УДК 519.21

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Р. Лапинскас

1. Обозначения

Пусть $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_k)$, $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_k)$, т.е. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k$. Все алгебраические операции с ними в дальнейшем будем выполнять покомпонентно, например,

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(x_1y_1, \ldots, x_ky_k), \qquad \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{y}}}=\left(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \ldots, \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\right)$$

и т.д. Пусть, далее, $|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_k^2}$ – норма вектора $\mathbf{x}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – скалярное произведение, $f_{\xi_j}(\mathbf{t})=f_j(\mathbf{t})$, $F_j(\mathbf{x})$, $p_j(\mathbf{x})$ – характеристическая функция, функция распределения и плотность случайной величины (сл. в.) $\xi_j \in R^k$, $j=\overline{1, n}$. $\tilde{F}_j(\mathbf{x})$ и $\tilde{p}_j(\mathbf{x})$ будет обозначать функцию распределения и плотность симметризованной сл. в. ξ_j.

Рассмотрим последовательность сл. в.

$$\xi_j=(\xi_{j1}, \ldots, \xi_{jk}), \qquad j=1, 2, \ldots \tag{1.0}$$

с $\mathbf{M}\xi_j=(\mathbf{M}\xi_{j1}, \ldots, \mathbf{M}\xi_{jk})\equiv\mathbf{0}$, $j=1, 2, \ldots$ и $\tilde{\sigma}_j^2=\mathbf{M}|\xi_j|^2$. В дальнейшем везде будем предполагать, что сл. в. ξ_j, $j=1, 2, \ldots$, имеют плотности $p_j(\mathbf{x})$. Положим

$$\mathbf{S}_n=\sum_{m=1}^{n}\xi_m, \qquad \mathbf{Z}_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{\xi_m}{\mathbf{B}_n},$$

где

$$\mathbf{B}_n^2=(\mathbf{M}\,S_{n,1}^2, \ldots, \mathbf{M}\,S_{n,k}^2)=(B_{n1}^2, \ldots, B_{nk}^2)$$

и $\tilde{\mathbf{B}}_n^2=\mathbf{M}|\mathbf{S}_n|^2$. Ковариационную матрицу сл. в. $\mathbf{S}_n$ $(\mathbf{Z}_n)$ будем обозначать Λ_n $(\tilde{\Lambda}_n)$, ее собственные числа – $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ $\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=(\tilde{\lambda}_1, \ldots \tilde{\lambda}_k)\right)$, а квадратичную форму, соответствующую матрице Λ_n $(\tilde{\Lambda}_n)$, через $Q_n(\mathbf{t})=\mathbf{M}(\mathbf{S}_n, \mathbf{t})$ $\Big(\tilde{Q}_n(\mathbf{t})=$ $=\mathbf{M}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{t})^2\Big)$.

Через $\mathfrak{M}_m=\{\Delta_{mi}, C_{mi}, i=1, 2, \ldots\}$ обозначим совокупность непересекающихся кубов с гранями длины $\mathbf{l}_{mi}=(l_{mi,1}, \ldots, l_{mi,k})$ и положительных констант $C_{mi}\leqslant\infty$, $m=1, 2, \ldots$

Положим

$$\alpha(\mathfrak{M}_m, N)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_{mi}^3}{R_{mi}^{2(k-1)}(R_{mi}+2N)^2\,C_{mi}^2}, \tag{1.1}$$

где $N>0$, а $R_{mi}=|\mathbf{l}_{mi}|$,

$$Q_{mi}=\int\limits_{\Delta_l}\min(\tilde{p}_m(\mathbf{x}),\ C_{mi})\,d\mathbf{x}\,; \tag{1.2}$$

$$l_n(N)=\inf_{|\mathbf{t}|=1}\frac{1}{Q_n(\mathbf{t})}\sum_{m=1}^{n}\int\limits_{|\mathbf{x}|<N}(\mathbf{x},\mathbf{t})^2\,\tilde{p}_m(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{1.3}$$

Если сл. в. ξ_j, $j=\overline{1,n}$ имеют конечные моменты $\mathbf{M}|\xi_j|^s$, $s\geqslant 3$, то существуют „дроби Ляпунова"

$$\tilde{L}_{sn}=\sum_{j=1}^{n}\beta_{sj}\,, \tag{1.4}$$

где

$$\beta_{rj}=\mathbf{M}(\xi_j\,\Lambda_n^{-1}\,\xi_j')^{\frac{r}{2}}\,, \tag{1.5}$$

и s-тый семиинвариант сл. в. $(\mathbf{S}_n,\,\mathbf{t})$ $\Gamma_s\{(\mathbf{S}_n,\,\mathbf{t})\}$. Наконец, положим $\beta_j^{(r)}(\mathbf{t})=\mathbf{M}|(\xi_j,\,\mathbf{t})|^r$, $r\leqslant s$, а символом Θ. будем обозначать величину (не всегда одну и ту же), меньшую по абсолютной величине некоторого числа, зависящего лишь от указанных параметров.

2. Краткий обзор известных результатов

Поговорим сначала о локальной теореме в одномерном случае. Если сл. в. распределены одинаково, то здесь получены окончательные результаты (см., напр., [3], гл. IV). В случае неодинаково распределенных слагаемых следует отметить работы В. В. Петрова ([4], [5]), где для справедливости локальной теоремы требуется

$$B_n\int\limits_{|t|>N_n^{-1}}\prod_{k=1}^{n}|f_{\xi_k}(t)|\,dt\to 0\qquad(n\to\infty)\,.$$

Эффективизацией этого условия занимались многие, но по сей день лучшие результаты принадлежат В. А. Статулявичусу [1].

В многомерном случае локальная теорема для одинаково распределенных сл. в. доказывается аналогично одномерному случаю. В случае неодинаково распределенных сл. в. нам известна лишь одна теорема [12], доказанная при условии $C_j\sigma_j^k\leqslant M$, $j=1,2,\ldots$, где

$$C_j=\sup_{\mathbf{x}}p_j(\mathbf{x})\,.$$

Целью данной работы было обобщить результаты В. А. Статулявичуса [1] для многомерного случая. К сожалению, достичь той же полноты нам не удалось.

В работе также получена равномерная оценка остаточного члена в асимптотическом разложении плотности суммы (ср. случай одинаково распределенных слагаемых из [6] и случай $C_j\tilde{\sigma}_j^k\leqslant M$ из [11]).

3. Основные леммы

Лемма 1 (ср. [1]). *Пусть* ξ *— сл. в., имеющая плотность* p_ξ. *Тогда для любого набора* $\mathfrak{M}=\{\Delta_i,\ C_i,\ i=1, 2, \ldots\}$ *и при любом* $\mathbf{t}\in R^k$ *имеет место неравенство*

$$|f_\xi(\mathbf{t})|\leqslant \exp\left\{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Q_j^3}{[R_j^{k-1}(R_j|\mathbf{t}|+2\pi)]^2 C_j^2}\right\}, \tag{3.1}$$

где $R_j=|\mathbf{l}_j|$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$|f_\xi(2\pi\mathbf{t})|\leqslant 1-\frac{1}{2}\left(1-|f_\xi(2\pi\mathbf{t})|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-|f_\xi(2\pi\mathbf{t})|^2\right)\right\}\leqslant \exp\{-I(\mathbf{t})\},$$

где

$$I(\mathbf{t})=\int_{R^k}\sin^2(\pi\mathbf{t},\ \mathbf{x})\,\tilde{p}_\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{3.2}$$

Так как

$$|\sin\pi(\mathbf{x},\mathbf{y})|\geqslant 2<(\mathbf{x},\ \mathbf{y})>,$$

где $<\alpha>$ — расстояние числа α до ближайшего целого числа, то

$$I(\mathbf{t})\geqslant 4\sum_{j=1}^{\infty} I_{\Delta_j}(\mathbf{t}),$$

причем

$$I_{\Delta_j}(\mathbf{t})=\int_{\Delta_j}\langle(\mathbf{x},\ \mathbf{t})\rangle^2\, q_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=$$

$$=\int_{\Delta_j-\mathbf{x}_0}\langle(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0,\ \mathbf{t})\rangle^2\, q_j(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)\,d\mathbf{x}.$$

Здесь точка $\mathbf{x}_0$ ($\mathbf{x}_0\in\Delta_j$) принадлежит какой-нибудь гиперплоскости $(\mathbf{t},\mathbf{x})=m$, пересекающей Δ_j, а

$$q_j(\mathbf{x})=\begin{cases}\min\{C_j,\ \tilde{p}_\xi(\mathbf{x})\}, & \mathbf{x}\in\Delta_j\\ 0, & \mathbf{x}\bar{\in}\Delta_j.\end{cases}$$

Повернем теперь координатную систему таким образом, чтобы направление вектора $\mathbf{t}$ совпало с определенной координатной осью, например, $\tilde{e}_i$. Получаем

$$I_{\Delta_j}(\mathbf{t})=\sum_{r=-\infty}^{\infty}|\mathbf{t}|^2\int_{\tilde{\Delta}_j}d\tilde{x}_1\ldots d\tilde{x}_{i-1}d\tilde{x}_{i+1}\ldots d\tilde{x}_k\times$$

$$\times\int_{|\tilde{x}_i|<\frac{1}{2|\mathbf{t}|}}\tilde{x}_i^2\, q_j\left(\tilde{x}+\frac{r}{|\mathbf{t}|}\right)d\tilde{x}_i\geqslant$$

$$\geqslant|\mathbf{t}|^2 R_j^{k-1}(R_j|\mathbf{t}|+1)\,C_j\int_{|\tilde{x}_i|\leqslant d}\tilde{x}_i^2\,d\tilde{x}_i.$$

Здесь мы сначала вокруг $\bar{\Delta}_j$ описали прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными новым координатным осям. Понятно, что самое длинное его ребро не больше диагонали Δ_j. Описанный параллелепипед дополняем до куба с ребрами длины R_j. Если, при этом, область интегрирования вокруг каждой точки $\tilde{x}_i = \frac{r}{|\mathbf{t}|}$ уменьшить до $\left[\frac{r}{|\mathbf{t}|} - d, \ \frac{r}{|\mathbf{t}|} + d\right]$, где d — из условия $2d R_j^{k-1}(R_j|\mathbf{t}|+1) C_j = Q_j$, то $I_{\Delta_j}(\mathbf{t})$ тоже лишь уменьшится. Нетрудно подсчитать, что

$$I_{\Delta_j}(\mathbf{t}) \geqslant \frac{|\mathbf{t}|^2}{12} \ \frac{Q_j^3}{[R_j^{k-1}(R_j|\mathbf{t}|+1)]^2 C_j^2} .$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Следствие (ср. [1], [6]). *Если* $p_\xi(\mathbf{x}) \leqslant C \leqslant \infty$, *а ковариационная матрица* V_ξ — *невырождена, то для всех* $\mathbf{t} \in R^k$

$$|f_\xi(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{|t|^2}{96} \ \frac{1}{(4k)^{k-1}(\bar{\sigma}_\xi^2)^{k-1}(\sqrt{k}\,\bar{\sigma}_\xi|\mathbf{t}|+\pi)^2 C^2}\right\}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Так как

$$\int\limits_{\mathbf{x} V_\xi^{-1} \mathbf{x}' \geqslant r^2} \bar{p}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \frac{2k}{r^2},$$

то, при $r^2 = 4k$,

$$Q = \int\limits_{\mathbf{x} V_\xi^{-1} \mathbf{x}' < 4k} \bar{p}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Известно, что если невырожденная квадратичная форма $\mathbf{x}\, V\, \mathbf{x}'$ имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, то квадратичная форма

$$\mathbf{x}\ V^{-1}\,\mathbf{x}' - \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}$$

(см. [10], 356 стр.). При помощи ортогонального преобразования приведем квадратичную форму $\mathbf{x}\ V^{-1}\,\mathbf{x}'$ к диагональному виду

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) z_1^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\lambda_k}\right) z_k^2 .$$

За Δ возьмем описанный вокруг данного эллипсоида прямоугольный параллелепипед. Нетрудно удостовериться, что его диагональ R равна

$$2\sqrt{k}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)^{\frac{1}{2}} .$$

Положим $\mathfrak{M} = \{\Delta, C\}$ и, используя равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 = \bar{\sigma}_\xi^2 ,$$

получаем утверждение следствия.

Лемма 2 (Ср. [2], [7]-[8]). *Если сл. в.* ξ_m, $m = \overline{1, n}$, *имеют конечные моменты* $\mathbf{M}\,|\xi_m|^s$, $s \geqslant 3$, *то, в области*

$$H^* = \{\mathbf{t} : \tilde{Q}_n(\mathbf{t}) \leqslant \tilde{L}_{sn}^{-\frac{2}{3(s-2)}}\} \tag{3.4}$$

имеет место асимптотическое разложение

$$f_{Z_n}(\mathbf{t}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{Q}_n(\mathbf{t})\right\}\left(1 + \sum_{j=1}^{s-3} Q_{jn}(i\mathbf{t}) + \right.$$

$$\left. + \Theta_{s,k}\left([\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{s}{2}} + [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{3(s-2)}{2}}\right)\tilde{L}_{sn}\right), \tag{3.5}$$

где

$$Q_{\nu n}(i\mathbf{t}) = \sum_{m=1}^{\nu} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{\nu_1, \ldots, \nu_m \geqslant 3 \\ \nu_1 + \ldots + \nu_m = \nu + 2m}} \prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma_{\nu_i}\{(\mathbf{Z}_n, i\mathbf{t})\}}{\nu_i!}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Известно [8], что в области

$$H = \left\{ \mathbf{t} : \tilde{Q}_n(\mathbf{t}) \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(s)}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)}{\tilde{Q}_n(\mathbf{t})} \right)^{\frac{1}{s-2}} \leqslant 1 \right\}$$

имеет место оценка

$$|f_{\xi_j}(\mathbf{t})| \geqslant \frac{1}{2}, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Это неравенство тем более будет верно в более узкой области H^* и в той же области получаем

$$\ln f_{Z_n}(\mathbf{t}) = -\frac{\tilde{Q}_n(\mathbf{t})}{2} + \sum_{m=3}^{s-1} \frac{1}{m!}\Gamma_m\{(\mathbf{Z}_n, i\mathbf{t})\} +$$

$$+ \frac{1}{s!}\sum_{j=1}^{n} \Delta_t^{(s)} \ln f_j\left(\Theta_j \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right).$$

Здесь $\Delta_w^{(r)} \ln f(\mathbf{t})$ получается из дифференциала $d^s \ln f(\mathbf{t})$, при замене $dt_1, \ldots, dt_k$ соответственно на $w_1, \ldots, w_k$. Воспользовавшись неравенством [7]

$$|\Delta_w^{(s)} \ln f_\xi(\mathbf{t})| \leqslant \frac{(s-1)!\, 2^{s-1}\, \mathbf{M}\,|(\xi, \mathbf{w})|^s}{|f_\xi(\mathbf{t})|^s}, \tag{3.7}$$

в области H^* получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\Delta_t^{(s)} \ln f_j\left(\Theta_j \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right| = \Theta_s \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(s)}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right).$$

В дальнейшем будем пользоваться методом мажорирования рядов Г. Крамера. Введем

$$V(z) = \ln\left(f_{Z_n}^{\frac{1}{z^2}}(\mathbf{t}z)\, e^{\frac{\tilde{Q}_n(\mathbf{t})}{2}}\right) =$$

$$= \sum_{m=3}^{s-1} \frac{\Gamma_m\{(\mathbf{Z}_n, i\mathbf{t})\}}{m!} z^{m-2} + \Theta_s \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(s)}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)|z|^{s-2},$$

где $z \in R^1$, $|z| \leqslant 1$.

Используя неравенства (3.7),

$$\beta^{(m)}(\mathbf{t}) \leqslant [\beta^{(s)}(\mathbf{t})]^{\frac{m-\nu}{s-\nu}} [\beta^{(\nu)}(\mathbf{t})]^{\frac{s-m}{s-\nu}} \qquad \text{(см. [7])}$$

и

$$\beta_j^{(s)}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right) \leqslant [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{s}{2}} \beta_{sj} \qquad \text{(ср. [9], стр. 103)}$$

в области H^* получаем

$$|V(z)| = \Theta_{s,k} \sum_{m=3}^{s} \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_j^{(2)}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right]^{\frac{s-m}{s-2}} \left[\beta_j^{(s)}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right]^{\frac{m-2}{s-2}} |z|^{m-2} =$$

$$= \Theta_{s,k} \sum_{m=3}^{s} \frac{1}{m!} [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{s-m}{s-2}} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(s)}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right)\right]^{\frac{m-2}{s-2}} |z|^{m-2} =$$

$$= \Theta_{s,k} \sum_{m=3}^{s} \frac{1}{m!} [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{m}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{sj}\right)^{\frac{m-2}{s-2}} |z|^{m-2} =$$

$$= \Theta_{s,k} [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{3}{2}} |z| \tilde{L}_{sn}^{\frac{1}{s-2}} \exp\{[\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{1}{2}} \tilde{L}_{sn}^{\frac{1}{s-2}} |z|\} = \Theta_{s,k},$$

$$|V(z)|^j = \Theta_{s,k}^j [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{3j}{2}} |z|^j \tilde{L}_{sn}^{\frac{j}{s-2}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |j [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{1}{2}} \tilde{L}_{sn}^{\frac{1}{s-2}} z|.$$

В дальнейшем, действуя совершенно аналогично [2], получаем, что

$$|R_{n,s,t,k}(z)| = \left| e^{V(z)} - \left(1 + \sum_{m=3}^{s-1} Q_{mn}(i\mathbf{t})\, z^{m-2}\right)\right| =$$

$$= \Theta_{s,k} |z|^{s-2} \left([\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{s}{2}} + [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{3(s-2)}{2}} \right) \tilde{L}_{sn},$$

а отсюда, при $z=1$, получаем утверждение леммы.

4. Локальная предельная теорема (л. пр. т.)

Через $\mathbf{N}_{\mathbf{M},V}(\cdot)$ будем обозначать k-мерный нормальный закон распределения с вектором математических ожиданий $\mathbf{M}$ и матрицей ковариации V, а под словами „имеет место центральная предельная теорема (ц. пр. т.)" будем понимать, что

$$P_{\mathbf{Z}_n}(A) \to \mathbf{N}_{\mathbf{O},Q}(A), \tag{4.1}$$

где A — любое борелевское множество, а Q — невырождена.

Теорема 1. *Пусть для последовательности* (1.0) *имеет место ц. пр. т., существуют плотности* $p_m(\mathbf{x})$, $m=\overline{1,\ n}$, *причем* $p_{n_j}\leqslant C_{n_j}<\infty$, $1\leqslant n_j\leqslant n$, $j=1,\ 2$, *и пусть для каждой сл. в.* ξ_m, $m=\overline{1,\ n}$ *существует такой набор* $\mathfrak{M}_m$ *и такой набор* n_j, $j=1,\ 2$, *что*

$$\prod_{j=1}^{k} B_{n,j}(C_{n_1}C_{n_2})^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n}\alpha(\mathfrak{M}_m,\ N_n)\right\}\to 0 \tag{4.2}$$

для каких-нибудь $N_n>0$, *удовлетворяющих условию*

$$\varliminf_{n\to\infty} l_n(N_n)>0. \tag{4.3}$$

*Тогда имеет место л. пр. т.**)

Доказательство. Так как, при $n\geqslant n_2$ $f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{t})$ абсолютно интегрируема, то, по формуле обращения, при $n\geqslant n_2$

$$\sup_{\mathbf{x}}|p_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x})|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^k}(I_1+I_2+I_3+I_4).$$

Здесь

$$\varphi(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}|Q|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}Q^{-1}\mathbf{x}')\right\}- \tag{4.4}$$

плотность предельного нормального закона,

$$I_1=\int_{A^*}|f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{t})-h(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t},$$

$$I_2=\int_{R^k\setminus A_n^*}|h(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t},$$

$$I_3=\int_{B_n^*\setminus A_n^*}|f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t},$$

$$I_4=\int_{R^k\setminus B_n^*}|f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t},$$

а

$$h(\mathbf{t})=\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{t}Q\mathbf{t}')\right\}.$$

Определив

$$A_n^*=\{\mathbf{t}:\sqrt{\tilde{Q}_n(\mathbf{t})}<A_n\},\qquad A_n\in R^1,$$

а

$$B_n^*=\left\{\mathbf{t}:\left|\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right|\leqslant\frac{\pi}{N_n}\right\},$$

оценим все интегралы по порядку.

---

*) Теорема остается верной и в том случае, когда существуют не все плотности p_m — надо лишь считать соответствующее слагаемое суммы в экспоненте равным нулю. То же примечание верно и для теоремы 2.

Согласно ц. пр. т., на любом компакте из R^k $f_{Z_n}(\mathbf{t})$ равномерно стремится к $h(\mathbf{t})$, поэтому можно подобрать достаточно медленно возрастающую последовательность чисел A_n таких, что $I_1 \to 0$.

Используя равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{t}\tilde{\Lambda}_n\mathbf{t}' = \mathbf{t}Q\mathbf{t}' \tag{4.5}$$

и то, что с помощью ортогонального преобразования данную квадратичную форму можно привести к виду $\sum_{m=1}^{k} q_m t_m^2$, где $q_1, \ldots, q_k$ — собственные значения матрицы Q, получаем

$$I_2 \leqslant \int_{|\sqrt{\tilde{\lambda}}\mathbf{t}|>A_n+o(1)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k} q_m t_m^2\right\} d\mathbf{t} =$$

$$= \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2}}} \int_{|\mathbf{t}|>A_n+o(1)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k} t_m^2\right\} d\mathbf{t} = \frac{\Theta_k}{|Q|^{\frac{1}{2}}(A_n+o(1))} \to 0.$$

Так как (аналогично лемме 1)

$$|f_{S_n}(2\pi\mathbf{t})| \leqslant \exp\{-I_n(\mathbf{t})\},$$

где

$$I_n(\mathbf{t}) = \sum_{m=1}^{n} \int_{R^k} \sin^2 \pi(\mathbf{t}, \mathbf{x})\, \tilde{p}_m(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{4.6}$$

и

$$I_n(\mathbf{t}) \geqslant 4 \sum_{m=1}^{n} \int_{|(\mathbf{x},\mathbf{t})|<\frac{1}{2}} (\mathbf{x}, \mathbf{t})^2\, \tilde{p}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geqslant$$

$$\geqslant 4\, Q_n(\mathbf{t})\, l_n\left(\frac{1}{2|\mathbf{t}|}\right),$$

то, учитывая (4.3), получаем оценку

$$|f_{S_n}(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{l}{\pi^2} Q_n(\mathbf{t})\right\} \quad \text{при} \quad |\mathbf{t}| \leqslant \frac{\pi}{N_n}$$

или

$$|f_{Z_n}(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{-\frac{l}{\pi^2} \tilde{Q}_n(\mathbf{t})\right\} \quad \text{при} \quad \left|\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n}\right| \leqslant \frac{\pi}{N_n}. \tag{4.7}$$

Таким образом,

$$I_3 \leqslant \int_{A_n \leqslant |\sqrt{\tilde{\lambda}}\mathbf{t}|} \exp\left\{-\frac{l}{\pi^2}\sum_{m=1}^{k} \tilde{\lambda}_m t_m^2\right\} d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant \Theta_k \frac{1}{|\tilde{\Lambda}_n|^{\frac{1}{2}} A_n} \to 0.$$

Осталось оценить I_4.

$$I_4=\prod_{j=1}^{k} B_{n,j} \int\limits_{|\mathbf{t}|>\frac{\pi}{N_n}} |f_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{k} B_{n,j} \int\limits_{|\mathbf{t}|>\frac{\pi}{N_n}} \exp\left\{-\left(I_n(\mathbf{t})-I_2(\mathbf{t})\right)\right\} |f_{\mathbf{S}_2}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}.$$

Здесь $\mathbf{S}_2$ — сумма, составленная из двух слагаемых, имеющих ограниченную плотность, а $I_n(\mathbf{t})$ — из (4.6). Нетрудно заметить, что, согласно лемме 1,

$$I_n(\mathbf{t})\geqslant \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n} \alpha\left(\mathfrak{M}_m, \frac{1}{\|\mathbf{t}|}\right) \tag{4.8}$$

для всех $\mathbf{t}$. В области же $|\mathbf{t}|>\frac{\pi}{N_n}$ минимальное значение правой стороны 4.8) равно

$$M_n=\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n} \alpha(\mathfrak{M}_m, N_n)$$

и, таким образом,

$$I_4\leqslant \prod_{j=1}^{n} B_{n,j}\, e^2 e^{-M_n} \int\limits_{R^k} |f_{\mathbf{S}_2}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}\leqslant$$

$$\leqslant e^2 \prod_{j=1}^{n} B_{n,j} e^{-M_n} (C_{n_1} C_{n_2})^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно условиям теоремы, $I_4\to 0$, чем и завершается доказательство.

5. Асимптотическое разложение для $p_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{x})$

Теорема 2. *Если для какого-нибудь n и целого $s\geqslant 3$ сл. в. ξ_m, $m=\overline{1,n}$, имеют конечные моменты $\mathbf{M}|\xi_m|^s<\infty$, существуют плотности $p_m(\mathbf{x})$, $m=\overline{1,n}$, причем $p_{n_j}\leqslant C_{n_j}<\infty$, $1\leqslant n_j\leqslant n$, $j=1, 2$,*

то

$$p_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{s-3} Q_{jn}(-\varphi)(\mathbf{x})+R_n(\mathbf{x}).$$

Здесь $\varphi(\mathbf{x})$ — из (4.4), полином

$$Q_{jn}(-\varphi)(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R^k} Q_{jn}(i\mathbf{t})\, e^{-\frac{1}{2}\tilde{Q}_n(\mathbf{t})-i(\mathbf{t},\mathbf{x})} d\mathbf{t}$$

можно получить из $Q_{jn}(i\mathbf{t})$, подставляя в (3.6) вместо произведений $t_1^{\alpha_1}\dots t_k^{\alpha_k}$ выражения

$$(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_k^{\alpha_k}}.$$

Для остаточного члена $R_n(\mathbf{x})$ *верна оценка*

$$R_n(\mathbf{x}) \leqslant \Theta_{s,k} \frac{\tilde{L}_{sn}}{|\tilde{\Lambda}_n|^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ e^2 \prod_{j=1}^{k} B_{n,j} \, (C_{n_1} C_{n_2})^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{3} \sum_{m=1}^{n} \alpha(\mathfrak{M}_m, 8\tilde{B}_n \tilde{L}_{3n}) \right\}. \qquad (5.1)$$

Доказательство. Аналогично теореме 1 получаем неравенство

$$\sup_{\mathbf{x}} |p_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^k} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4),$$

где

$$I_1 = \int_{H^*} |f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{t}) - h_{s,n}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t},$$

$$I_2 = \int_{R^k \setminus H^*} |h_{s,n}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t},$$

$$I_3 = \int_{N^* \setminus H^*} |f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t},$$

$$I_4 = \int_{R^k \setminus N^*} |f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t},$$

$$p(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{s-3} Q_{jn}(-\varphi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{R^k} e^{-i(t,x)} h_{s,n}(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t},$$

а

$$h_{s,n}(\mathbf{t}) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \tilde{Q}_n(\mathbf{t}) \right\} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-3} Q_{jn}(i\mathbf{t}) \right).$$

Область H^* здесь из (3.4), а

$$N^* = \left\{ \mathbf{t} : \left| \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n} \right| \leqslant \frac{\pi}{8\tilde{B}_n \tilde{L}_{3n}} \right\}.$$

Для оценки I_1 используем лемму 2.

$$I_1 = \Theta_{s,k} \left(\int_{H^*} [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{s}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \tilde{Q}_n(\mathbf{t}) \right\} d\mathbf{t} + \right.$$

$$\left. + \int_{H^*} [\tilde{Q}_n(\mathbf{t})]^{\frac{3(s-2)}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \tilde{Q}_n(\mathbf{t}) \right\} d\mathbf{t} \right) \tilde{L}_{sn} = \Theta_{s,k} \tilde{L}_{sn} (Y_1 + Y_2).$$

Так как

$$Y_1 \leqslant \frac{2^{\frac{3(s+k)}{2}} \pi^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{s+k}{2} \right)}{\sqrt{|\tilde{\Lambda}_n|} \, \Gamma\left(\frac{k}{2} \right)} = \Theta'_{s,k} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}_n|^{\frac{1}{2}}},$$

и, аналогично,

$$Y_2 \leqslant \Theta''_{s,k} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}_n|^{\frac{1}{2}}},$$

то

$$I_1 \leqslant \Theta_{s,k} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}_n|^{\frac{1}{2}}} \tilde{L}_{sn}.$$

Далее, получаем

$$I_2 \leqslant \int\limits_{\tilde{Q}_n(\mathbf{t}) > \tilde{L}_{sn}^{\frac{2}{3(s-2)}}} |h_{s,n}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} \leqslant \Theta_{s,k} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}_n|^{\frac{1}{2}}} \tilde{L}_{sn}.$$

Так как

$$l_n(N_n) = \inf_{|\mathbf{t}|=1} \frac{1}{Q_n(\mathbf{t})} \sum_{m=1}^{n} \int\limits_{|\mathbf{x}|<N_n} (\mathbf{x}, \mathbf{t})^2 \tilde{p}_m(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{|\mathbf{t}|=1} \left[2 - \frac{1}{Q_n(\mathbf{t})} \sum_{m=1}^{n} \int\limits_{|\mathbf{x}|>N_n} \frac{(\mathbf{x} \Lambda_n^{-1} \mathbf{x}')^{\frac{3}{2}} (\mathbf{t} \Lambda_n \mathbf{t}')}{(\mathbf{x} \Lambda_n^{-1} \mathbf{x}')^{\frac{1}{2}}} \tilde{p}_m(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right],$$

а

$$(\mathbf{x} \Lambda_n^{-1} \mathbf{x}')^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{N_n}{\tilde{B}_n}$$

в области $|\mathbf{x}| > N_n$, то при $N_n = 8\tilde{\mathbf{B}}_n \tilde{L}_{3n}$ $l_n(N_n) > 1$, и, аналогично выводу неравенства (4.7), получаем

$$|f_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{t})| \leqslant \exp\left\{ -\frac{1}{\pi^2} \tilde{Q}_n(\mathbf{t}) \right\}$$

при

$$\left| \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{B}_n} \right| \leqslant \frac{\pi}{8\tilde{\mathbf{B}}_n \tilde{L}_{3n}}.$$

Таким образом,

$$I_3 \leqslant \int\limits_{\tilde{Q}_n(\mathbf{t}) > \tilde{L}_{sn}^{-\frac{2}{3(s-2)}}} \exp\left\{ -\frac{1}{\pi^2} \tilde{Q}_n(\mathbf{t}) \right\} d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant \Theta_{s,k} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}_n|^{\frac{1}{2}}} \tilde{L}_{sn}.$$

Осталось оценить I_4. Действуя совершенно аналогично доказательству теоремы 1, получаем

$$I_4 \leqslant e^2 \prod_{j=1}^{k} B_{n,j} e^{-M_n^*} (C_{n_1} C_{n_2})^{\frac{1}{2}},$$

где

$$M_n^* = \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n} \alpha(\mathfrak{M}_m,\ 8\tilde{\mathbf{B}}_n \tilde{L}_{3n}).$$

Доказательство окончено.

6. Некоторые следствия

Следствие 1. *Если для последовательности* (1.0):

1.1) *имеет место ц. пр. т.,*

2.1) *выполнено соотношение*

$$\max_{j\leqslant n} \frac{\tilde{\sigma}_j}{\tilde{\mathbf{B}}_n} \to 0,$$

3.1) $p_{n_i}(\mathbf{x}) \leqslant C_{n_i} < \infty, \qquad i=\overline{1, n_0}, \qquad n_0 \geqslant 2,$

$p_m(\mathbf{x}) \leqslant C_m \leqslant \infty, \qquad m \neq n_i,$

4.1) $$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\tilde{\sigma}_m^{2(k-1)}(\tilde{\sigma}_m^2+N_n^2)\, C_m^2} \to \infty$$

для каких-нибудь N_n, *удсвлетворяющих* (4.3), *то для* (1.0) *выполняется л. пр. т.*

Следствие 2. *Если для последовательности* (1.0):

1.2) *имеет место ц. пр. т.,*

2.2) $|\xi_m| \leqslant M, \qquad m=1, 2, \ldots,$ *с вероятностью* 1,

3.2) $p_m \leqslant C_m \leqslant \infty, \qquad m=1, 2, \ldots,$

4.2) $$\frac{1}{\ln n}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{C_m^2} \to \infty,$$

то для (1.0) *справедлива л. пр. т.*

Следствие 3. (ср. [12], теорема 2). *Если для* (1.0):

1.3) *имеет место ц. пр. т.,*

2.3) $p_m(\mathbf{x}) \leqslant C_m < \infty, \qquad m=1, 2, \ldots,$

3.3) $\tilde{\sigma}_m^k C_m \leqslant M, \qquad m=1, 2, \ldots,$

4.3) $\max\limits_{j\leqslant n} \dfrac{\tilde{\sigma}_j}{\tilde{\mathbf{B}}_n} \to 0, \qquad n\to\infty,$

то тогда имеет место л. пр. т.

Действительно, действуя аналогично доказательству следствия из леммы 1, нетрудно показать, что

$$\alpha(\mathfrak{M}_m, N_n) \geqslant \frac{1}{96\,(4k)^k}\cdot\frac{1}{\tilde{\sigma}_m^{2(k-1)}(\tilde{\sigma}_m^2+N_n^2)\, C_m^2}. \tag{6.1}$$

Так как

$$\prod_{j=1}^{k} B_{n,j} \leqslant \frac{\tilde{\mathbf{B}}_n^k}{k^{\frac{k}{2}}},$$

а из условия 2.1) вытекает $\tilde{\mathbf{B}}_n = o(e^{\varepsilon n})$ для всех $\varepsilon > 0$, то из (4.2), (6.1), последнего равенства и (4.1) получаем л. пр. т.

Из ограниченности величин ξ_m, $m = 1, 2, \ldots$, следует, что $\tilde{\sigma}_j^2 \leqslant M^2$, а за N_n можно взять M. Отсюда – следствие 2.

Так как дисперсию минимизирует равномерное распределение, то, используя 3.3), нетрудно получить

$$\int\limits_{|\mathbf{x}| < 2k\tilde{\sigma}_m} (\mathbf{x}, \mathbf{t})^2 \, \tilde{p}_m(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geqslant \frac{|\mathbf{t}|}{3 \cdot 2^3 (2\sqrt{k})^{2(k-1)}} \, \frac{\tilde{\sigma}_m^2}{M}.$$

Определим теперь числа n_1 и n_2 из равенств

$$\tilde{\sigma}_{n_1} = \max_{j \leqslant n} \tilde{\sigma}_j, \qquad \tilde{\sigma}_{n_2} = \max_{\substack{j \leqslant n \\ j \neq n_1}} \tilde{\sigma}_j,$$

а за N_n возьмем $2k\,\tilde{\sigma}_{n_2}$. Тогда

$$l_n(N_n) \geqslant \frac{1}{2^5 k (2\sqrt{k})^{2(k-1)} M}$$

и из (4.2) получаем

$$\prod_{j=1}^{k} B_{n,j} \left(C_{n_1} C_{n_2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{96(4k)^k} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\tilde{\sigma}_m^{2(k-1)} (\tilde{\sigma}_m^2 + \sigma_{n_2}^2) C_m^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{\tilde{\mathbf{B}}_n^k}{\tilde{\sigma}_{n_2}^k} \exp\left\{-\frac{1}{96(4k)^k} \frac{1}{2M^2} \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_{n_2}^2} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_1}}^{n} \tilde{\sigma}_m^2 + 1\right)\right\} \to 0,$$

так как

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_1}}^{n} \tilde{\sigma}_m^2 = \tilde{\mathbf{B}}_n^2 \left(1 + o(1)\right)$$

из-за 4.3).

Нетрудно заметить, что асимптотическое разложение из [11] является частным случаем теоремы 2. Следует при этом отметить, что

$$\sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{M} \left|\left(\frac{\xi_j}{\mathbf{B}_n}, \mathbf{t}\right)\right|^s}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{M} \left(\frac{\xi_j}{\mathbf{B}_n}, \mathbf{t}\right)^2\right]^{\frac{s}{2}}} = \tilde{L}_{sn}.$$

Нетрудно видеть, что из $\tilde{L}_{sn} \to 0$ следует л. пр. т.

Теперь заметим, что теорему 1 можно усилить, а теорему 2 – видоизменить. Начнем с принятого нами определения ,,имеет место ц. пр. т.'' (см. (4.1)). Здесь сумму $\mathbf{Z}_n$ мы получали умножая $\mathbf{S}_n$ на диагональную матрицу, а именно $\mathbf{Z}_n = \mathbf{S}_n D_n$, где $D_n = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$, $d_{ii} = B_{n,i}^{-1}$, $d_{ij} = 0$, $i \neq j$. Данная нормировка матрицу ковариации переводила в матрицу корреляции, которая, естественно, могла вырождаться. Сейчас нормировку выполним с помощью матрицы более общего вида. Положим

$$\bar{\mathbf{Z}}_n = \mathbf{S}_n I_n, \tag{6.2}$$

где I_n такова, что $I'_n \Lambda_n I_n = I$, и под словами „имеет место ц. пр. т.“ станем понимать, что

$$\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{Z}}_n}(A) \to \mathbf{N}_{0,I}(A)$$

для любого борелевского множества A.

Теорема 1а. *Имеет место теорема* 1.

Действительно, положив

$$\bar{A}_n^* = \{\mathbf{t} : \sqrt{Q_n(\mathbf{t} I'_n)} = |\mathbf{t}| < A_n\},$$

$$\bar{B}_n^* = \left\{\mathbf{t} : |\mathbf{t} I'_n| \leq \frac{\pi}{N_n}\right\},$$

оценки для I_1, I_2, I_3, и I_4 получаем совершенно также, причем для I_4 потому, что якобиан преобразования $|I_n^{-1}| \leq \prod_{j=1}^{k} B_{n,j}$.

Аналогично можно перефразировать лемму и теорему 2. Следует лишь иметь в виду, что теперь $\bar{\Lambda}_n = I$, а $\bar{Q}_n(\mathbf{t}) = |\mathbf{t}|^2$. $\bar{L}_{sn}$ остается тем же.

В заключение автор благодарит В. А. Статулявичуса за постоянную помощь и внимание, а также А. Бикялиса и Л. Саулиса, частые беседы с которыми были весьма полезны.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
2.II.1971

Литература

1. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теор. вер. и ее прим., X, 4 (1965), 645–659.
2. В. А. Статулявичус, Об асимптотическом разложении характеристической функции суммы независимых случайных величин, Лит. матем. сб., II, 2(1962), 227–232.
3. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, „Наука“, М., 1965.
4. В. В. Петров, Локальная теорема для плотностей сумм независимых случайных величин, Теор. вер. и ее прим., I, 3(1956), 349–356.
5. В. В. Петров, Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теор. вер. и ее прим., IV, 2 (1959), 220–224.
6. А. Бикялис, Неравенства для многомерных характеристических функций, Лит. матем. сб., X, 1 (1970), 5–12.
7. А. Бикялис, О многомерных характеристических функциях, Лит. матем. сб., VIII, 1(1968). 39–44.

8. А. Бикялис, Об асимптотическом разложении для произведений многомерных характеристических функций, Теор. вер. и ее прим., XIV, 3(1969), 508–511.
9. Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, „Мир", М., 1965.
10. Г. Корн и Т. Корн, Справочник по математике, „Наука", М., 1970.
11. Л. Саулис, Асимптотическое разложение для плотности распределения сумм независимых неодинаково распределенных многомерных случайных величин. Лит. матем. сб., **XI**, 3(1971), 651–663.
12. Т. Л. Шервашидзе, Л. И. Саулис, О многомерных предельных теоремах для плотности распределений, Сообщ. АН Груз. ССР, **60**, 3 (1970), 533–536.

APIE LOKALINĘ RIBINĘ TEOREMĄ IR ASIMPTOTINIUS DĖSTINIUS DAUGIAMAČIU ATVEJU

R. Lapinskas

(*Reziumė*)

Darbe įrodoma, kad nevienodai pasiskirsčiusių vektorių normuotos sumos tankiui galioja lokalinė teorema, kai galioja centrinė ribinė teorema ir (4.2). Taip pat gautas tolydinis asimptotinio dėstinio liekamojo nario įvertinimas (5.1).

ON LIMIT THEOREM FOR DENSITY FUNCTION AND ASYMPTOTIC EXPANSION IN MULTIDIMENSIONAL CASE

R. Lapinskas

(*Summary*)

A limit theorem for density function of sum of nonidentically distributed vectors is proved when the central limit theorem and (4.2) take place. Besides, we get an estimate (5.1) of the remainder term of asymptotic expansion.