XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1971

УДК 511

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛОКАЛЬНЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Й. Кубилюс

Будем рассматривать вещественные арифметические функции $h(m)$, т. е. функции, определенные на множестве всех целых положительных чисел. Через $N(\ldots)$ будем обозначать число натуральных чисел m, удовлетворяющих условиям, которые каждый раз будут указываться в скобках вместо многоточия.

Говорим, что функция $h(m)$ имеет асимптотический интегральный закон распределения (а. и. з.), если для всякого вещественного x

$$\frac{1}{n} N\Big(m\leqslant n,\ h(m)<x\Big) \tag{1}$$

при $n\to\infty$ стремится к некоторой функции распределения $F(x)$ во всех точках непрерывности последней.

Когда все значения, принимаемые функцией $h(m)$, принадлежат некоторой арифметической прогрессии, естественно ввести понятие асимптотического локального закона распределения. Для простоты мы ограничимся случаем, когда $h(m)$ принимает лишь целые значения. Впрочем, к этому случаю обычно сводится общий случай.

Будем говорить, что целозначная арифметическая функция $h(m)$ имеет асимптотический локальный закон распределения (а. л. з.), если для любого целого k

$$\frac{1}{n} N\Big(m\leqslant n,\ h(m)=k\Big) \tag{2}$$

при $n\to\infty$ стремится к некоторому числу λ_k, причем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k = 1$$

и сходимость к λ_k равномерна по k.

Оказывается, что для целозначных арифметических функций интегральный и локальный асимптотические законы могут существовать лишь одновременно.

Теорема 1. *Для всякой целозначной арифметической функции а. л. з. существует тогда и только тогда, когда существует а. и. з.*

В случае существования асимптотических законов числа λ_k являются коэффициентами Фурье характеристической функции предельного закона $F(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk};$$

(1) *сходится к $F(x)$ равномерно по x.*

Доказательство. 1. Докажем сначала необходимость условия. Предположим, что для любого целого k

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right)$$

сходится при $n \to \infty$ к некоторым числам λ_k, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k = 1$, равномерно по k. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $K = K(\varepsilon) > 0$, что

$$\sum_{|k| \leqslant K} \lambda_k > 1 - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3}$$

В силу равномерности сходимости (2) к λ_k мы можем найти такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$\left| \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right) - \lambda_k \right| < \frac{\varepsilon}{4(2K+1)}$$

для всех $|k| \leqslant K$, $n \geqslant n_0$. Следовательно, при $n \geqslant n_0$

$$\left| \sum_{|k| \leqslant K} \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right) - \lambda_k \right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4}$$

и в силу (3)

$$\sum_{|k| > K} \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right) = 1 - \sum_{|k| \leqslant K} \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{|k| \leqslant K} \left(\lambda_k - \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Положим

$$F(x) = \sum_{k < x} \lambda_k.$$

Тогда при $n \geqslant n_0$ в силу (5), (3), (4)

$$\left| \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) < x\right) - F(x) \right| \leqslant \sum_{k < x} \left| \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right) - \lambda_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|k| > K} \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right) + \sum_{|k| > K} \lambda_k +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant K} \left| \frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right) - \lambda_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

2. Переходим к доказательству достаточности условия. Пусть имеет место а. и. з. Из известных теорем для характеристических функций следует, что характеристическая функция

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{ith(m)}$$

закона распределения $\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) < x\right)$ сходится к характеристической функции $\varphi(t)$ предельного закона $F(x)$, причем сходимость равномерна в каждом конечном интервале изменения t. Переходя к пределу в равенстве

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_n(t)\, dt,$$

получаем наше утверждение о существовании λ_k и равномерной сходимости по k. При этом λ_k являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(t)$. Ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk}$$

сходится и его сумма в силу хорошо известных свойств рядов Фурье равна $\varphi(t)$. Наконец,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k = \varphi(0) = 1.$$

Теорему можно обобщить на многомерный случай. Пусть имеются вещественные арифметические функции $h_1(m), \ldots, h_s(m)$. Будем говорить, что совокупность функций $h_1(m), \ldots, h_s(m)$ имеет а. и. з., если функция распределения

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h_1(m) < x_1,\ \ldots,\ h_s(m) < x_s\right) \tag{6}$$

при $n \to \infty$ сходится к некоторой функции распределения $F(x_1, \ldots, x_s)$ в каждой „неисключенной" точке последней. Точку $(x_1, \ldots, x_s)$ мы называем „неисключенной", если $x_1, \ldots, x_s$ являются точками непрерывности соответствующих одномерных функций распределения $F(x, \infty, \ldots, \infty), \ldots, F(\infty, \ldots, \infty, x)$.

Будем говорить, что совокупность целозначных функций $h_1(m), \ldots, h_s(m)$ имеет а. л. з., если для любого набора целых чисел $k_1, \ldots, k_s$

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h_1(m) = k_1,\ \ldots,\ h_s(m) = k_s\right)$$

при $n \to \infty$ стремится к некоторому числу $\lambda_{k_1, \ldots, k_s}$, причем

$$\sum_{k_1, \ldots, k_s = -\infty}^{\infty} \lambda_{k_1, \ldots, k_s} = 1$$

и сходимость равномерна по всем $k_1, \ldots, k_s$.

Теорема 1 легко обобщается на многомерный случай.

Теорема 2. *Для всякого набора целозначных арифметических функций* $h_1(m), \ldots, h_s(m)$ *а. л. з. существует тогда и только тогда, когда существует а. и. з.*

В случае существования асимптотических законов числа $\lambda_{k_1, \ldots, k_s}$ *являются коэффициентами Фурье характеристической функции предельного закона*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + \cdots + t_s x_s)} dF(x_1, \ldots, x_s) =$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_s = -\infty}^{\infty} \lambda_{k_1, \ldots, k_s} e^{i(t_1 k_1 + \cdots + t_s k_s)}$$

и (6) *сходится к* $F(x_1, \ldots, x_s)$ *равномерно по* $x_1, \ldots, x_s$.

Среди арифметических функций известный интерес представляют два класса функций: аддитивные и мультипликативные. Арифметическая функция $f(m)$ называется аддитивной, если для всякой пары взаимно простых m, n

$$f(m\,n) = f(m) + f(n).$$

Арифметическая функция $g(m)$ называется мультипликативной, если $g(m\,n) = g(m)\,g(n)$ при $(m, n) = 1$.

Теория а. и. з. для аддитивных и мультипликативных функций в настоящее время далеко продвинута, чего нельзя сказать об а. л. з. Теоремы 1, 2 позволяют получить ряд условий существования а. л. з. в случае аддитивных и мультипликативных функций.

П. Эрдёш и А. Винтнер [1] доказали, что необходимым и достаточным условием существования а. и. з. для вещественной аддитивной функции $f(m)$ является сходимость рядов по простым числам p

$$\sum_{|f(p)| \geqslant 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| < 1} \frac{f(p)}{p}, \quad \sum_{|f(p)| < 1} \frac{f^2(p)}{p} \tag{7}$$

(если эти суммы имеют бесконечно много членов). В случае целозначной функции условие принимает вид

$$\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} < \infty. \tag{8}$$

Следствием этого результата и теоремы 1 является

Теорема 3. *Целозначная аддитивная арифметическая функция* $f(m)$ *имеет а. л. з. тогда и только тогда, когда имеет место* (8). *В случае существования а. л. з. имеет место равенство*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha},$$

причем ряд и произведение сходятся абсолютно и равномерно по t.

Достаточность условия (8) была доказана автором [2] без использования теоремы Эрдёша – Винтнера.

Многомерный аналог теоремы Эрдёша – Винтнера легко получается с помощью приема Г. Крамера и Г. Волда [3] (см. также [4]). Набор вещественных аддитивных функций $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ имеет а. и. з. тогда и только тогда, когда каждая из функций удовлетворяет условиям (7) Эрдёша – Винтнера.

Теорема 4. *Целозначные аддитивные арифметические функции $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ имеют а. л. з. тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{f_k(p)\neq 0} \frac{1}{p} < \infty \quad (k=1, \ldots, s).$$

В случае существования а. л. з. для всех вещественных $t_1, \ldots, t_s$ имеет место равенство

$$\sum_{k_1, \ldots, k_s=-\infty}^{\infty} \lambda_{k_1, \ldots, k_s} e^{i(t_1 k_1+\cdots+t_s k_s)} =$$

$$= \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{i\left(t_1 f_1(p^\alpha)+\cdots+t_s f_s(p^\alpha)\right)}}{p^\alpha},$$

причем ряд и произведение сходятся абсолютно и равномерно по $t_1, \ldots, t_s$.

В случае мультипликативных функций $g(m)$ при определении а. и. з. помимо требования сходимости

$$\frac{1}{n} N\left(m\leqslant n,\ g(m)<x\right)$$

при $n\to\infty$ к некоторой функции распределения $F(x)$ в ее точках непрерывности целесообразно ввести дополнительные требования

$$\frac{1}{n} N\left(m\leqslant n,\ g(m)<0\right\} \to F(0),$$

$$\frac{1}{n} N\left(m\leqslant n,\ g(m)\leqslant 0\right\} \to F(+0),$$

если $F(x)$ не вырождена в нуле и точка 0 не является точкой непрерывности $F(x)$. Легко сообразить, что теорема 1 остается в силе и при таком изменении определения а. и. з.

А. Бакштис [5] получил некоторые результаты о существовании а. и. з. для мультипликативных функций, которые мы перепишем в следующем виде. Если $g(m)$ – вещественная мультипликативная функция и ряды

$$\sum_{g(p)\leqslant \frac{2}{3}} \frac{1}{p}, \quad \sum_{g(p)\geqslant \frac{3}{2}} \frac{1}{p}, \quad \sum_{\frac{2}{3}<g(p)<\frac{3}{2}} \frac{\ln g(p)}{p}, \quad \sum_{\frac{2}{3}<g(p)<\frac{3}{2}} \frac{\ln^2 g(p)}{p} \tag{9}$$

ес‹ли› эти суммы имеют бесконечно много членов) сходятся, то она имеет а. и. з.

А. и. з. является симметрическим, т. е. для всех x имеет место равенство $F(x)=1-F(-x+0)$, тогда и только тогда, когда $g(2^{\alpha})=-1$ для $\alpha=1, 2, \ldots$ В случае не симметрического а. и. з. сходимость рядов (9) является не только достаточным, но и необходимым.

Теорема 5. *Если мультипликативная функция $g(m)$ принимает лишь целые значения и*

$$\sum_{g(p)\neq 1} \frac{1}{p} < \infty, \tag{10}$$

то она имеет а. л. з. При этом числа λ_k удовлетворяют равенству $\lambda_k=\lambda_{-k}$ для всех $k=1, 2, \ldots$ тогда и только тогда, когда $g(2^{\alpha})=-1$ для всех $\alpha=1, 2, \ldots$

Если $\lambda_k\neq\lambda_{-k}$ хотя бы для одного k, то условие (10) *является не только достаточным, но и необходимым для существования а. л. з.*

Теоремы 1, 2 и их очевидные обобщения позволяют получить также ряд а. л. з. для арифметических функций вида $f\big(P(m)\big)$, $f\big(P(p)\big)$, $f_1\big(P_1(m)\big)+\cdots+f_s\big(P_s(m)\big)$, где $f(m)$, $f_k(m)$ $(k=1, \ldots, s)$ – целозначные аддитивные функции, $P(m)$, $P_k(m)$ $(k=1, \ldots, s)$ – целозначные полиномы, и т. п.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 18.I.1971.

Литература

1. P. Erdös, A. Wintner, Additive arithmetical functions and statistical independence, Amer. J. Math., **61** (1939), 713–721.
2. Й. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Гос. изд. полит. и научн. лит. Лит. ССР, Вильнюс, 1962.
3. H. Cramér, H. Wold, Some theorems on distribution functions, J. London Math. Soc., **11** (1936), 290–294.
4. H. Delange, Sur les functions arithmétiques multiplicatives, Ann. Sci. École Norm. Sup., **78** (1961), 273–304.
5. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций, Лит. матем. сб., VII, 1 (1968), 5–20.

ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ ASIMPTOTINIAI LOKALINIAI DĖSNIAI

J. Kubilius

(*Reziumė*)

$N(\ldots)$ žymėsime skaičių sveikų teigiamų skaičių m, tenkinančių sąlygas, kurios bus nurodytos skliaustuose vietoj daugtaškio. Tarkime, kad funkcija $h(m)$ yra apibrėžta visų natūrinių skaičių aibėje ir įgyja tik sveikas reikšmes.

Pagrindinis straipsnio rezultatas yra tokia teorema.

Kiekvienam sveikam skaičiui k

$$\frac{1}{n} N\Big(m\leqslant n,\ h(m)=k\Big) \underset{n\to\infty}{\to} \lambda_k \tag{1}$$

tolygiai k atžvilgiu, kur λ_k yra skaičiai, tenkinantys sąlygą

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k = 1, \tag{2}$$

tada ir tik tada, kai

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) < x\right)$$

konverguoja į kurią nors pasiskirstymo funkciją $F(x)$ jos tolydumo taškuose. Kai ši sąlyga patenkinama, funkcijos $F(x)$ charakteringoji funkcija

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk}.$$

Įrodomos dvi teoremos apie adityvinių ir multiplikatyvinių funkcijų asimptotinius lokalinius dėsnius.

1. Jei $h(m)$ yra adityvinė funkcija, įgyjanti tik sveikas reikšmes, tai tolygiai k atžvilgiu (1) ir (2) yra teisingos tada ir tik tada, kai

$$\sum_{h(p) \neq 0} \frac{1}{p} < \infty;$$

čia sumuojama pagal pirminius skaičius p. Kai ši sąlyga yra patenkinama, visiems realiems t

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{ith(p^\alpha)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk};$$

sandauga ir eilutė konverguoja absoliučiai ir tolygiai visiems t.

2. Jei $h(m)$ yra multiplikatyvinė funkcija, įgyjanti tik sveikas reikšmes ir tenkinanti sąlygą

$$\sum_{h(p) \neq 1} \frac{1}{p} < \infty, \tag{3}$$

tai tolygiai k atžvilgiu (1) ir (2) yra teisingos. Jei ši sąlyga yra patenkinama, tai $\lambda_k \neq \lambda_{-k}$ tada ir tik tada, kai $h(2^\alpha) = -1$ visiems $\alpha = 1, 2, \ldots$

Jei $\lambda_k \neq \lambda_{-k}$ bent vienam $k = 1, 2, \ldots$, tai (3) sąlyga yra ne tik pakankama, bet ir būtina, kad egzistuotų asimptotinis lokalinis dėsnis.

ON ASYMPTOTIC LOCAL LAWS FOR ARITHMETIC FUNCTIONS

J. Kubilius

(*Summary*)

Denote by $N(\ldots)$ the number of positive integers m satisfying the conditions which appear in the brackets. Let $h(m)$ be an integer-valued function defined for all natural m.

The main result of this paper is the following theorem.

For each integer k

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) = k\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda_k \tag{1}$$

for some λ_k with the property

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k = 1. \tag{2}$$

uniformly in k, if and only if

$$\frac{1}{n} N\left(m \leqslant n,\ h(m) < x\right)$$

converge to a distribution function $F(x)$ at each of its points of continuity. In this case the characteristic function of $F(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk}.$$

Two theorems on asymptotic local laws for additive and multiplicative functions are obtained.

1. If $h(m)$ is an integer-valued additive function, then, uniformly in k, (1) and (2) are true if and only if the sum over primes p

$$\sum_{h(p) \neq 0} \frac{1}{p} < \infty.$$

In this case

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{ith(p^{\alpha})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk}$$

for all real t, the product and the series being convergent absolutely and uniformly in t.

2. If $h(m)$ is a multiplicative integer-valued function satisfying

$$\sum_{h(p) \neq 1} \frac{1}{p} < \infty \tag{3}$$

then, uniformly in k, (1) and (2) are true. In this case the numbers λ_k satisfies the equality $\lambda_k = \lambda_{-k}$ for all $k = 1, 2, \ldots$ if and only if $h(2^{\alpha}) = -1$ for all $\alpha = 1, 2, \ldots$

If $\lambda_k \neq \lambda_{-k}$ for at least one $k = 1, 2, \ldots$ then the condition (3) is not only sufficient but also necessary for the validity of asymptotic local law.

A generalization for multidimensional case is also given.