XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1971

УДК 519.21

ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В МНОГОМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Г. Ясюнас

1. Пусть $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ – векторы евклидова пространства R^k; $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ – их скалярное произведение; $\mathbf{x}'$ – вектор столбец вектора $\mathbf{x}$; $\mathbf{0}$ – нулевой вектор в R^k; $\xi_j=(\xi_{1j}, \xi_{2j}, \ldots, \xi_{kj})$, $(j=1, 2, \ldots, n)$ – независимые случайные векторы в R^k; $|\mathbf{t}|$ – длина вектора $\mathbf{t}$; $\mathbf{S}_n=\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$; $F_j(\mathbf{x})$ – функция распределения случайного вектора ξ_j; V_n – положительно определенная симметрическая матрица порядка $k\times k$; V_n^{-1} – обратная матрица; $\mathbf{x}\, V_n\, \mathbf{x}'$ – квадратичная форма; $\mathfrak{a}$ – класс выпуклых борелевских множеств A в R^k; $\Phi_{0,\, V_n}(A)$ – k-мерное нормальное распределение с параметрами $(\mathbf{0};\ V_n)$; $P\,\{\ldots\}$ – вероятность события, указанного в скобках.

В настоящей работе рассмотрим остаточный член в центральной предельной теореме для последовательности независимых k-мерных случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, не предполагая даже существования математических ожиданий суммируемых случайных векторов, т.е. рассмотрим разность

$$R_n(A)=P\,\{\mathbf{S}_n\in A\}-\Phi_{0,\, V_n}(A)$$

для всех $A\in\mathfrak{a}$.

Теорема 1. *Существует постоянная $C_1(k)$, зависящая только от k, такая, что*

$$\sup_{A\in\mathfrak{a}} |P\,\{\mathbf{S}_n\in A\}-\Phi_{0,\, V_n}(A)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}'>\varepsilon} d\mathbf{F}_j(\mathbf{x})+$$
$$+C_1(k)\sup_{|\mathbf{t}|=1}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1}\mathbf{x}'\leqslant\varepsilon}\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\sqrt{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'}}\, dF_j(\mathbf{x})\right|+\right.$$
$$+\left|1-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1}\mathbf{x}'\leqslant\varepsilon}\frac{(\mathbf{x}, t)^2}{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'}\, dF_j(\mathbf{x})\right|+$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1}\mathbf{x}'\leqslant\varepsilon}\left(\frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{t})|}{\sqrt{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'}}\right)^3 dF_j(\mathbf{x})\right\}. \qquad (1)$$

Здесь ε – любое положительное число.

Следует отметить, что при $k=1$ теорема 1 содержит одномерные аналоги. Кроме этого, из нее $\big($с точностью до постояной $C(k)\big)$ вытекает ряд известных оценок остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме.

Теорема 2. *Пусть для некоторой последовательности положительно определенных симметрических матриц* $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняются условия*:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}' > \varepsilon} dF_j(\mathbf{x}) = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \sum_{j=1}^{n} \left| \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}' \leqslant \varepsilon} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\sqrt{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'}} dF_j(\mathbf{x}) \right| = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \left| \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}' \leqslant \varepsilon} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})^2}{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'} dF_j(\mathbf{x}) - 1 \right| = 0. \tag{4}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathfrak{a}} | P\{\mathbf{S}_n \in A\} - \Phi_{0,\, V_n}(A) | = 0.$$

Из теоремы 2 следует известная теорема В. Феллера ([1] стр. 79), а также теоремы Н. А. Сапогова [4].

Теорема 2 является следствием теоремы 1.

Достаточно показать, что

$$\sup_{|\mathbf{t}|=1} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}' \leqslant \varepsilon} \left(\frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{t})|}{\sqrt{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'}} \right)^3 dF_j(\mathbf{x}) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Из условия (4) следует, что при достаточно больших n

$$\sup_{|\mathbf{t}|=1} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}' \leqslant \varepsilon} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})^2}{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'} dF_j(\mathbf{x}) \leqslant 2.$$

Далее, так как

$$\sup_{|\mathbf{y}|=1} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\mathbf{y} V_n \mathbf{y}'} = \mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}',$$

то

$$\sup_{|\mathbf{t}|=1} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}' \leqslant \varepsilon} \left(\frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{t})|}{\sqrt{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'}} \right)^3 dF_j(\mathbf{x}) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|\mathbf{t}|=1} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}' \leqslant \varepsilon} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})^2}{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'} \sup_{|\mathbf{y}|=1} \frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}{\sqrt{\mathbf{y} V_n \mathbf{y}'}} dF_j(\mathbf{x}) =$$

$$= \sup_{|\mathbf{t}|=1} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}' \leqslant \varepsilon} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})^2}{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'} \sqrt{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}'}\, dF_j(\mathbf{x}) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\varepsilon} \sup_{|\mathbf{t}|=1} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x} V_n^{-1} \mathbf{x}' \leqslant \varepsilon} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t})^2}{\mathbf{t} V_n \mathbf{t}'} dF_j(\mathbf{x}) \leqslant 2\sqrt{\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ может быть сколько угодно малым.

2. Докажем несколько лемм. Сперва введем усеченные векторы

$$\boldsymbol{\eta}_j=(\eta_{1j},\ \eta_{2j},\ \dots,\ \eta_{kj})=\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_j & \text{при } \boldsymbol{\xi}_j V_n^{-1}\boldsymbol{\xi}_j'\leqslant\varepsilon,\\ \mathbf{0} & \text{при } \boldsymbol{\xi}_j V_n^{-1}\boldsymbol{\xi}_j'>\varepsilon,\end{cases}$$

где ε из теоремы 1. Пусть Λ_n – матрица ковариаций случайного вектора $\mathbf{Z}_n=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\eta}_j$; $M\boldsymbol{\eta}_j=(M\eta_{1j},\ M\eta_{2j},\ \dots,\ M\eta_{kj})$ – вектор математических ожиданий; $\bar{F}_j(\mathbf{x})$ – функция распределения случайного вектора $\boldsymbol{\eta}_j$.

Лемма 1. *Для всех борелевских множеств $A\in R^k$ имеет место неравенство*

$$|P\{\mathbf{S}_n\in A\}-P\{\mathbf{Z}_n\in A\}|\leqslant\sum_{j=1}^{n}P_j.$$

Здесь и в дальнейшем $P_j=P\{\boldsymbol{\xi}_j V_n^{-1}\boldsymbol{\xi}_j'>\varepsilon\}$.

Доказательство леммы 1. Пусть Ω – пространство всех элементарных событий ω;

$$W_{\mathbf{S}_n}=\{\omega:\mathbf{S}_n(\omega)\in A\},$$

$$U_j=\{\omega:\boldsymbol{\xi}_j(\omega)\,V_n^{-1}\,\boldsymbol{\xi}_j'(\omega)\leqslant\varepsilon\},$$

$$\bar{U}_j=\{\omega:\boldsymbol{\xi}_j(\omega)\,V_n^{-1}\,\boldsymbol{\xi}_j'(\omega)>\varepsilon\},$$

$$U=\bigcap_{j=1}^{n}U_j \quad\text{и}\quad \bar{U}=\bigcup_{j=1}^{n}\bar{U}_j.$$

Тогда для всех борелевских множеств A имеем

$$P\{\mathbf{S}_n\in A\}=P\{W_{\mathbf{S}_n}\cap U\}+P\{W_{\mathbf{S}_n}\cap\bar{U}\}\leqslant$$

$$\leqslant P\{\mathbf{Z}_n\in A\}+P\left\{\bigcup_{j=1}^{n}\bar{U}_j\right\}\leqslant P\{\mathbf{Z}_n\in A\}+\sum_{j=1}^{n}P_j.$$

С другой стороны, если обозначим

$$W_{\mathbf{Z}_n}=\{\omega:\mathbf{Z}_n(\omega)\in A\},$$

то

$$W_{\mathbf{Z}_n}\subset W_{\mathbf{S}_n}+\bigcup_{j=1}^{n}\bar{U}_j \quad\text{и}\quad P\{\mathbf{Z}_n\in A\}\leqslant P\{\mathbf{S}_n\in A\}+\sum_{j=1}^{n}P_j.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для всех $\mathbf{x}\in R^k$ имеет место неравенство*

$$|\mathbf{x}V_n\mathbf{x}'-\mathbf{x}\Lambda_n\mathbf{x}'|\leqslant\varepsilon_n(\mathbf{x}V_n\mathbf{x}'),\tag{5}$$

где

$$\varepsilon_n=\sup_{|\mathbf{x}|=1}\left(\left|1-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbf{y}V_n^{-1}\mathbf{y}'\leqslant\varepsilon}\frac{(\mathbf{y},\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}V_n\mathbf{x}'}\,dF_j(\mathbf{y})\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left|\int\limits_{\mathbf{y}V_n^{-1}\mathbf{y}'\leqslant\varepsilon}\frac{(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\sqrt{\mathbf{x}V_n\mathbf{x}'}}\,dF_j(\mathbf{y})\right|\right).\tag{6}$$

Доказательство леммы 2. Имеем

$$\mathbf{x}\, V_n \mathbf{x}' - \mathbf{x}\, \Lambda_n \mathbf{x}' = \mathbf{x}\, V_n \mathbf{x}' - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{y}\, V_n^{-1}\, \mathbf{y}' \leqslant \varepsilon} (\mathbf{x},\ \mathbf{y} - M\boldsymbol{\eta}_j)^2\, dF_j(\mathbf{y}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x},\ M\boldsymbol{\eta}_j)^2 \cdot P_j = \mathbf{x}\, V_n \mathbf{x}' - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{y}\, V_n^{-1}\, \mathbf{y}' \leqslant \varepsilon} (\mathbf{x},\ \mathbf{y})^2\, dF_j(\mathbf{y}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\int\limits_{\mathbf{y}\, V_n^{-1}\, \mathbf{y}' \leqslant \varepsilon} (\mathbf{x},\ \mathbf{y})\, dF_j(\mathbf{y}) \Bigr)^2 \cdot$$

Лемма 2 доказана.

Замечание 1. При $\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2}$ из неравенства (5) следует

$$\frac{1}{2}\, \mathbf{x}\, V_n \mathbf{x}' \leqslant \mathbf{x}\, \Lambda_n \mathbf{x}', \tag{7}$$

т.е. при выполнении условия $\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2}$, матрица Λ_n — положительно определенная.

Замечание 2. При $\varepsilon_n > \frac{1}{2}$ утверждение теоремы 1 тривиальное. Поэтому в лемме 2 и в дальнейшем, дополнительно не упоминая, будем считать, что $\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2}$ ·

Лемма 3. *Существует постоянная* $C_2(k)$, *зависящая только от* k, *такая, что*

$$\sup_{A \in \mathfrak{a}} | \Phi_{0,\, V_n}(A) - \Phi_{M\mathbf{Z}_n,\, \Lambda_n}(A) | \leqslant C_2(k) \cdot \varepsilon_n.$$

Доказательство следует из следующей леммы.

Лемма 4. (см. [3]). *Пусть имеем нормальные распределения* $\Phi_{\mathbf{b},\, B}(A)$ *и* $\Phi_{\mathbf{d},\, D}(A)$ *с векторами математических ожиданий* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{d}$ *и невырожденными ковариционными матрицами* B *и* D, *причем для всех* $\mathbf{x} \in R^k$

$$| \mathbf{x} B \mathbf{x}' - \mathbf{x} D \mathbf{x}' | \leqslant \delta\, (\mathbf{x} B \mathbf{x}'), \qquad (0 < \delta < 1).$$

Тогда имеет место неравенство

$$\sup_{A \in \mathfrak{a}} | \Phi_{\mathbf{b},\, B}(A) - \Phi_{\mathbf{d},\, D}(A) | \leqslant 2\sqrt{2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\, [(\mathbf{b} - \mathbf{d}) B^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{d})']^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{\delta k + (1+\delta)^k - (1-\delta)^k}{(1-\delta)^{\frac{k}{2}}} \cdot \tag{8}$$

В нашем случае $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{d} = M\,\mathbf{Z}_n$, $B = V_n$, $D = \Lambda_n$, $\delta = \varepsilon_n$.
Поскольку

$$(M\,\mathbf{Z}_n)\, V_n^{-1}\, (M\,\mathbf{Z}_n)' = \sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{(M\,\mathbf{Z}_n,\ \mathbf{t})^2}{\mathbf{t}\, V_n \mathbf{t}'} =$$

$$= \sup_{|\mathbf{t}|=1} \Bigl(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{x}\, V_n^{-1}\, \mathbf{x}' \leqslant \varepsilon} \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{t})}{\sqrt{\mathbf{t}\, V_n \mathbf{t}'}}\, dF_j(\mathbf{x}) \Bigr)^2 \tag{9}$$

и

$$\frac{\varepsilon_n k+(1+\varepsilon_n)^k-(1-\varepsilon_n)^k}{(1-\varepsilon)^{\frac{k}{2}}}<\varepsilon_n\left(k+4\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k-1\right]\right)2^{\frac{k}{2}}, \tag{10}$$

то из соотношений (5—10) следует утверждение леммы 3.

Лемма 5. *Существует постоянная $C_3(k)$, зависящая только от k, такая, что*

$$\sup_{A\in\mathfrak{a}}|P\{\mathbf{Z}_n-M\mathbf{Z}_n\in A\}-\Phi_{0,\Lambda_n}(A)|\leqslant$$
$$\leqslant C_3(k)\sup_{|\mathbf{t}|=1}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbf{x}V_n^{-1}\mathbf{x}'\leqslant\varepsilon}\left(\frac{|(\mathbf{x},\mathbf{t})|}{\sqrt{\mathbf{t}V_n\mathbf{t}'}}\right)^3 dF_j(\mathbf{x}).$$

Доказательство леммы 5. Нам понадобится теорема.

Теорема 1′ (теорема 2 в [3]). *Если независимые случайные векторы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ имеют конечные моменты третьего порядка и матрица ковариаций H_n случайного вектора Θ с функцией распределения*

$$F(\mathbf{x})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{F}_j(\mathbf{x}+M\eta_j),$$

невырождена, то существует постоянная $C_4(k)$, зависящая только от k, такая, что

$$\sup_{A\in\mathfrak{a}}\left|P\left\{\frac{\mathbf{Z}_n-M\mathbf{Z}_n}{\sqrt{n}}\in A\right\}-\Phi_{0,H_n}(A)\right|\leqslant\frac{C_4(k)}{\sqrt{n}}\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{M|(\Theta,\mathbf{t})|^3}{[M(\Theta,\mathbf{t})^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Имеем

$$\sup_{A\in\mathfrak{a}}\left|P\left\{\frac{Z_n-MZ_n}{\sqrt{n}}\in A\right\}-\Phi_{0,H_n}(A)\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_4(k)\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}M|(\eta_j-M\eta_j,\mathbf{t})|^3}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}M(\eta_j-M\eta_j,\mathbf{t})^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n}M|(\eta_j-M\eta_j,\mathbf{t})|^3\leqslant 8\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbf{x}V_n^{-1}\mathbf{x}'\leqslant\varepsilon}|(\mathbf{x},\mathbf{t})|^3 dF_j(\mathbf{x}). \tag{12}$$

Из соотношений (7), (11) и (12) следует утверждение леммы 5.

3. Утверждение теоремы 1 следует из соотношения

$$\sup_{A\in\mathfrak{a}}|P\{\mathbf{S}_n\in A\}-\Phi_{0,V_n}(A)|\leqslant\sup_{A\in\mathfrak{a}}|P\{\mathbf{S}_n\in A\}-P\{\mathbf{Z}_n\in A\}|+$$
$$+\sup_{A\in\mathfrak{a}}|\Phi_{0,V_n}(A)-\Phi_{MZ_n,\Lambda_n}(A)|+\sup_{A\in\mathfrak{a}}|P\{\mathbf{Z}_n-M\mathbf{Z}_n\in A\}-\Phi_{0,\Lambda_n}(A)|$$

и из лемм 1, 3 и 5.

Выражаю сердечную благодарность А. Бикялису за постановку задачи и помощь при ее решении.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
5.III.1971

Литература

1. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ГИИЛ, 1947.
2. Л. В. Осипов, В. В. Петров, Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме, Теор. вер. и ее прим., **12**, 2 (1967), 322–329.
3. А. Бикялис, О центральной предельной теореме в R^k, I, Лит. матем. сб., XI, 1(1971), 27–58.
4. Н. А. Сапогов, О многомерной предельной теореме теории вероятностей, УМН, 5, 3 (1950), 137–151.

LIEKAMOJO NARIO ĮVERTINIMAS DAUGIAMATĖJE CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE

H. Jasiūnas

(*Reziumė*)

Gautas liekamojo nario įvertinimas daugiamatėje centrinėje ribinėje teoremoje nepriklausomų k-mačių atsitiktinių vektorių sumoms, kada dėmenys turi bet kokius pasiskirstymus.

ON THE ESTIMATION OF THE REMAINDER TERM IN THE MULTIDIMENSIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM

H. Jasiūnas

(*Summary*)

The paper presents an estimation of the remainder term in the multidimensional central limit theorem for the sums of independent k-dimensional random vectors when the addens have any distributions.