, \Gamma)=\int_{f^{(i)}(t, \theta, x, y)\in\Gamma}\frac{dy}{|y|^{m+1}},$$

$$a_{jk}^{(i)}(t, \theta, x)=\sum_{l=1}^r b_{lj}^{(i)}(t, \theta, x)\,b_{lk}^{(i)}(t, \theta, x)$$

и

$$a^{(i)}(t, \theta, x)=c^{(i)}(t, \theta, x)+\int_{\substack{|y|>1\\ |f^{(i)}(t, \theta, x, y)|\leqslant 1}} f^{(i)}(t, \theta, x, y)\frac{dy}{|y|^{m+1}}-$$
$$-\int_{\substack{|y|\leqslant 1\\ |f^{(i)}(t, \theta, x, y)|>1}} f^{(i)}(t, \theta, x, y)\frac{dy}{|y|^{m+1}}.$$

§ 4. О плотностях вероятностных мер

Далее, при предположениях и обозначениях § 2 будем исследовать условия, при которых случайный процесс $\{\alpha_t(\psi, \varphi), \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ является мартингалом.

Обозначим

$$\alpha_t^s(\psi, \varphi) = \alpha_t(\psi, \varphi)\, \alpha_s^{-1}(\psi, \varphi), \qquad 0 \leqslant s < t.$$

Лемма 1. *Если выполнены предположения* (3) *и* (4) *и для всех* $0 \leqslant s < t$

$$\mathbf{E}\alpha_t^s(\psi, \varphi) = 1, \tag{11}$$

то случайный процесс $\{\alpha_t(\psi, \varphi), \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ *является мартингалом.*

Действительно, в силу сказанного в § 2 при условиях леммы случайный процесс $\{\alpha_t(\psi, \varphi), \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ является локальным мартингалом, откуда, используя лемму Фату, получаем, что он является супермартингалом. В частности, отсюда находим, что п. в.

$$0 \leqslant \mathbf{E}(\alpha_t^s(\psi, \varphi) \mid \mathscr{F}_s) \leqslant 1. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что п. в.

$$\mathbf{E}(\alpha_t^s(\psi, \varphi) \mid \mathscr{F}_s) = 1$$

или

$$\mathbf{E}(\alpha_t(\psi, \varphi) \mid \mathscr{F}_s) = \alpha_s(\psi, \varphi).$$

Лемма 2. *Если существуют константы* K_i, $i = 1, 2, 3$, *такие, что*

$$\Big(\psi(t) A(t), \psi(t)\Big) \leqslant K_1, \quad |\varphi(t, x)| \leqslant K_2$$

и

$$\int\limits_{R_m} \varphi^2(t, y)\, \Pi(t, dy) \leqslant K_3, \tag{13}$$

то для всех $0 \leqslant s < t$

$$\mathbf{E}\alpha_t^s(\psi, \varphi) = 1$$

и

$$\mathbf{E}\Big(\alpha_t^s(\psi, \varphi)\Big)^{\gamma} \leqslant \exp\{(t-s) K(\gamma)\},$$

где

$$K(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma^2 - \gamma| K_1 + \frac{1}{2} K_3 (|\gamma| e^{K_2} + \gamma^2 e^{|\gamma| K_2}),$$

а γ — *любое действительное число.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 2 и 3 в [4] и его приводить не будем.

Из лемм 1 и 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Если существуют последовательности случайных функций* $\{\psi_n(t), n \geqslant 1\}$ *и* $\{\varphi_n(t, x), n \geqslant 1\}$, *удовлетворяющих условиям* (13)*), *таких, что для всех фиксированных* $0 \leqslant s < t$ *при* $n \to \infty$

$$\alpha_t^s(\psi_n, \varphi_n) \to \alpha_t^s(\psi, \varphi) \tag{14}$$

*) Константы K_i, $i = 1, 2, 3$, могут зависеть от n.

по мере $\mathbf{P}$ *и последовательность случайных величин* $\{\alpha_t^s(\psi_n, \varphi_n), n \geqslant 1\}$ *равномерно интегрируема, то случайный процесс* $\{\alpha_t(\psi, \varphi), \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ *является мартингалом.*

Для проверки равномерной интегрируемости последовательности $\{\alpha_t^s(\psi_n, \varphi_n), n \geqslant 1\}$ по известному критерию Валле – Пуссена достаточно показать, что для некоторой положительной возрастающей функции $F(x)$, $x \geqslant 0$, такой, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{x} = \infty,$$

при всех $n \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\Big(F\big(\alpha_t^s(\psi_n, \varphi_n)\big)\Big) \leqslant K(s, t) < \infty. \tag{15}$$

Далее приведем некоторые условия, при которых (15) выполнено с $F(x) = |x|^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Предположим, что для некоторых $\delta_1 > 0$, $\gamma > 0$ и достаточно малого $\delta_2 = \delta_2(\delta_1, \gamma) > 0$

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{(1+\delta_1)\int_s^t \left[\Big(\psi(u) A(u), \psi(u)\Big) du + \int_{|\varphi(u, y)| \leqslant \gamma} \varphi^2(u, y)\, \Pi(u, dy)\right] du\right\}\right] < \infty, \tag{16}$$

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{\frac{1+\delta_2^{\gamma}}{\delta_2^{1+\gamma}} \int_s^t \int_{|\varphi(u, y)| \geqslant \delta_2^{1+\gamma}} e^{(1+\delta_2)^2 |\varphi(u, y)|}\, \Pi(u, dy)\, du\right\}\right] < \infty$$

и для $s \leqslant u \leqslant t$, $x \in R_m$ п. в.

$$\Big(\psi_n(u) A(u), \psi_n(u)\Big) \leqslant \Big(\psi(u) A(u), \psi(u)\Big),$$

$$|\varphi_n(u, x)| \leqslant |\varphi(u, x)|. \tag{17}$$

Лемма 3. *При условиях* (16) – (17) *выполнено* (15) *с* $F(x) = |x|^{1+\varepsilon}$, *где* ε – *достаточно малое положительное число.*

Доказательство. Поскольку при условиях (13) $\varphi_n \in F_Q$, то из (2) находим, что

$$\alpha_t(\psi_n, \varphi_n) = \exp\left\{X_{\psi_n}(t) - \frac{1}{2}\langle X_{\psi_n}\rangle_t + Q_{\varphi_n}(t) - \int_0^t \int_{R_m} \Big(e^{\varphi_n(u, y)} - 1 - \varphi_n(u, y)\Big)\, \Pi(u, dy)\, du\right\}. \tag{18}$$

Обозначив

$$\psi_{n, \varepsilon}(t) = (1+\varepsilon)^2 \psi_n(t)$$

и

$$\varphi_{n, \varepsilon}(t) = (1+\varepsilon)^2 \varphi_n(t),$$

из (18) имеем, что

$$[\alpha_t^s(\psi_n,\ \varphi_n)]^{1+\varepsilon}=\exp\left\{(1+\varepsilon)\Big(X_{\psi_n}(t)-X_{\psi_n}(s)-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)^3\times\right.$$

$$\times(\langle X_{\psi_n}\rangle_t-\langle X_{\psi_n}\rangle_s)+(1+\varepsilon)\Big(Q_{\varphi_n}(t)-Q_{\varphi_n}(s)\Big)-\frac{1}{1+\varepsilon}\times$$

$$\left.\times\int_s^t\int_{R_m}\Big(e^{\varphi_{n,\varepsilon}(u,y)}-1-\varphi_{n,\varepsilon}(u,\ y)\Big)\,\Pi(u,\ dy)\,du\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}[(1+\varepsilon)^3-(1+\varepsilon)]\,(\langle X_{\psi_n}\rangle_t-\langle X_{\psi_n}\rangle_s)+\right.$$

$$+\frac{1}{1+\varepsilon}\int_s^t\int_{R_m}\Big(e^{\varphi_{n,\varepsilon}(u,y)}-1-\varphi_{n,\varepsilon}\ (u,\ y)\Big)\,\Pi(u,\ dy)\,du-$$

$$\left.-(1+\varepsilon)\int_s^t\int_{R_m}\Big(e^{\varphi_n(u,y)}-1-\varphi_n(u,y)\Big)\ \Pi\ (u,\ dy)\,du\right\}. \tag{19}$$

Используя неравенство Гельдера, из (18) и леммы 2 получаем, что

$$\mathbf{E}\,[\alpha_t^s(\psi_n,\ \varphi_n)]^{1+\varepsilon}\leqslant[\mathbf{E}\alpha_t^s(\psi_{n,\varepsilon},\ \varphi_{n,\varepsilon})]^{\frac{1}{1+\varepsilon}}[\mathbf{E}\gamma_t^s(n,\ \varepsilon)]^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\leqslant$$

$$\leqslant[\mathbf{E}\gamma_t^s(n,\ \varepsilon)]^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \tag{20}$$

где

$$\gamma_t^s(n,\ \varepsilon)=\exp\left\{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)^2(2+\varepsilon)\int_s^t\Big(\psi_n(u)\,A\,(u),\ \psi_n(u)\Big)\,du+\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\int_{R_m}\Big(e^{(1+\varepsilon)^2\varphi_n(u,y)}-1-(1+\varepsilon)^2\varphi_n(u,\ y)\Big)\,\Pi\,(u,\ dy)\,du-$$

$$\left.-\frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\int_s^t\int_{R_m}\Big(e^{\varphi_n(u,y)}-1-\varphi_n(u,\ y)\Big)\,\Pi\,(u,\ dy)\,du\right\}. \tag{21}$$

При $|\varphi(u,\ y)|\leqslant\delta_2^{1+\gamma}$, так как

$$\left|e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right|\leqslant\frac{|x|^3}{6}\,e^{|x|}$$

и $|\varphi_n(u,\ y)|\leqslant|\varphi(u,\ y)|\leqslant\delta_2^{1+\gamma}$, имеем

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\Big(e^{(1+\varepsilon)^2\varphi_n(u,y)}-1-(1+\varepsilon)^2\varphi_n(u,y)\Big)-\frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\Big(e^{\varphi_n(u,y)}-1-\varphi_n(u,y)\Big)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1+\varepsilon)^4-(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon}\,\varphi_n^2(u,\ y)+\frac{1}{6}\,|\varphi_n\Big(u,\ y)|^3\Big(\frac{(1+\varepsilon)^6}{\varepsilon}\,e^{(1+\varepsilon)^2|\varphi_n(u,y)|}+$$

$$+\frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\,e^{|\varphi_n(u,y)|}\Big)\leqslant\varphi_n^2(u,\ y)\Big[(1+\varepsilon)^2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)+$$

$$+\frac{1}{3}\,\frac{(1+\varepsilon)^6}{\varepsilon}\,\delta_2^{1+\gamma}\,e^{(1+\varepsilon)^2\delta_2^{1+\gamma}}\Big]\leqslant\varphi_n^2(u,\ y)\,\Big(1+\varkappa_1(\varepsilon)\Big), \tag{22}$$

где $\varkappa_1(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$, если выбрать $\delta_2=O(\varepsilon)$.

Далее, при всех u и y

$$\left|\left(e^{(1+\varepsilon)^2\varphi_n(u,y)}-1-(1+\varepsilon)^2\varphi_n(u,y)-(1+\varepsilon)^2\left(e^{\varphi_n(u,y)}-1-\varphi_n(u,y)\right)\right|=$$

$$=\left|\left(e^{(1+\varepsilon)^2\varphi_n(u,y)}-1\right)-(1+\varepsilon)^2\left(e^{\varphi_n(u,y)}-1\right)\right|=$$

$$=(1+\varepsilon)^2\left|\int_0^{\varphi_n(u,y)}\left(e^{(1+\varepsilon)^2u}-e^u\right)du\right|\leqslant$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)^2\int_0^{|\varphi_n(u,y)|}e^{(1+\varepsilon)^2u}\,du\leqslant e^{(1+\varepsilon)^2|\varphi_n(u,y)|}. \tag{23}$$

Из (21)–(23) и (17) следует, что

$$\gamma_t^s(n,\varepsilon)\leqslant\exp\left\{(1+\varkappa_2(\varepsilon))\left[\int_s^t\left(\left(\psi(u)A(u),\ \psi(u)\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\int_{|\varphi(u,y)|\leqslant\delta_2^{1+\gamma}}\varphi^2(u,y)\,\Pi(u,dy)\,du\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\int_{|\varphi(u,y)|>\delta_2^{1+\gamma}}e^{(1+\varepsilon)^2|\varphi(u,y)|}\,\Pi(u,dy)\,du\right\}, \tag{24}$$

где $\varkappa_2(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Снова применяя неравенство Гельдера, из (27) и (16) получаем, что

$$\mathbf{E}\gamma_t^s(n,\varepsilon)\leqslant\left[\mathbf{E}\exp\left\{(1+\varepsilon^\gamma)\left(1+\varkappa_2(\varepsilon)\right)\int_s^t\left[\left(\psi(u)A(u),\ \psi(u)\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\int_{|\varphi(u,y)|\leqslant\delta_2^{1+\gamma}}\varphi^2(u,y)\,\Pi(u,dy)\right]du\right\}\right]^{\frac{1}{1+\varepsilon^\gamma}}\times$$

$$\times\left[\mathbf{E}\exp\left\{\frac{1+\varepsilon^\gamma}{\varepsilon^{1+\gamma}}\int_s^t\int_{|\varphi(u,y)|>\delta_2^{1+\gamma}}e^{(1+\varepsilon)^2|\varphi(u,y)|}\,\Pi(u,dy)\,du\right\}\right]^{\frac{\varepsilon^\gamma}{1+\varepsilon^\gamma}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\mathbf{E}\exp\left\{(1+\delta_1)\int_s^t\left[\left(\psi(u)A(u),\ \psi(u)\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\int_{|\varphi(u,y)|\leqslant\gamma}\varphi^2(u,y)\,\Pi(u,dy)\right]du\right\}\right]^{\frac{1}{1+\varepsilon^\gamma}}\times$$

$$\times\left[\mathbf{E}\exp\left\{\frac{1+\delta_2^\gamma}{\delta_2^{1+\gamma}}\int_s^t\int_{|\varphi(u,y)|\geqslant\delta_2^{1+\gamma}}e^{(1+\delta_2)^2|\varphi(u,y)|}\,\Pi(u,dy)\,du\right\}\right]^{\frac{\varepsilon^\gamma}{1+\varepsilon^\gamma}}=$$

$$=K(s,t)<\infty.$$

Мы выбрали $\delta_2=\varepsilon$, а ε таким, чтобы

$$(1+\varepsilon^{\gamma})\Big(1+\varkappa_2(\varepsilon)\Big)\leqslant 1+\delta_1 \tag{25}$$

и

$$\varepsilon\leqslant\gamma^{\frac{1}{1+\gamma}}. \tag{26}$$

Лемма 3 доказана.

Замечание 3. Зависимость δ_2 от δ_1 и γ определяется соотношениями (25) и (26).

Замечание 4. В случае когда $\Pi(t,\ \Gamma)\equiv 0$, а матрица $A(t)$ является единичной, процесс $X_t,\ t\geqslant 0$, будет m-мерным винеровским процессом и

$$\alpha_t=\alpha_t(\psi)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\int_0^t\psi_i(s)\,dX_i(s)-\frac{1}{2}\int_0^t|\psi(s)|^2\,ds\right\}.$$

Из теоремы 3 и леммы 3 легко следует, что если при некотором $\delta_1>0$ и всех $t>0$

$$\mathbf{E}\exp\left\{(1+\delta_1)\int_0^t|\psi(s)|^2\,ds\right\}<\infty,$$

то случайный процесс $\{\alpha_t(\psi),\ \mathscr{F}_t,\ t\geqslant 0\}$ является мартингалом. Это утверждение является многомерным аналогом леммы 1 § 12 в [12].

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
2.XI.1970

Литература

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах, УМН, XXI, 6(32) (1966), 83–152.
2. A. V. Skorohod, On the densities of probability measures in functional spaces, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., II, 1(1967), 163–182, Univ. Calif Press.
3. G. Kallianpur, C. Striebel, Estimation of stochastic systems: Arbitrary system processes with additive white noise observation errors, Ann. Math. Statist, 39, 3(1968), 785–801.
4. Б. Григелионис, Об абсолютно непрерывной замене меры и марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., IX, 1 (1969), 57–71.
5. H. Kunita, Absolute continuity of Markov processes and generators, Nagoya Math. J., **36** (1969), 1–26.
6. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, О плотности вероятностных мер процессов диффузионного типа, Изв. АН СССР, сер. мат., **33**,5 (1969), 1120–1131.
7. Л. И. Гальчук, О плотности вероятностных мер для скачкообразных процессов, Советско-японский симпозиум по теории вероятностей, Хабаровск, 1969, Новосибирск, 1969, 31–47.
8. T. E. Dunkan, On the absolute continuity of measures, Ann. Math. Statist., **41**, 1 (1970), 30–38.
9. А. Д. Шаташвили, О плотностях мер, соответствующих решениям некоторых дифференциальных уравнений со случайными функциями, ДАН СССР, 2, **194**, (1970), 275-277.
10. Б. Григелионис, О представлении целочисленных случайных мер как стохастических интегралов по пуассоновской мере, Лит. матем. сб., XI, 1(1971), 93–108.
11. H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J., **30**(1967), 209–245.
12. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, „Наукова думка", Киев, 1968.

APIE MATŲ, ATITINKANČIŲ ATSITIKTINIAMS PROCESAMS, ABSOLIUTŲ TOLYDUMĄ

B. Grigelionis

(*Reziumė*)

Darbe rastos matų, atitinkančių plačią atsitiktinių procesų klasę, absoliutaus tolydumo sąlygos bei tankių formulės; šiai klasei priklauso ir daugelis atsitiktinių procesų, kurie yra daugiamačių Markovo procesų komponentės. Taip pat rastos sąlygos, kai apibrėžtas duoto atsitiktinio proceso multiplikatyvinis funkcionalas yra tikimybinių matų tankis.

ON THE ABSOLUTE CONTINUITY OF MEASURES CORRESPONDING TO STOCHASTIC PROCESSES

B. Grigelionis

(*Summary*)

Absolute continuity conditions of measures corresponding to a wide class of stochastic processes, including, taken separately, many stochastic processes which are components of the multidimensional Markov processes, and formulas for densities are obtained in the present paper. The conditions are also investigated when a defined multiplicative functional from the given stochastic process expresses density of probability measures.