XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1971

УДК 518.9

КОАЛИЦИОННАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ТРЕХ ЛИЦ

С. Л. Скерус, И. П. Ячяускас

§1. Постановка задачи и основные определения

Рассматривается следующая дифференциальная игра трех лиц*).

В начальный момент времени $t=0$ частица m (геометрическая точка) находится на плоскости внутри круга $x^2+y^2 \leqslant 1$ в точке $(x_0 y_0)$. Затем точка перемещается под влиянием скоростей, приложенных к ней игроками I_1, I_2, I_3. Игрок I_j $(j=1, 2, 3)$ прилагает скорость постоянного модуля ω_j и в каждый момент времени может менять направление своего вектора скорости. Таким образом, движение этой точки описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}=\omega_1 \sin \varphi_1+\omega_2 \sin \varphi_2+\omega_3 \sin \varphi_3,$$

$$\dot{y}=\omega_1 \cos \varphi_1+\omega_2 \cos \varphi_2+\omega_3 \cos \varphi_3$$

при начальных условиях

$$x(0)=x_0, \qquad y(0)=y_0,$$

где φ_j $(j=1, 2, 3)$ – управление j-го игрока и

$$-\pi \leqslant \varphi_j \leqslant \pi.$$

В ситуации $\varphi(x, y)=\left(\varphi_1(x, y), \ \varphi_2(x, y), \ \varphi_3(x, y)\right)$ при начальных условиях (x_0, y_0), функция выигрыша $R_j\left(x_0, y_0, \varphi(x, y)\right)$ j-го игрока определяется следующим образом. Пусть $\left(x(t), \ y(t)\right)$ – траектория точки m при начальных условиях (x_0, y_0) в ситуации φ и

$$t_B=\arg\left\{\min_t\left[\left(x(t), \ y(t)\right) \in B\right]\right\},$$

где B – окружность $x^2+y^2=1$. Тогда

$$R_j(x_0, y_0, \varphi)=h_j\left(x(t_B), \ y(t_B)\right)-t_B, \qquad j=1, 2, 3,$$

---

*) Задача поставлена Л. А. Петросяном.

где

$$h_1(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geqslant 0 \ \text{и} \ y \geqslant -\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{в остальных точках плоскости}, \end{cases}$$

$$h_2(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \leqslant -\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{в остальных точках плоскости}, \end{cases}$$

$$h_3(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \leqslant 0 \ \text{и} \ y \geqslant -\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{в остальных точках плоскости}. \end{cases}$$

В частности, если $t_B = \infty$, то $R_j = -\infty$, $j = 1, 2, 3$.

Сформулированную бескоалиционную игру с полной информацией обозначим через $\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle$. Неантагонистическую игру двух лиц (коалиции $\{i, j\}$ и k-го игрока), в которой множество стратегий и функция выигрыша игрока I_k остаются теми же, что и в игре $\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle$, игроки I_i и I_j могут координировать свои действия и выигрыш коалиции $\{i, j\}$ определяется как сумма выигрышей i-го и j-го игроков, обозначим через $\Gamma\langle \overline{i, j}\, k\rangle$. Игру одного лица (коалиции $\{1, 2, 3\}$) обозначим через $\Gamma\langle \overline{1, 2, 3}\rangle$. Множество всех вышеупомянутых игр обозначим через $\{\Gamma\}$, т. е.

$$\{\Gamma\} = \{\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle, \ \Gamma\langle \overline{1, 2}, 3\rangle, \ \Gamma\langle \overline{1, 3}, 2\rangle, \ \Gamma\langle 1, \overline{2, 3}\rangle, \ \Gamma\langle \overline{1, 2, 3}\rangle\}.$$

Коалиционную игру, когда игроки могут вступать в коалиции один раз в начале игры, обозначим через Γ_0. Для того, чтобы найти решение Неймана — Моргенштерна, надо определить характеристическую функцию $v(S)$ для всех $S \subset \{1, 2, 3\} = N$. Характеристическая функция $v(S)$, конечно, зависит от начальных условий (x_0, y_0), но для краткости, параметры при записи $v(S)$ будем пропускать.

Замечание. Обычно при вычислении характеристической функции игра n лиц с ненулевой суммой превращается в игру с нулевой суммой $n+1$ лица путем введения фиктивного игрока. „Этот игрок не должен иметь никакого прямого влияния на ход игры", — пишут авторы в [1] (стр. 512), но фиктивный игрок существенно влияет на исход игры через характеристическую функцию. Поэтому, на наш взгляд, характеристическая функция должна быть вычислена из других соображений.

Определяем характеристическую функцию следующим образом:

$$v(\varnothing) = 0,$$

$$v(N) = \max_{\varphi} \sum_{j=1}^{3} R_j(x_0, y_0, \varphi),$$

$$v(\{i, j\}) = R_i(\bar{\varphi}) + R_j(\bar{\varphi}), \qquad i, j \in N, \qquad i \neq j,$$

где $\bar{\varphi}$ — некоторая ситуация равновесия (с.р.) в игре $\Gamma\langle \overline{i, j}, k\rangle$.

$$v(\{i\}) = \min\,[R_i(\varphi^*), \quad R_i(\tilde{\varphi})],$$

где φ^* — с.р. в игре $\Gamma\langle i, j, k\rangle$, а $\tilde{\varphi}$ — с.р. в игре $\Gamma\langle i, \overline{j, k}\rangle$, $i = 1, 2, 3$.

В случае неединственности с.р. в вышеупомянутых играх мы выбираем единственные $\bar{\varphi}$, φ^*, $\tilde{\varphi}$ по методу доминирования риска [2] или [3].

Для вычисления с.р. в играх $\Gamma\langle 1,2,3\rangle$, $\Gamma\langle \overline{i,j},k\rangle$ воспользуемся методом Р. Айзекса (решения в малом). Чтобы показать применимость этого метода, рассмотрим бескоалиционные дифференциальные игры n лиц.

§2. Бескоалиционные дифференциальные игры n лиц

Пусть E^m — m-мерное пространство и $x=(x_1,\ldots,x_m)$ — точка этого пространства, движение которой описывается векторным уравнением

$$\dot{x}=f(x,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n), \qquad (1)$$

где $\varphi_j\,(j=1,2,\ldots,n)$ — управляющие параметры, причем для каждого $x\in A\subset E^m$ φ_j есть точка некоторого многообразия Q_j размерности $q_j\leqslant m$ и функции $f_i\,(i=1,\ldots,m)$ непрерывные с непрерывными частными производными. Обычно многообразия Q_j задаются неравенствами

$$a_j^i(x)\leqslant\varphi_j^i\leqslant b_j^i(x),\qquad j=1,\ldots,n;\quad i=1,\ldots,q_j,$$

где $a_j^i(x)$ и $b_j^i(x)$ — заданные функции.

Кроме того, требуется, чтобы при любых $\varphi_j\in Q_j$ векторное уравнение (1 имело единственное решение при любых начальных условиях $x_0\in A\subset E^m$.

В пространстве E^m дано μ-мерное многообразие $B\subset A$. На многообразии B задано n функций $h_1,\ldots,h_n$.

Для нас бескоалиционной дифференциальной игрой n лиц будет множество из n игроков, с каждым из которых связано множество чистых стратегий Q_j и функция выигрыша R_j, являющаяся отображением всех n-членных последовательностей чистых стратегий в множество вещественных чисел. Эту последовательность чистых стратегий будем называть ситуацией.

В ситуации $\varphi=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$, $\varphi_j\in Q_j$, при начальном условии x_0 функция выигрыша $R_j(x_0,\ \varphi)$ j-го игрока определяется следующим образом:

$$\int g_j(x,\varphi)\,dt+h_j, \qquad (2)$$

где g_j — заданная непрерывная функция, обладающая непрерывными частными производными. Интеграл берется вдоль траектории, которую x проходит в A на протяжении партии; нижний предел интегрирования соответствует начальной точке x_0; верхний предел есть время окончания партии, когда x впервые достигает B. Второе слагаемое есть значение функции h_j в терминальной точке, т.е. в точке, где x встречается с B и партия оканчивается.

Игру с выигрышем (2) можно преобразовать в эквивалентную игру с выигрышем на терминальной поверхности (см. [4], стр. 51). Кроме того, игру с терминальным выигрышем можно преобразовать в эквивалентную игру, в которой ограничения на управления являются постоянными (см. [4], стр. 63).

Такую игру при начальном условии $x_0\in A$ обозначим через $\Gamma(x_0.)$

Определение 1. Ситуация $\bar{\varphi}=\{\bar{\varphi}_1,\ldots,\bar{\varphi}_n\}$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу* в игре $\Gamma(x_0)$, если для всех $\varphi_j\in Q_j$, $j=1,2,\ldots,n$, выполняются следующие неравенства:

$$R_j(x_0,\ \bar{\varphi})\geqslant R_j(x_0,\ \bar{\varphi}\,\|\,\varphi_j).$$

Определение 2. Пусть вектор выигрышей в ситуации $\bar{\varphi}$ является $R(x)=\{R_1(x), \ldots, R_n(x)\}$ и все игроки, кроме j-го ($j=1, \ldots, n$), применяют K-стратегии с тактиками φ_j (см. [4], стр. 57). Ситуация $\bar{\varphi}$ называется *ситуацией равновесия в смысле K-стратегий*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такая K-стратегия j-го игрока с тактикой $\bar{\varphi}_j$, что его выигрыш находится в интервале $[R_j(x)-\varepsilon,\ R_j(x)+\varepsilon]$ и для любых K-стратегий j-ого игрока его выигрыш будет не больше чем $R_j(x)+\varepsilon$.

Укажем необходимые и некоторые достаточные условия для ситуации равновесия.

Теорема 1 (необходимые условия). *Пусть $\bar{\varphi}$ — ситуация равновесия по Нэшу и $R(x)$ — вектор выигрышей в этой ситуации. Если $R_j(x)$ и частные производные $\frac{\partial R_j}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$, непрерывны, то функции $R_j(x)$ удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных первого порядка*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R_j}{\partial x_i} f_i(x, \bar{\varphi})+g_j(x, \bar{\varphi})=0 \tag{3}$$

при граничных условиях

$$R_j(x)|_B=h_j. \tag{4}$$

Теорема 2 (достаточные условия). *Пусть A' — подобласть области A, имеющая своей границей B'. Кроме того, если все игроки придерживаются любых K-стратегий, то пусть траектория, начинающаяся в любой точке $x \in A'$, все время остается в области A', пока не достигнет $B' \cap B$. Пусть вектор-функция $R(x)$, определенная на B', обладает следующими свойствами:*

1) *$R(x)$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\max_{\varphi_j \in Q_j}\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R_j}{\partial x_i} f_i(x, \bar{\varphi} \| \varphi_j)+g_j(x, \bar{\varphi} \| \varphi_j)\right]=0, \qquad j=1,2, \ldots, n, \tag{5}$$

при граничных условиях

$$R_j(x)|_{B' \cap B}=h_j, \qquad j=1,2, \ldots, n,$$

где $\bar{\varphi}_j(x)$ — фиксированные функции, доставляющие максимум в выражениях (5):

2) *функции $R_j(x)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные;*

3) *$R(x)$ является единственной функцией, обладающей свойствами* 1), 2) *при фиксированных $\bar{\varphi}_j$.*

Тогда $\bar{\varphi}$ является ситуацией равновесия в смысле K-стратегий, а $R_j(x)$ — выигрышами в этой ситуации.

Эти теоремы являются аналогом основного уравнения и теоремы 4.4.1 Р. Айзекса [4] и доказательства их также аналогичны.

Таким образом, всю технику решения антагонистических дифференциальных игр можно применять для нахождения точек равновесия бескоалиционных дифференциальных игр.

§3. Вычисление характеристической функции

По определению

$$v(N)=\max_{\varphi}\sum_{j=1}^{3}R_j(\varphi)=\max_{\varphi}\left(\sum_{j=1}^{3}h_j-3t_B\right).$$

Так как h_j не зависят от времени достижения контура, а t_B минимизируется при складывании модулей скоростей всех игроков, то

$$v(N)=\max\begin{cases} A_1: & 2-\dfrac{3\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\omega_1+\omega_2+\omega_3}\,; \\[2ex] A_2: & 2-\dfrac{3\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}}{\omega_1+\omega_2+\omega_3}\,; \\[2ex] A_3: & 2-\dfrac{3\sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}}{\omega_1+\omega_2+\omega_3}\,; \\[2ex] A_4: & 1-\dfrac{3\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\omega_1+\omega_2+\omega_3}\,; \end{cases} \tag{6}$$

где A_1, A_2 и A_3 — множества начал траекторий, заканчивающихся соответственно в точках $(0,\,1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\,-\frac{1}{2}\right)$, а A_4 — множество начал траекторий, заканчивающихся в точках непрерывности функций h_i.

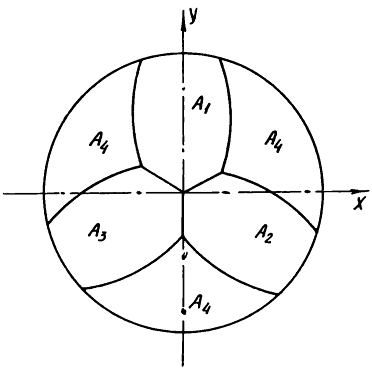

Рис. 1

Попарно сравнивая выражения, из (6) получаем области максимума. Эти области показаны на рис. 1. Сингулярные кривые, разделяющие области A_1, A_2, A_3 между собой, являются отрезками прямых, а кривые, разделяющие эти области от A_4, являются кусками эллипсов с центрами в точках

$$\left(0,\,\frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{4},\,-\frac{1}{4}\right),\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\,-\frac{1}{4}\right).$$

Например, границей между A_1 и A_4 служат куски эллипса

$$\frac{36x^2}{c^2+6c}+\frac{36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{c^2+6c+9}=1,$$

где $c=\omega_1+\omega_2+\omega_3$.

Интересно отметить, что области A_4 сужаются при увеличении c и исчезают при $c\geqslant 3$ (считая $r=1$).

Для вычисления других значений характеристической функции необходимо найти все недоминируемые с.р. в играх $\Gamma\langle\overline{i,j},k\rangle$ и $\Gamma\langle i,j,k\rangle$.

В качестве примера найдем $v(\{1, 2\})$. Для этой цели нужно найти все недоминируемые с.р. в игре $\Gamma\langle\overline{1,2},3\rangle$.

В коалиции $\{1, 2\}$ игроки I_1 и I_2 координируют свои действия и, очевидно, при оптимальном поведении модули скоростей складываются. Тогда уравнения движения точки m примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(\omega_1+\omega_2)\sin\varphi_{12}+\omega_3\sin\varphi_3,\\ \dot{y}&=(\omega_1+\omega_2)\cos\varphi_{12}+\omega_3\cos\varphi_3,\end{aligned}\tag{7}$$

а основная система (5) из §2 — такой вид:

$$\begin{aligned}&\max_{\varphi_{12}}\{R_{12x}[(\omega_1+\omega_2)\sin\varphi_{12}+\omega_3\sin\bar{\varphi}_3]+\\ &+R_{12y}[(\omega_1+\omega_2)\cos\varphi_{12}+\omega_3\cos\bar{\varphi}_3]\}=2,\\ &\max_{\varphi_3}\{R_{3x}[(\omega_1+\omega_2)\sin\bar{\varphi}_{12}+\omega_3\sin\varphi_3]+\\ &+R_{3y}[(\omega_1+\omega_2)\cos\bar{\varphi}_{12}+\omega_3\cos\varphi_3]\}=1,\end{aligned}\tag{8}$$

где R_{12}, R_3, φ_{12}, φ_3 — выигрыши и стратегии коалиции $\{1, 2\}$ и I_3, соответственно, а R_{12x}, R_{12y}, R_{3x}, R_{3y} — соответствующие частные производные.

Из (8) получаем выражения равновесных стратегий

$$\begin{aligned}&\sin\bar{\varphi}_{12}=\frac{R_{12x}}{\sqrt{R_{12x}^2+R_{12y}^2}}, &&\cos\bar{\varphi}_{12}=\frac{R_{12y}}{\sqrt{R_{12x}^2+R_{12y}^2}},\\ &\sin\bar{\varphi}_3=\frac{R_{3x}}{\sqrt{R_{3x}^2+R_{3y}}}, &&\cos\bar{\varphi}_3=\frac{R_{3y}}{\sqrt{R_{3x}^2+R_{3y}^2}}.\end{aligned}\tag{9}$$

Подставляя полученные стратегии в (8), получаем

$$\begin{aligned}&R_{12x}\left[(\omega_1+\omega_2)\frac{R_{12x}}{\sqrt{R_{12x}^2+R_{12y}^2}}+\omega_3\frac{R_{3x}}{\sqrt{R_{3x}^2+R_{3y}^2}}\right]+\\ &+R_{12y}\left[(\omega_1+\omega_2)\frac{R_{12y}}{\sqrt{R_{12x}^2+R_{12y}^2}}+\omega_3\frac{R_{3y}}{\sqrt{R_{3x}^2+R_{3y}^2}}\right]=2,\\ &R_{3x}\left[(\omega_1+\omega_2)\frac{R_{12x}}{\sqrt{R_{12x}^2+R_{12y}^2}}+\omega_3\frac{R_{3x}}{\sqrt{R_{3x}^2+R_{3y}^2}}\right]+\\ &+R_{3y}\left[(\omega_1+\omega_2)\frac{R_{12y}}{\sqrt{R_{12x}^2+R_{12y}^2}}+\omega_3\frac{R_{3y}}{\sqrt{R_{3x}^2+R_{3y}^2}}=1.\right.\end{aligned}\tag{10}$$

Заменяя t на $-\tau$ и подставляя (9) в (7), получаем уравнения движения в регрессивной форме:

$$\overset{\circ}{x} = -(\omega_1+\omega_2)\,\frac{R_{12x}}{\sqrt{R^2_{12x}+R^2_{12y}}} - \omega_3\,\frac{R_{3x}}{\sqrt{R^2_{3x}+R^2_{3y}}}\,,$$

$$\overset{\circ}{y} = -(\omega_1+\omega_2)\,\frac{R_{12y}}{\sqrt{R^2_{12x}+R^2_{12y}}} - \omega_3\,\frac{R_{3y}}{\sqrt{R^2_{3x}+R^2_{3y}}}\,. \tag{11}$$

Дифференцируя (10) по x и y с учетом (11), находим уравнения характеристик в регрессивной форме:

$$\overset{\circ}{R}_{12x} = \overset{\circ}{R}_{12y} = \overset{\circ}{R}_{3x} = \overset{\circ}{R}_{3y} = 0. \tag{12}$$

Для решения системы (12) необходимо найти значения неизвестных функций на контуре B. Для этой цели контур, окружность $x^2+y^2=1$, параметризируем следующим образом:

$$x=p, \qquad y=\sqrt{1-p^2}\,.$$

Так как в тех точках контура, где все h_i непрерывны, функции R_{12} и R_3 постоянны, то

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial p} = \frac{\partial R_{12}}{\partial x} - \frac{\partial R_{12}}{\partial y}\,\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial p} = \frac{\partial R_3}{\partial x} - \frac{\partial R_3}{\partial y}\,\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} = 0. \tag{13}$$

Совместно решая (10) и (13), получаем

$$R_{12x}\Big|_B = \frac{2p}{c}\,, \qquad R_{3x}\Big|_B = \frac{p}{c}\,,$$

$$R_{12y}\Big|_B = \frac{2\sqrt{1-p^2}}{c}\,, \qquad R_{3y}\Big|_B = \frac{\sqrt{1-p^2}}{c}\,. \tag{14}$$

Интегрируя (12) при граничных условиях (14), находим значения R_{12x}, R_{12y}, R_{3x}, R_{3y} и, подставляя их в (9), получаем

$$\sin\bar\varphi_{12}=p, \qquad \sin\bar\varphi_3=p,$$

$$\cos\varphi_{12}=\sqrt{1-p^2}\,, \qquad \cos\bar\varphi_3=\sqrt{1-p^2}\,. \tag{15}$$

Таким образом, траектория в ситуации равновесия совпадает с радиусом круга, модули скоростей всех игроков складываются и при этом

$$R_{12}=(h_1+h_2)\Big|_B - \frac{2(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2})}{c}\,,$$

$$R_3=h_3\Big|_B - \frac{1-\sqrt{x^2+y_0^2}}{c}\,. \tag{16}$$

Полученная ситуация является с.р. только для тех точек круга, из которых игра $\Gamma\langle\bar{1}, 2, 3\rangle$ оканчивается на точках непрерывности функций h_i. Исследуем окрестность точки p_0, в которой функция h_3 имеет разрыв.

Пусть

$$h_3(p)=\begin{cases} 1, & \text{когда } p\leqslant p_0, \\ 0, & \text{когда } p>p_0. \end{cases}$$

Эту функцию аппроксимируем непрерывной функцией $\bar{h}_3$ следующим образом:

$$\bar{h}_3(p)=\begin{cases} \dfrac{p-a}{p_0-a}, & \text{когда} \quad p_0<p\leqslant a, \\ h_3(p); & \text{для остальных } p, \end{cases}$$

где a — некоторая точка окружности из окрестности p_0. Если $a\to p_0$, то $\bar{h}_3\to h_3$.

При такой аппроксимации второе уравнение из (13) становится следующим

$$\bar{R}_{3x}-\bar{R}_{3y}\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}=\frac{1}{p_0-a},$$

где $\bar{R}_3=\bar{h}_3-\bar{t}_B$. Кроме того, в уравнениях (10) R_3 заменяется функцией $\bar{R}_3$. Решая совместно новые системы (10), (13) и, переходя к пределу при $a\to p_0$, получаем

$$R_{12x}\Big|_B=\frac{2p_0}{\omega_1+\omega_2+p_0\,\omega_3},$$

$$R_{12y}\Big|_B=\frac{2\sqrt{1-p_0^2}}{\omega_1+\omega_2+p_0\,\omega_3}. \tag{17}$$

Интегрируя первые два уравнения (10) при граничных условиях (17), получаем значения R_{12x} и R_{12y} и, подставляя их в (9), имеем

$$\sin\bar{\varphi}_{12}=p_0, \qquad \cos\bar{\varphi}_{12}=\sqrt{1-p_0^2}. \tag{18}$$

К сожалению, при $a\to p_0$ не существует предела $\bar{R}_{3x}$ и $\bar{R}_{3y}$. Кроме того, если эти пределы и существовали бы, они должны не зависеть от аппроксимирующей функции, а так как эту независимость установить трудно, то найденные стратегии лучше всего проверить на равновесие другими способами.

Непосредственная проверка дает, что ситуация, в которой коалиция $\{12\}$ применяет стратегию типа (18), а третий игрок выбирает такое $\bar{\varphi}_3$, чтобы точка m двигалась в точку окружности $(p_0, \sqrt{1-p_0^2})$, является с.р. в некоторой области, примыкающей к радиусу, проходящему через точку $(p_0, \sqrt{1-p_0^2})$. Эту область находим из геометрии игры, и она определяется неравенствами

$$F:\begin{cases} 1-\dfrac{x}{z_1}\geqslant-\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{c}, \\ y-1\leqslant-\dfrac{\sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2-\omega_3^2}}{\omega_3}\,x, \\ x>0, \end{cases} \tag{19}$$

где x, y — координаты точки m в момент времени $t=0$,

$$z_1=\frac{k(\omega_1+\omega_2)-\sqrt{\omega_3^2k^2+\omega_3^2-(\omega_1+\omega_2)^2}}{k^2+1}, \qquad k=\frac{y-1}{x}.$$

Если $x=0$, то $t_B=\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{c}$.

Так как из точек области (19) игра может окончиться и на контуре, где h_j непрерывны, то в некоторой подобласти области (19) существует с.р. типа (15).

Определение. В бескоалиционной игре n лиц с.р. φ' будем называть *доминируемой*, если существует с.р. φ'' такая, что $R_j(\varphi'') \geqslant R_j(\varphi')$ для всех $j \in N$ и хотя бы для одного $j - R_j(\varphi'') > R_j(\varphi')$.

Непосредственная проверка дает, что в области, определяемой неравенствами (19) и неравенством

$$1 - \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(p_1+q_1)^2+(p_2+q_2)^2}} \geqslant -\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{c}, \tag{20}$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 — решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{y}{x}, \\ p_1^2+p_2^2=(\omega_1+\omega_2)^2, \\ q_1^2+q_2^2=\omega_3^2, \\ \dfrac{p_2+q_2}{p_1+q_1} = \dfrac{y-1}{x}, \end{cases}$$

существует не менее двух недоминируемых с.р., т.е. в этой области стратегии типа (15) и (18) являются равновесными.

Аналогично вычисляем с.р. игры $\Gamma\langle \overline{1,2},3\rangle$ в окрестностях точек разрывов функций h_1 и h_2 и все недоминируемые с.р. в играх $\Gamma\langle 1,\overline{2,3}\rangle$, $\Gamma\langle \overline{1,3},2\rangle$, $\Gamma\langle 1,2,3\rangle$ и таким образом получаем разбиение круга на области, для каждой из которых указываются все с.р. В областях, имеющих не менее двух с.р., и на сингулярных поверхностях (в нашем случае — на сингулярных кривых) определяем единственную с.р., как уже упоминалось, по методу доминирования риска, предложенному Харшаньи [2].

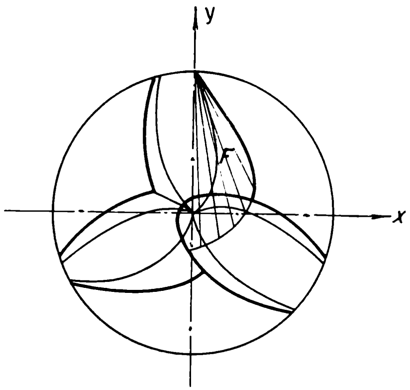

Рис. 2

Таким образом, для каждой игры $\Gamma \in \{\Gamma\}$ в каждой точке (x, y) определили единственную ситуацию равновесия $\varphi^*_{(x,y)}(\Gamma)$. Имея с.р. $\varphi^*(\Gamma)$, находим значения характеристической функции $v(S)$.

Множество тех точек круга, из которых игра Г при ситуации $\varphi^*(\Gamma)$ оканчивается в точках непрерывности функций h_i, обозначим через $Q(\Gamma)$; а множество точек круга, из которых игра Г оканчивается в точке разрыва хоть одной функции h_i, — через $G(\Gamma)$.

Пусть D — множество тех точек круга, из которых выходящие траектории всех игр из $\{\Gamma\}$, при вышеупомянутых с.р. совпадают. Очевидно, что

$$D = Q \cup G, \tag{21}$$

где $Q = \bigcap\limits_{\Gamma\in\{\Gamma\}} Q(\Gamma)$ и $G = \bigcap\limits_{\Gamma\in\{\Gamma\}} G(\Gamma)$. Используя формулу (21), легко установить, что множество D не пусто.

Теорема 3. *Характеристическая функция в множестве D супераддитивна.*

Доказательство. Время, через которое игра Г оканчивается при ситуации $\varphi^*(\Gamma)$, обозначим через $t(\Gamma)$. Тогда

$$v(N) = (h_1 + h_2 + h_3)|_B - 3t(\Gamma\langle\overline{1, 2, 3}\rangle), \tag{22}$$

$$v(\{i, j\}) = (h_i + h_j)|_B - 2t(\Gamma\langle\overline{i, j}, k\rangle), \tag{23}$$

$$v(\{k\}) = \min\,[h_k|_B - t(\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle,\quad h_k|_B - t(\Gamma\langle\overline{i, j}, k\rangle)] =$$

$$= h_k|_B - \max\,[t(\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle),\quad t(\Gamma\langle\overline{i, j}, k\rangle)]. \tag{24}$$

Так как в игре $\Gamma\langle\overline{1, 2, 3}\rangle$ модули скоростей всех игроков складываются, а в остальных играх этого может и не быть, то

$$t(\Gamma\langle\overline{1, 2, 3}\rangle| \leqslant t(\Gamma\langle\overline{i, j}, k\rangle),$$

$$t(\Gamma\langle\overline{1, 2, 3}\rangle) \leqslant t(\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle).$$

В множестве D во всех играх траектории из фиксированной точки (x, y) оканчиваются в одной точке контура B, поэтому из (22)-(24) получаем

$$v(N) \geqslant v(\{i, j\}) + v(\{k\}), \qquad i, j, k\in N, \quad i\neq j\neq k\neq i.$$

Из (24) имеем, что

$$v(\{i\}) + v(\{j\}) \leqslant (h_i + h_j)|_B - 2t(\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle),$$

поэтому для доказательства неравенства

$$v(\{i, j\}) \geqslant v(\{i\}) + v(\{j\}), \qquad i, j\in N, \quad i\neq j,$$

достаточно доказать, что $t(\Gamma\langle\overline{i, j}, k\rangle) \leqslant t(\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle)$.

Так как в множестве Q во всех играх модули скоростей всех игроков складываются, то $t(\Gamma\langle\overline{i, j}, k\rangle) = t(\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle)$. В множестве G в игре $\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle$ один игрок заинтересован достичь точки разрыва своей функции h_l, а другие два выбирают стратегии, аналогичные (18). Если этот игрок является k-ым, то

$$t(\Gamma\langle\overline{i, j}, k\rangle) = t(\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle),$$

в противном случае (этот игрок не является k-ым) в игре $\Gamma\langle\overline{i, j}, k\rangle$ коалиция $\{i, j\}$ (т.е. два игрока) заинтересована достичь точки разрыва функции h_l, поэтому $t(\Gamma\langle\overline{i, j}, k\rangle) \leqslant t(\Gamma\langle 1, 2, 3\rangle)$. Теорема доказана.

Уместно заметить такое свойство $v(S)$: при малых ω_i имеем

$$v(N) \leqslant v(S)$$

и вообще $v(S) \leqslant v(T)$, когда $T \subset S \subset N$. Это следует из того, что игроки и при оптимальном поведении получают отрицательные выигрыши.

§4. Решение

Из определения $v(S)$, $S \subset N$ следует, что в множестве Q кооперативная игра $\langle N, v(S) \rangle$, а вместе с ней и Γ_0, несущественна, а ее решением является единственный дележ

$$\alpha = \Big(v(\{1\}),\ v(\{2\}),\ v(\{3\})\Big) = (h_1 - t_B,\ h_2 - t_B,\ h_3 - t_B).$$

Теорема 4. *В множестве D игра Γ_0 имеет единственное решение, совпадающее с С-ядром.*

Доказательство. По теоремам 1 и 3 из [5] выполнение неравенств

$$v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) + v(\{2, 3\}) \leqslant 2v(N),$$
$$v(\{i, j\}) + v(\{i, k\}) - v(\{i\}) \leqslant v(N), \qquad i, j, k \in N, \quad i \neq j \neq k \neq i,$$

является необходимым и достаточным условием существования непустого C-ядра, совпадающего с решением. Непосредственная проверка выполнения этих неравенств доказывает теорему.

Базисные решения системы

$$\begin{cases} \alpha_i \geqslant v(\{i\}), & i = 1, 2, 3, \\ \alpha_1 + \alpha_j \geqslant v(\{i, j\}), & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v(N) \end{cases} \tag{25}$$

опишут множество дележей, являющихся решением. Имея в виду теорему 4.1 из [6], при решении системы (25) не менее одного из первых трех неравенств можно считать как уравнение.

Таким образом, решение довольно просто вычисляется.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
2.III.1971

Литература

1. Дж. фон Нейман, О Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, „Наука", М., 1970.
2. J. C. Harsanyi, A general solution for finite non-cooperative games, based on risk-dominance, Advances in game theory, Wiley, Princeton, 1964, 651–679.
3. Э. Й. Вилкас, Оптимальность в бескоалиционных играх. Обзор подходов, Лит. матем. сб., X, 3(1970), 463–470.
4. Р. Айзекс, Дифференциальные игры, „Мир", М., 1967.
5. О. Н. Бондарева, О единственности решения в $(n-1)$-играх, Кибернетика, № 4 (1969), 118–121.
6. О. Н. Бондарева, Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр, Проблемы кибернетики, **10**, М., 1963, 119–139.
7. Л. А. Петросян, Н. В. Мурзов, Игра на перетягивание со многими участниками, Вестник ЛГУ, **3**, № 13 (1967), 125–129.

KOALICINIS DIFERENCIALINIS TRIJŲ ASMENŲ LOŠIMAS

. Skėrus, I. Jačiauskis

Reziumė)

Koalicinis diferencialinis trijų asmenų lošimas suvedamas į kooperatinį lošimą, kurio charakteringosios funkcijos reikšmės prilyginamos nekoalicinių diferencialinių lošimų išlošimams tam tikrose pusiausvyros situacijose. Įrodoma, kad gautam kooperatiniam lošimui egzistuoja vienintelis sutampantis su branduoliu Neimano – Morgenšterno sprendinys.

COALITIONAL DIFFERENTIAL THREE-PERSON GAME

S. Skėrus, J, Jačiauskas

(*Summary*)

The coalitional differential three-person game is reduced to a cooperative game in a characteristic function form. The charakteristic function values are set to the pay-offs in equilibrium points of non-cooperative diffrential games. Existence of unique Neumann-Morgenstern solution coinciding with the core has been proved.