X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1971

УДК 517.537

О ДВОЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЦЕЛЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Л. И. Трушина

В настоящей работе изучаются целые и мероморфные решения $f(z)$ двойной неоднородной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{L}\,[f(z)] \equiv \sum\limits_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k) = g(z), \; a_1=1, \; a_m \neq 0, \; \alpha_1 = 0, \\ \mathbf{M}\,[f(z)] \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} b_i f(z+\beta_i) = h(z), \; b_1 = 1, \; b_n \neq 0, \; \beta_1 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где a_k, α_k и b_i β_i, $k=1, 2, \ldots, m$; $i=1, 2, \ldots, n$ — заданные комплексные числа, а $g(z)$ и $h(z)$ — заданные целые функции. Мы предполагаем, что

$$\alpha_k = t_k \alpha, \; \beta_i = \tau_i \beta,$$

где

$$\begin{gathered} 0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_m = 1, \\ 0 = \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n = 1 \end{gathered} \tag{2}$$

и

$$\operatorname{Im}(\alpha : \beta) \neq 0.$$

Таким образом, все точки α_k лежат на отрезке, соединяющем точки $z=0$ и $z=\alpha$, а все точки β_i — на отрезке (неколлинеарном с первым), соединяющем точки $z=0$ и $z=\beta$.

Неоднородная система (1), в случае когда $g(z)$ и $h(z)$ — целые функции экспоненциального типа, изучалась в нашей работе [2].

Действуя на первое из этих уравнений оператором $\mathbf{M}$, а на второе оператором $\mathbf{L}$, мы приходим к необходимому условию совместности системы (1)

$$\mathbf{L}\,[h(z)] \equiv \mathbf{M}\,[g(z)].$$

В работе показано, что этого условия и достаточно для существования мероморфных решений системы (1). Кроме того, в работе изучаются полюсы и главные части этих мероморфных решений и целые решения системы (1).

Условимся еще здесь о следующем: разностные операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$, шаги которых $\alpha_1=0$, α_2, $\ldots$, α_m и $\beta_1=0$, β_2, $\ldots$, β_n, удовлетворяют указанному выше условию (2), назовем *различно направленными*.

1. Рассмотрим многочлен Дирихле

$$P(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\gamma_k t}, \qquad C_n\neq 0, \qquad \gamma_1=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

с произвольными комплексными коэффициентами c_k и показателями γ_k, имеющими одни и те же аргументы: $\arg\gamma_k=\varphi$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и расположенные в порядке возрастания модулей:

$$|\gamma_1|<|\gamma_2|< \cdots <|\gamma_n|.$$

Пусть $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ — произвольно зафиксированное число и U — область, образованная парой вертикальных углов

$$|\arg(ze^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)})|<\delta \text{ и } |\arg(ze^{-i\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)})|<\delta$$

(эти углы раствора 2δ с вершиной в начале координат и их биссектриса перпендикулярна векторам $\bar{\gamma}_k$).

Дополнение к области U состоит из двух вертикальных углов V_1 и V_2. При этом через V_1 мы обозначим угол, в котором лежат векторы

$$\bar{\gamma}_k,\ k=2,\ 3,\ \ldots$$

Очевидно, что

$$\lim_{\substack{t\to\infty,\\ t\in V_2}} P(t)=c_1.$$

Представив многочлен $P(t)$ в виде

$$P(t)=e^{\gamma_n t}[c_n+c_{n-1}e^{(\gamma_{n-1}-\gamma_n)t}+ \cdots +c_1e^{(\gamma_1-\gamma_n)t}],$$

убедимся, что

$$\lim_{\substack{t\to\infty,\\ t\in V_1}} P(t)=\infty.$$

Отсюда следует, что существуют такие постоянные $C>0$ $\left(\text{например } C=\frac{|c_1|}{2}\right)$ и R_0, что при $|t|>R_0$ вне области U и на ее границе выполнено неравенство

$$|P(t)|\geqslant C.$$

Из этого неравенства следует, что только конечное число нулей многочлена $P(t)$ может лежать вне области U.

2. Обратимся теперь к неоднородной двойной системе (1).

Эту систему можно рассматривать как систему двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка

$$\begin{cases} L(D)f(z)=g(z), \\ M(D)f(z)=h(z) \end{cases} \tag{3}$$

с характеристическими функциями

$$L(t)=\sum_{k=1}^{m} a_k e^{\alpha_k t}, \qquad M(t)=\sum_{i=1}^{n} b_i e^{\beta_i t}. \tag{4}$$

Так как разностные операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ различно направлены, то из сказанного в первом пункте легко заключаем, что система (3) регулярная (понятие регулярности см. в [3]) и, кроме того, пара функций $L(t)$ и $M(t)$ может иметь только конечное число общих нулей.

Таким образом общий делитель $K(t)$ пары $\big(L(t),\ M(t)\big)$ является алгебраическим многочленом. Если общие нули отсутствуют, то положим $K(t)\equiv 1$.

Из доказанных в работе [3] двух теорем непосредственно следует теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{M}$ *— пара различно направленных разностных операторов с характеристическими функциями* $L(t)$ *и* $M(t)$ *и* $K(t)$ *— общий делитель этой пары* $\big(L(t),\ M(t)\big)$.

Для того, чтобы двойная система (1) *с целыми правыми частями* $g(z)$ *и* $h(z)$ *имела хотя бы одно целое решение* $F_0(z)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнилось тождество*

$$L_1(D)\,h(z)\equiv M_1(D)\,g(z), \tag{5}$$

где $L_1(D)$ *и* $M_1(D)$ *— дифференциальные операторы бесконечного порядка с характеристическими функциями*

$$L_1(t)=\frac{L(t)}{K(t)}, \qquad M_1(t)=\frac{M(t)}{K(t)}.$$

Если это условие выполнено, то система (1) *имеет целое решение* $F_0(z)$, *рост которого равен росту пары* $\big(g(z),\ h(z)\big)$, *и общее целое решение системы* (1) *имеет вид* $f(z)=F_0(z)+F_1(z)$, *где* $F_1(z)$ *— любое целое решение дифференциального уравнения конечного порядка* $K(D)f(z)=0$.

Если рост пары $\big(g(z),\ h(z)\big)$ *не меньше роста* $(1,\ \infty)$, *то рост любого целого решения* $f(z)$ *системы* (1) *равен росту пары* $\big(g(z),\ h(z)\big)$. *Если же рост пары* $\big(g(z),\ h(z)\big)$ *меньше* $(1,\ \infty)$, *то и рост любого целого решения системы* (1) *также меньше* $(1,\ \infty)$.

Замечание. Если выполнены все условия теоремы и $K(t)=1$, то условие (5) сводится к условию совместности

$$L[h(z)]\equiv M[g(z)]$$

и система (3) имеет единственное целое решение.

3. В заключение рассмотрим мероморфные решения системы (1), правые части которой произвольные целые функции. В этом общем случае мероморфные решения строятся точно так же, как они строились в работе [2] для частного случая, когда правые части — целые функции экспоненциального типа.

Все полученные там результаты о мероморфных решениях системы (1) пригодны и в общем случае. Мы не станем приводить всех этих результатов, а приведем здесь только одну теорему. Но прежде условимся через $H(z)$ обозначать H-функцию, введенную в работе [1].

Теорема 2. *Пусть L и M — пара различно направленных разностных операторов. Для того, чтобы двойная система* (1) *с целыми правыми частями $g(z)$ и $h(z)$ имела мероморфное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество*

$$L[h(z)] \equiv M[g(z)].$$

Если это условие выполнено, то любое мероморфное решение системы (1) *представляется в виде*

$$f(z) = f_0(z) + R(D)H(z),$$

где

$$R(D) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} c_{kl} D^l e^{\gamma_k D} -$$

некоторый дифференциально-разностный оператор с постоянными коэффициентами (c_{kl} и γ_k — комплексные числа) и $f_0(z)$ — целая функция, рост которой равен росту пары $\left(g(z),\ h(z)\right)$ в случае, когда рост этой пары не меньше $(1, \infty)$. *Если же рост пары $\left(g(z),\ h(z)\right)$ меньше* $(1, \infty)$, *то и рост функции $f_0(z)$ меньше* $(1, \infty)$.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 29.X.1970

Литература

1. А. Г. Нафталевич, Обобщение одной теоремы Эрмита, Лит. матем. сб., V, 4(1965) 605—636.
2. Л. И. Трушина, О двойной неоднородной системе разностных уравнений, Лит. матем. сб., XI, 2 (1971), 383—395.
3. Л. И. Трушина, О двойной неоднородной системе дифференциальных уравнений бесконечного порядка, Лит. матем., сб., XI, 3(1971), 691—703.

DVILYPĖS NEHOMOGENINĖS SKIRTUMINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SU SVEIKAIS LAISVAIS NARIAIS KLAUSIMU

L. Trušina

Reziumė)

Darbe nagrinėjama dvilypės skirtuminių lygčių sistemos

$$L[f(z)] = \sum_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k) = g(z),\ a_1 = 1,\ a_m \neq 0,\ \alpha_1 = 0,$$

$$M[f(z)] = \sum_{i=1}^{n} b_i f(z+\beta_i) = h(z),\ b_1 = 1,\ b_n \neq 0,\ \beta_1 = 0,$$

meromorfiniai ir sveiki sprendiniai $f(z)$. Tarkime, kad

$$a_k,\ \alpha_k \text{ ir } b_i,\ \beta_i,\ k = 1, 2, \ldots, m; \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

yra kompleksiniai skaičiai ir $g(z)$, $h(z)$ — bet kurios sveikos funkcijos.

Tą atvejį, kai $g(z)$ ir $h(z)$ yra sveikos eksponencialinio tipo funkcijos, anksčiau nagrinėjome [1] darbe.

ÜBER ZWEIFACHE INHOMOGENE SYSTEME VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT GANZEN FREIEN GLIEDERN

L. Truschina

(*Zusammenfassung*)

In dieser Arbeit untersuchen wir die ganzen und meromorphen Lösungen $f(z)$ des zweifachen, Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} L[f(z)] \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k) = g(z), \; a_1 = 1, \; a_m \neq 0, \; \alpha_1 = 0, \\ M[f(z)] \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i f(z+\beta_i) = h(z), \; b_1 = 1. \; b_n \neq 0, \; \beta_1 = 0, \end{cases}$$

wo a_k, α_k und b_i, β_i, $\quad k=1, 2, \ldots, m; \quad i=1, 2, \ldots, n,$

komplexe Zahlen und $g(z)$, $h(z)$ – beliebige ganze Funktionen bedeuten.

Den Fall, wenn die ganze Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ vom Exponentialtypus sind, haben wir schon früher in der Arbeit [1] untersucht.