XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1971

УДК 518:517.944/947

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Д. И. Сапаговене

Пусть u – функция двух переменных x и y, Δ – оператор Лапласа, R – односвязная область, составленная из любого числа прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Пусть, далее, любая прямая, параллельная оси x, пересекает контур C области R не более чем в двух точках или касается части контура.

Будем искать числа $\lambda_k > 0$, для которых задача

$$\Delta u(P) + \lambda u(P) = 0, \quad P \in R \tag{1}$$

с граничным условием

$$u(P) = 0, \quad P \in C \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = 0, \quad P \in C, \tag{3}$$

где n – направление нормали контура, имеет нетождественное нулю решение.

Используя квадратную сетку с шагом h и обычную пятиточечную разностную аппроксимацию, заменим дифференциальную задачу разностной с ошибкой аппроксимации порядка $O(h^2)$. В каждой точке $(i, j) \in R$ получим

$$4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} - h^2 \lambda_h u_{ij} = 0, \tag{4}$$

а вместо условия (2) $u_{ij} = 0$, $(i, j) \in C$. В случае задачи (1), (3) область покрываем сеткой, сдвинутой на $\frac{h}{2}$ и $\frac{\partial u(P)}{\partial n} = 0$, $P \in C$, заменяем на $u(Q) = u(S)$ с ошибкой аппроксимации $O(h^2)$, где Q и S – точки, соседние с точкой P, лежащие в направлении нормали на расстоянии $\frac{h}{2}$.

Таким образом, задачи (1), (2) или (1), (3) приведены к

$$Au - h^2 \lambda_h u = 0, \tag{5}$$

где A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & & \\ B_1' & A_2 & B_2 & & & \\ & B_2' & A_3 & B_3 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & B_{N-2}' & A_{N-1} & B_{N-1} \\ & & & & B_{N-1}' & A_N \end{pmatrix}.$$

Здесь A_i, B_i – матрицы, N – число внутренних строк сеточной области, порядок A_i равен числу внутренних точек в i-ой строке, $\lambda_h \to \lambda$ при $h \to 0$. При составлении матрицы A, точки сеточной области пронумерованы следующим образом: по строкам – снизу вверх, а в строке – слева направо. Таким образом, задачи (1), (2) или (1), (3) мы свели к матричной задаче (5) о собственных значениях

$$(A-\mu E)u=0,$$

где $\mu = h^2\lambda_h$.

Среди наиболее распространенных методов решения задачи (5) следует отметить итерационный метод последовательной верхней релаксации [1] для вычисления наименьшего собственного значения и метод суммарных представлений [2] для нахождения всех собственных значений.

В данной заметке описывается метод для нахождения одного, нескольких или всех собственных значений задачи (5), изложенный ранее для областей частного вида в [3]. Метод основан на нахождении корней алгебраического уравнения

$$P(\mu) \equiv |A-\mu E| = 0$$

итерационным способом, причем значение $P(\mu_k)$ при фиксированном μ_k вычисляется путем разложения матрицы $A-\mu_k E$ на произведение правой и левой треугольных матриц по методу квадратного корня [4] в комплексной области. Подобные методы для общих и ленточных матриц A, основанные на различных разложениях матрицы $A-\mu E$, исследованы Уилкинсоном [5]. Описываемый здесь метод для решения задачи (5) использует значительно больше информации о структуре матрицы A, а не только свойство ленточности, и поэтому позволяет существенно сэкономить память ЭВМ по сравнению с общими ленточными матрицами, а для областей, отличных от прямоугольника, также уменьшить число арифметических операций.

Как известно [4], элементы матрицы S, полученной при разложении матрицы $A-\mu E$ в произведение $S'S$, где S – правая треугольная матрица, вычисляются по формулам:

$$s_{11}=\sqrt{a_{11}-\mu}, \quad s_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\mu-\sum_{l=1}^{i-1} s_{li}^2} \qquad (i>1),$$

$$s_{1j}=\frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad s_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{l=1}^{i-1} s_{li}s_{lj}}{s_{ii}} \qquad (i>1,\ j>i). \tag{6}$$

При этом $P(\mu_k)=\prod_{i=1}^{n} s_{ii}^2$, где n порядок матрицы A.

Поскольку матрица $A-\mu E$ имеет обычно высокий порядок, но несложную структуру, то ее элементы при разложении не держатся в памяти ЭВМ, а порождаются.

Пусть строки сеточной области имеют номера 0, 1, ..., $N+1$, причем внутренние строки обозначены номерами с 1 по N. Для простоты описания считаем, что структура области для каждой строки задается тремя характеристиками (хотя эта информация избыточная) n_i, m_i, m'_i, $i=1, 2, \ldots, N+1$, где n_i — число внутренних точек в i-ой строке, m_i (соответственно m'_i) — увеличение числа внутренних точек в i-ой строке относительно нижестоящей строки на левом (соответственно правом) конце строки. Если число точек в i-ой строке увеличилось в левой (соответственно в правой) стороне на число t, то m_i (соотв. m'_i) авняется $-t$, а если уменьшилось, то m_i (соотв. m'_i) равняется $-t$. Для строк с номерами $i=1$, $N+1$ информация фиктивная n_1, $m_1=0$, $m'_1=n_1$; $n_{N+1}=n_N$, $m_{N+1}=0$, $m'_{N+1}=-n_N$ и $n_0=0$.

Назовем точки $(i\pm 1, j)$ и $(i, j\pm 1)$ соседними с точкой (i, j). Преобразуем формулы (6) в зависимости от заданной информации о сеточной области, а именно, выведем выражения для a_{ii} и a_{ij}, и изменим верхний индекс суммирования. С этой целью докажем следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $a_{ii}^{(k)}$ *диагональный элемент матрицы* A_k $(i=1, 2, \ldots, n_k)$.

Тогда

$$a_{ii}^{(k)}=\begin{cases}4, & \text{в случае краевого условия (2)},\\ l_{ki}, & \text{в случае краевого условия (3)},\end{cases} \tag{7}$$

где l_{ki} *— число соседних внутренних точек с* i*-ой точкой* k*-ой строки.*

Доказательство. Пусть (i, k) — любая внутренняя точка. Если $(i\pm 1, k)$ и $(i, k\pm 1)$ все внутренние точки, то утверждение леммы непосредственно следует из (4).

Пусть хотя бы одна точка из соседних с точкой (i, k) принадлежит границе сеточной области. Для определенности, пусть это будет точка $(i+1, k)$. Тогда, в случае краевого условия (2), уравнение (4) примет вид:

$$4u_{ik}-u_{i-1,\,k}-u_{i,\,k-1}-u_{i,\,k+1}-\mu u_{ik}=0,$$

а в случае условия (3) —

$$3u_{ik}-u_{i-1,\,k}-u_{i,\,k-1}-u_{i,\,k+1}-\mu u_{ik}=0,$$

так как $u_{ik}=u_{i+1,\,k}$. Таким образом, $l_{ki}=3$. Очевидно, что в случае условия (3) коэффициент при u_{ik} уменьшается на число, равное количеству соседних точек, принадлежащих границе сеточной области. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть матрица* A *— неразложимая* [6]. *Тогда*

$$\begin{aligned} l_{ki}&=2-\delta_{1i}-\delta_{n_k i}+\chi(i+m_{k+1}-1)\,\chi(n_k+m'_{k+1}-i)+\\ &+\chi(i-m_k-1)\,\chi(n_k-m'_k-i), \end{aligned} \tag{8}$$

где δ_{ij} *— символ Кронекера и*

$$\chi(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Доказательство. Так как прямая $y=y_k$ пересекает границу области лишь в двух точках или частично совпадает с ней, то это означает, что или ни одной внутренней точки нет, или все внутренние точки расположены подряд. В силу неразложимости матрицы A, в каждой внутренней строке будет хоть одна внутренняя точка. Следовательно, любая внутренняя точка

k-ой строки будет иметь две соседние точки, расположенные в той же строке, за исключением крайней слева и крайней справа точек, которые будут иметь не больше, чем по одной соседней точке. Таким образом, число внутренних соседних точек, находящихся справа и слева от i-ой точки, равно $2-\delta_{1i}-\delta_{n_k i}$. В силу неразложимости матрицы A, хотя бы одна точка k-ой строки будет иметь внутреннюю соседнюю сверху.

Если $m_k \geqslant 0$, то первая точка k-ой строки ($i=1$) будет иметь внутреннюю соседнюю сверху. Если $m_k<0$, то первой точкой, имеющей внутреннюю соседнюю сверху, будет $i=1-m_{k+1}$. Тогда $\chi(i+m_{k+1}-1)=1$ для любого i, начиная от первой точки, имеющей внутреннюю соседнюю сверху, до $i=n_k$.

Аналогично, при $m'_{k+1}\geqslant 0$ последняя точка ($i=n_k$) будет иметь внутреннюю соседнюю сверху, а при $m'_{k+1}<0$, последней точкой, имеющей внутреннюю соседнюю сверху, будет $i=n_k+m'_{k+1}$, и $\chi(n_k+m'_{k+1}-i)=1$, начиная с $i=1$ до $i=n_k+m'_{k+1}$, если $m'_{k+1}<0$, или до $i=n_k$, если $m'_{k+1}\geqslant 0$.

Таким образом, i-ая точка k-ой строки будет иметь внутреннюю соседнюю сверху тогда и только тогда, когда

$$\chi(i+m_{k+1}-1)\,\chi(n_k+m'_{k+1}-i)=1.$$

Аналогично показывается, что любая i-ая точка k-ой строки будет иметь соседнюю внутреннюю снизу тогда и только тогда, когда

$$\chi(i-m_k-1)\,\chi(n_k-m'_k-i)=1.$$

Таким образом, i-ая точка k-ой строки будет иметь

$$2-\delta_{1i}-\delta_{n_k i}+\chi(i+m_{k+1}-1)\,\chi(n_k+m'_{k+1}-i)+$$
$$+\chi(i-m_k-1)\,\chi(n_k-m'_k-i)$$

внутренних соседних точек. Лемма доказана.

Замечание 1. Требование неразложимости матрицы A не является необходимым для доказательства леммы 2. Однако, в случае разложимости матрицы область распадается на подобласти, связанные только граничными точками, и матрицу A можно записать в виде $A=\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$. Следовательно, задачу можно решать в отдельных подобластях, т. е. искать отдельно корни уравнений $|M_1-\mu E|=0$ и $|M_2-\mu E|=0$, что значительно проще.

Лемма 3. *Пусть*

$$A_k=\{a_{ij}^{(k)}\},\quad B_k=\{b_{il}^{(k)}\},\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant n_k,\quad 1\leqslant l\leqslant n_{k+1}.$$

Тогда

$$a_{ij}^{(k)}=\begin{cases} -1, & \text{если } |j-i|=1, \\ 0, & \text{если } |j-i|>1, \end{cases} \tag{9}$$

$$b_{il}^{(k)}=\begin{cases} -1, & \text{если } l-i=m_{k+1}, \\ 0, & \text{если } l-i\neq m_{k+1}. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Первая часть леммы следует из того факта, что каждая внутренняя точка k-ой строки, за исключением первой и последней точек, имеет соседние внутренние точки и слева, и справа. Обозначим через a_{ij} элемент матрицы A. Тогда

$$b_{ij}^{(k)} = a_{Q_{k-1}+i,\, Q_k+j},$$

где

$$Q_k = \sum_{l=1}^{k} n_l.$$

Запишем уравнение (4) для i-ой точки k-ой строки.

$$4a_{Q_{k-1}+i,\, Q_{k-1}+i} u_{ik} - a_{Q_{k-1}+i,\, Q_{k-1}+i-1} u_{i-1,\, k} -$$

$$- a_{Q_{k-1}+i,\, Q_{k-1}+i+1} u_{i+1,\, k} - a_{Q_{k-1}+i,\, Q_{k-1}+i-n_{k-1}-m_k} u_{i,\, k-1} -$$

$$- a_{Q_{k-1}+i,\, Q_{k-1}+i+n_k+m_{k+1}} u_{i,\, k+1} - \mu u_{ik} = 0.$$

Коэффициент при соседней сверху точке $(i, k+1)$ равен -1, если $(i, k+1)$ — внутренняя точка, т. е.

$$a_{Q_{k-1}+i,\, Q_{k-1}+i+n_k+m_{k+1}} = b_{i,\, i+m_{k+1}}^{(k)} = -1.$$

Точка $(i, k+1)$ будет внутренней, т. е. будет принадлежать $(k+1)$-ой строке, если

$$Q_{k-1} + n_k + 1 \leqslant Q_{k-1} + i + n_k + m_{k+1} \leqslant Q_{k-1} + n_k + n_{k+1},$$

откуда $1 \leqslant i + m_{k+1} \leqslant n_{k+1}$.

Следовательно, для всех $i = 1, 2, \ldots, n_k$ $b_{il}^{(k)} = -1$ тогда и только тогда, когда $l = i + m_{k+1}$ и $1 \leqslant i + m_{k+1} \leqslant n_{k+1}$, т. е. если $l - i = m_{k+1}$ и $1 \leqslant l \leqslant n_{k+1}$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть*

$$A - \mu E = S'S, \quad S = \{s_{ij}\}, \qquad j \geqslant i,$$

тогда для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \mu - \sum_{l=1}^{n_k+m_{k+1}} s_{i-l,\, i}^2},$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{l=1}^{n_k+m_{k+1}-j+i} s_{i-l,\, i}\, s_{i-l,\, j}}{s_{ii}}, \qquad j > i,$$

при

$$Q_k < j \leqslant Q_{k+1}, \quad Q_{k-1} < i \leqslant Q_{k+1}, \quad Q_k = \sum_{l=1}^{k} n_l;$$

$$s_{ij} = 0, \quad \textit{если} \quad j - i > n_k + m_{k+1},$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{lp}^{(k+1)} \; (l = i - Q_k,\ p = j - Q_k), & \textit{если} \quad i > Q_k, \\ b_{rp}^{(k)} \; (r = i - Q_{k-1},\ p = j - Q_k), & \textit{если} \quad i \leqslant Q_k, \end{cases}$$

$$s_{ij} = 0, \quad \textit{если} \quad i \leqslant 0.$$

Доказательство. Пусть для некоторого j $a_{1j}=0$. Тогда, согласно (6), $s_{1j}=0$. Пусть далее, $a_{1j}=a_{2j}=\ldots=a_{ij}=0$ $(i<j)$. Тогда из выражения для элементов s_{ij} $(i>1,\ j>i)$ получаем последовательно, что $s_{2j}=s_{3j}=\ldots=$ $=s_{ij}=0$.

Если для некоторого $Q_k<j\leqslant Q_{k+1}$, элемент $b_{rp}^{(k)}=-1$, где $p=j-Q_k$, то по лемме 3,

$$b_{p-m_{k+1},\,p}^{(k)}=a_{Q_{k-1}+p-m_{k+1},\,Q_k+p}=a_{j-n_k-m_{k+1},\,j}=-1.$$

Поскольку матрица A блочно-трехдиагональная, а по лемме 3 в матрице B_k, в каждом столбце не более одного элемента, то

$$a_{ij}=0,\quad \text{если}\quad i<j-n_k-m_{k+1}.$$

Если в j-ом столбце матрицы B_k все элементы нулевые, то вследствие трехдиагональности матрицы A_{k+1} (лемма 3), для этого столбца имеем $a_{ij}=0$, если $i<j-1$. Так как $n_k+m_{k+1}\geqslant 1$ (в силу неразложимости матрицы A), то тем более

$$a_{ij}=0,\quad \text{если}\quad i<j-(n_k+m_{k+1}).$$

Окончательно получаем, что для любых $Q_k<j\leqslant Q_{k+1}$

$$s_{ij}=0,\quad \text{если}\quad j-i>n_k+m_{k+1}.$$

Формула (12) доказана.

Следовательно, если $Q_k<i\leqslant Q_{k+1}$, то, согласно (6), (12),

$$s_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\mu-\sum_{l=1}^{i-1}s_{li}^2}=\sqrt{a_{ii}-\mu-\sum_{l=1}^{i-1}s_{i-l,\,i}^2}=$$
$$=\sqrt{a_{ii}-\mu-\sum_{l=1}^{n_k+m_{k+1}}s_{i-l,\,i}^2}.$$

Далее, если $Q_k<j\leqslant O_{k+1}$, $Q_{k-1}<i\leqslant Q_{k+1}$ и $i<j$, то по формулам (6), (12)

$$s_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{l=1}^{i-1}s_{li}s_{lj}}{s_{ii}}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{l=1}^{i-1}s_{i-l,\,i}\,s_{i-l,\,j}}{s_{ii}}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{l=1}^{M_k}s_{i-l,\,i}\,s_{i-l,\,j}}{s_{ii}},$$

где M_k выбирается так, что $j-(i-M_k)=n_k+m_{k+1}$, т. е. $M_k=n_k+m_{k+1}-j+i$.

Таким образом, мы доказали формулы (11). Выражение (13) показывает связь между элементами матрицы A и A_k, B_k, соответственно. Значения этих элементов дают леммы 2 и 3. Теорема доказана.

Замечание 2. Вычисления по формулам (11) проводятся по столбцам, т. е. для фиксированного j последовательно вычисляются

$$s_{j-n_k-m_{k+1},\,j},\ s_{j-n_k-m_{k+1}+1,\,j},\ \ldots,\ s_{j,\,j}.$$

Из формул (11) следует, что для вычисления элементов j-го столбца нужно знать вычисленные ранее элементы лишь в предыдущих нескольких столбцах, число которых не превышает

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}(n_{k-1}+m_k).$$

Если обозначить $M=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}(n_{k-1}+m_k)$, то количество элементов s_{ij}, хранимых для того, чтобы можно было вести счет по формулам (11), не превышает числа $\frac{(M+1)(M+2)}{2}$.

Так как $M\leqslant 2m-1$, где $m=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N} n_k$, то описанный здесь метод требует не более чем $2m^2+m$ ячеек памяти для хранения элементов матрицы S. Ясно, что для многих практических случаев это число явно завышено. Так, например, для квадратной области, в которой имеется m строк и в каждой строке по m точек, вместо $2m^2+m$ получается

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}=\frac{m^2+3m+2}{2}.$$

При вычислении $P(\mu_k)=\prod\limits_{i=1}^{n} s_{ii}^2$, из-за большого порядка матрица $A-\mu_k E$, может случиться, что для некоторого k величина $\prod\limits_{i=1}^{k} s_{ii}^2$ превзойдет наибольшее допустимое в машине число, или, не будучи равной нулю, превратится в машинный нуль. Во избежание этого, число $P(\mu_k)$ задается двумя числами p, q, расположенными в различных ячейках, где p — целое число (положительное или отрицательное), а q — некоторое стандартное число в режиме плавающей запятой, т. е.

$$P(\mu_k)=2^p q,\quad \frac{1}{2}\leqslant|q|<1.$$

Пусть известно, что в интервале (a, b) имеется единственный корень μ уравнения $P(\mu)=0$. Тогда методом деления пополам уточняем значение искомого корня до требуемой точности.

Может возникнуть опасение, что если μ_k близко к μ, то разложение матрицы $A-\mu_k E$ на произведение $S'S$ нельзя будет осуществить, так как матрица $A-\mu_k E$ почти вырожденная. Но достоинство метода заключается именно в том, что при μ_k, очень близких к μ, разложение практически устойчиво.

Приведем в качестве примера нахождение собственных значений задачи (5) в случае, когда R — прямоугольник со сторонами 1 и 3. Возьмем $h=0{,}1$ и краевое условие (3). Тогда порядок матрицы A равен 300, а ее собственные значения выражаются формулой

$$\mu_{pq}=4\left(1-\frac{1}{2}\left(\cos p\pi h+\cos\frac{q\pi h}{3}\right)\right),\tag{14}$$

$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ 9,$$
$$q=0,\ 1,\ \ldots,\ 29.$$

По вышеописанному методу на машине БЭСМ-4 получилось:
при $p=0$, $q=1$ (второе собственное значение)

$$\mu_{01}=0{,}0109562092,$$

при $p=3$, $q=17$ (119-ое собственное значение)

$$\mu_{3,17}=3{,}24025287.$$

Эти результаты вплоть до последнего знака совпадают с точными значениями, вычисленными по формуле (14).

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
22.II.1971

Литература

1. Alvin Wexler, Computation of electromagnetic fields, IEEE transactions on microwave theory and techniques, 8 (1969), 416–439.
2. И. Н. Ляшенко, Задачи на собственные значения для уравнений второго порядка в частных конечных разностях, Киев, Изд. КГУ, 1970.
3. Б. Кведарас, Д. Левинскайте, М. Сапаговас, Д. Сапаговене, Нахождение частот собственных колебаний мембраны на ЭЦВМ, Лит. матем. сб., VI, 4 (1966), 627–628 (информация).
4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Москва, Физматгиз, 1960.
5. G. Petters, J. H. Wilkinson, Eigenvalues of $Ax=\lambda Bx$ with band symmetric A and B, The Computer Journal, 12, No 4 (1969), 398–404.
6. В. Вазов, Дж. Форсайт, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, Москва, Изд. ИЛ, 1963.

LAPLASO OPERATORIAUS NUOSAVŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMO KLAUSIMU

D. Sapagovienė

Reziumė)

Šiame straipsnyje yra išdėstytas metodas Laplaso operatoriaus su Dirichle arba Neumano homogenine kraštine sąlyga vienkartsusijusioje srityje, susidedančioje iš stačiakampių, nuosavoms reikšmėms rasti. Metodas pagrįstas simetrinės matricos išskaidymu į dviejų trikampių matricų sandaugą.

ON CALCULATION OF LAPLACE'S OPERATOR EIGENVALUES

D. Sapagovienė

(*Summary*)

The method for calculation of Laplace's operator eigenvalues in the region, consisting of rectangulars, with homogeneous Dirichlet and Neumann boundary conditions is discussed. The method is based on triangular decomposition of symmetric matrix.