XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. Алешкявичене

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с невырожденной функцией распределения $F(x)$. Пусть

$$S_0=0, \qquad S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \qquad \bar{S}_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i, \qquad \tilde{S}_n=\max[0,\ \bar{S}_n],$$

$$N(x)=\max\{n: \bar{S}_n\leqslant x\}$$

и $F_n(x)$, $\bar{F}_n(x)$, $\tilde{F}_n(x)$ – функции распределения, соответственно, сумм S_n, $\bar{S}_n$ и $\tilde{S}_n$.

Обозначим

$$\alpha_\nu=\mathbf{M}\xi_1^\nu, \quad a=\alpha_1, \quad \sigma^2=\mathbf{D}\xi_1, \quad \beta_\nu=\mathbf{M}|\xi_1|^\nu, \quad \alpha_{k\nu}=\int_{-\infty}^{0} x^\nu dF_k(x),$$

$$\bar{\alpha}_{k\nu}=\int_{-\infty}^{0} x^\nu d\bar{F}_k(x), \qquad f(t)=\mathbf{M}e^{it\xi_1}, \qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Сформулируем наши результаты.

Теорема 1. *Если случайная величина ξ_1 является решетчатой с максимальным шагом распределения 1 или имеет ограниченную плотность и, кроме того, если $a>0$ и $\beta_s<\infty$, $s\geqslant 3$, то при $n\to\infty$*

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{y_{xn}^2}{2}}+\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_\nu\left(-\varphi(y_{xn})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right),$$

где

$$y_{xn}=\frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad x>\delta>0,$$

а $\Pi_\nu(w)$ – полином с коэффициентами, выражающимися через первые моменты распределения $F(x)$ и через величины

$$C_m^{(l)}=\sum_{k=1}^{\infty} k^l\alpha_{km}, \quad m+l\leqslant\nu, \quad 0\leqslant l\leqslant\nu-1, \quad 1\leqslant m\leqslant\nu.$$

$\Pi_\nu(-\varphi)$ *вычисляется как* $\Pi_\nu(-w)$ *с заменой* w^r *на* $\varphi^{(r)}(y_{xn})$, $\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Теорема 2. *Если* $a>0$, $\beta_s<\infty$, $s\geqslant 3$, *и*

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |f(t)|<1,$$

то при $x>\delta>0$ *и* $n\to\infty$

$$\tilde{F}_n(x\sigma\sqrt{n}+an)=\Phi(x)+\sum_{\nu=1}^{-2}\tilde{\Pi}_\nu\left(-\Phi(x)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+o(n^{-\frac{s-2}{2}}),$$

где $\tilde{\Pi}_\nu(w)$ — *полиномы, коэффициенты которых тоже определяются* $\nu+2$ *первыми моментами распределения* $F(x)$ *и величинами* $c_m^{(l)}$, $m+l\leqslant\nu$, $0\leqslant l\leqslant\nu-1$, $1\leqslant m\leqslant\nu$. $\tilde{\Pi}_\nu(-\Phi)$ *вычисляется как* $\tilde{\Pi}_\nu(-w)$ *с заменой* w^r *на* $\bar{\Phi}^{(r)}(x)$.

Условимся в дальнейшем буквой C обозначать положительные постоянные, $C(\cdot)$ — положительные постоянные, которые могут зависеть только от указанных в скобках величин, а $\delta(n)$ — положительные функции, стремящиеся к 0 при $n\to\infty$.

Доказательство теоремы 1. Имеем

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\mathbf{P}\{\bar{S}_n\leqslant x\}-\mathbf{P}\{\bar{S}_{n+1}\leqslant x\}=\bar{F}_n(x)-\bar{F}_{n+1}(x).$$

Пусть $x\geqslant 0$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_n\leqslant x\}=\mathbf{P}\{\tilde{S}_n\leqslant x\}$$

и (см. [8])

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\}=-\int_{-\infty}^{\infty}F^*(y)\,d_y\tilde{F}_n(x-y)=\int_{-\infty}^{\infty}F^*(x-y)\,d\tilde{F}_n(y), \tag{1}$$

где

$$F^*(y)=\begin{cases}-F(y), & y<0,\\ 1-F(y), & y\geqslant 0.\end{cases}$$

Из (1) получаем, что в случае, когда случайная величина ξ_1 имеет ограниченную плотность, при $x>\delta>0$ имеет место соотношение (см. [6], теорема 23):

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ixt}\frac{f(t)-1}{it}\varphi_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}\frac{f(t)-1}{it}\varphi_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-T_{sn}}^{T_{sn}}e^{-ity_{xn}}\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{itan}{\sigma\sqrt{n}}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\varepsilon}e^{-ixt}\frac{f(t)-1}{it}\varphi_n(t)\,dt=I_1+I_2, \tag{2}$$

где

$$y_{xn}=\frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}},\qquad T_{sn}=\frac{\sqrt{n}}{8s\rho_s^{3/s}},\qquad \rho_s=\frac{\beta_s}{\sigma^s},\qquad \varepsilon=\frac{1}{8s\rho_s^{3/s}},$$

$\varphi_n(t)$ — характеристическая функция величины $\tilde{S}_n$ и через I_1 и I_2 обозначены первый и второй интегралы, соответственно. В дальнейшем будем пользоваться следующим выражением для $\varphi_n(t)$ (см. [7]):

$$\varphi_n(t)=f^n(t)+\sum_{k=1}^{n-1} f^k(t)\,\varphi_{n-k}(t)+\bar{\varphi}_n(t), \tag{3}$$

где

$$\bar{\varphi}_k(t)=\mathbf{P}\{\bar{S}_k<0\}-\int_{-\infty}^{0} e^{itx}\,d\bar{F}_k(x). \tag{4}$$

Следовательно, если $\bar{f}(t)=e^{-iat}f(t)$, то

$$e^{-\frac{itna}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\bar{f}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+e^{-\frac{itna}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right). \tag{5}$$

Сначала исследуем сумму

$$\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\sum_{k=[n/2]}^{n-1} e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}e^{-\frac{kt^2}{2n}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{\bar{\alpha}_{n-k,\nu}}{\sigma^\nu \nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu+$$

$$+\sum_{k=[n/2]}^{n-1} e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}e^{-\frac{kt^2}{2n}}\left[\sum_{r=1}^{s-2}k^{-r/2}\mathbf{P}_r\left(it\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\right]\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{\bar{\alpha}_{n-k,\nu}}{\sigma^\nu \nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu+$$

$$+\sum_{k=[n/2]}^{n-1} e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\left[\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\left(1+\sum_{r=1}^{s-2}k^{-r/2}P_r\left(it\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\right)\right]\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+\sum_{k=[n/2]}^{n-1} e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}e^{-\frac{kt^2}{2n}}\left[1+\sum_{r=1}^{s-2}k^{-r/2}P_r\left(it\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\right]\left[\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{\bar{\alpha}_{n-k,\nu}}{\sigma^\nu \nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right]=\Omega_{1,n}(t)+\Omega_{2,n}(t)+R_{1,n}(t)+R_{2,n}(t), \tag{6}$$

где $P_r(u)$ — известные полиномы в теории асимптотических разложений вероятностных распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин (это полиномы степени $3r$ относительно u, коэффициенты которых определяются первыми $r+2$ моментами распределения $F(x)$), а через $\Omega_{1,n}(t)$, $\Omega_{2,n}(t)$, $R_{1,n}(t)$ и $R_{2,n}(t)$ обозначены соответственно первый, второй, третий и четвертый члены правой части равенства (6).

Далее,

$$\Omega_{1n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{\bar{\alpha}_{n-k,\,\nu}}{\sigma^\nu \nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu \exp\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{(k-n)t^2}{2n}\right]=$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{\bar{\alpha}_{n-k,\,\nu}}{\sigma^\nu \nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu\left\{\sum_{j=0}^{s-\nu-2}\frac{1}{j!}\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]^j+\right.$$

$$+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{\bar{\alpha}_{n-k,\,\nu}}{\sigma^\nu \nu!\,(s-\nu-1)!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu\left[\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]^{s-\nu-1}\exp\left\{\Theta\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]\right\}\right\}=$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\omega_{1,\,\nu}(n)\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu+R_{3,\,n}(t),\qquad 0<\Theta<1, \tag{7}$$

где $\omega_{1,\nu}(n)$ выражаются через a, σ и величины

$$c_{n,\,m}^{(l)}=\sum_{k=1}^{[n/2]-1}(-k)^l\bar{\alpha}_{k,\,m},\quad m+l\leqslant\nu,\ 0\leqslant l\leqslant\nu-1,\ 1\leqslant m\leqslant\nu, \tag{8}$$

например,

$$\omega_{1,1}(n)=\frac{c_{n,\,1}^{(0)}}{\sigma},\qquad \omega_{1,2}(n)=\frac{c_{n,\,2}^{(0)}}{2\sigma^2}+\frac{ac_{n,\,1}^{(1)}}{\sigma^2},$$

$$\omega_{1,3}(n)=\frac{c_{n,\,1}^{(1)}}{2\sigma^2}+\frac{c_{n,\,3}^{(0)}}{6\sigma^3}+\frac{ac_{n,\,2}^{(1)}+a^2c_{n,\,1}^{(2)}}{2\sigma^3},\ \ldots,$$

$$R_{3,\,n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{\bar{\alpha}_{n-k,\,\nu}}{\sigma^\nu \nu!\,(s-\nu-1)!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]^{s-\nu-1}\exp\left\{\Theta\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]\right\}+$$

$$+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=s-1}^{2(s-3)+1}\omega_{2,\,\nu}(n)\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu \tag{9}$$

и коэффициенты $\omega_{2,\nu}(n)$ выражаются через $c_{n,\,m}^{(l)}$, $m+l\leqslant s-2$.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{\nu=1}^{s-2}k^{-\nu/2}P_\nu\left(it\sqrt{\frac{k}{n}}\right)=\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_{1,\nu}\left(\frac{k}{n},\ it\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu, \tag{10}$$

где $\Pi_{1,\nu}\left(\frac{k}{n},\ it\right)$ — полиномы степени 3ν относительно it, коэффициенты которых зависят от первых $\nu+2$ моментов распределения $F(x)$ и от отношений $\left(\frac{k}{n}\right)^l$, $1\leqslant l\leqslant\nu$, например,

$$\Pi_{1,1}\left(\frac{k}{n}, it\right)=\frac{\lambda_3}{3!}\left(\frac{k}{n}\right)(it)^3,$$

$$\Pi_{1,2}\left(\frac{k}{n}, it\right)=\frac{\lambda_4}{4!}\left(\frac{k}{n}\right)(it)^4+\frac{1}{2}\frac{\lambda_3^2}{(3!)^2}\left(\frac{k}{n}\right)^2(it)^6,$$

$$\Pi_{1,3}\left(\frac{k}{n}, it\right)=\frac{\lambda_5}{5!}\left(\frac{k}{n}\right)(it)^5+\frac{\lambda_3\lambda_4}{3\cdot 4}\left(\frac{k}{n}\right)^2(it)^7+\frac{\lambda_3^3}{3\cdot(3!)^3}\left(\frac{k}{n}\right)^3(it)^9, \ \ldots$$

Здесь $\lambda_k=\frac{\varkappa_k}{\sigma^k}$ и $\varkappa_k$ — k-тый семиинвариант распределения $F(x)$.

Воспользовавшись (10) и разложением

$$\left(\frac{k}{n}\right)^l=\sum_{j=0}^{l} C_l^j\frac{(k-n)^j n^{l-j}}{n^l},$$

получаем

$$\sum_{\nu=1}^{s-2} k^{-\nu/2}P_\nu\left(it\sqrt{\frac{k}{n}}\right)=\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_{2,\nu}(k-n, it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+r_{1,s-1}(it)(k-n)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{s-1}, \tag{11}$$

где $r_{1,s-1}(t)$ — полином с ограниченными относительно n коэффициентами, а $\Pi_{2,\nu}(k-n, it)$ — полиномы степени 3ν относительно it с коэффициентами, зависящими от первых $\nu+2$ моментов распределения $F(x)$ и от $(k-n)^l$, $0\leqslant l\leqslant\nu$, например,

$$\Pi_{2,1}(k-n, it)=P_1(it), \qquad \Pi_{2,2}(k-n, it)=P_2(it),$$

$$\Pi_{2,3}(k-n, it)=P_3(it)+\frac{\lambda_3}{3!}(k-n)(it)^3, \ \ldots$$

Имея в виду (6) и (11), получаем

$$\Omega_{2,n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\frac{\alpha_{n-k,\nu}}{\sigma^\nu\nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu\left\{\sum_{j=0}^{s-\nu-2}\frac{1}{j!}\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]^j+\frac{1}{(s-\nu-1)!}\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]^{s-\nu-1}\times$$

$$\times\exp\left\{\Theta_1\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]\right\}\times$$

$$\times\sum_{l=1}^{s-\nu-j-2}\Pi_{2,l}(k-n, it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l+r_{1,s-\nu-j-1}(it)\left(\frac{k-n}{(\sqrt{n})^{s-\nu-j-1}}\right)=$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=2}^{s-2}\Pi_{3,\nu}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+R_{4,n}(t), \qquad 0<\Theta_1<1. \tag{12}$$

Здесь

$$R_{4,n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\frac{\bar{a}_{n-k,\,\nu}}{\sigma^\nu\nu!\,(s-\nu-1)!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]^{s-\nu-1}\exp\left\{\Theta_1\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]\right\}\sum_{l=1}^{s-2}k^{-l/2}P_l\left(it\,\bigg|\,\frac{k}{n}\right)+$$

$$+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\frac{\bar{a}_{n-k,\,\nu}}{\sigma^\nu\nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu\left\{\sum_{j=0}^{s-\nu-2}\frac{1}{j!}\left[\frac{ia(k-n)t}{\sigma\sqrt{n}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(k-n)(it)^2}{2n}\right]^j r_{1,\,s-\nu-j-1}(it)\left(\frac{k-n}{(\sqrt{n})^{s-\nu-j-1}}\right)+r_{2,\,s-\nu-1}(it)\cdot\frac{k-n}{(\sqrt{n})^{s-\nu-1}}\right\},\qquad(13)$$

$r_{2,s-\nu-1}(it)$ — полином с ограниченными относительно n коэффициентами, и $\Pi_{3,\nu}(it)$ — полиномы степени $3\nu-2$ относительно it с коэффициентами, выражающимися через $\nu+1$ первых моментов распределения $F(x)$ и через $c_{n,m}^{(l)}$, $m+l\leqslant\nu-1$, $0\leqslant l\leqslant\nu-2$, $1\leqslant m\leqslant\nu-1$, например,

$$\Pi_{3,2}(it)=\frac{\lambda_3}{6\sigma}c_{n,1}^{(0)}(it)^4,$$

$$\Pi_{3,3}(it)=\left(\frac{\lambda_3}{12\sigma^2}c_{n,2}^{(0)}+\frac{a\lambda_3}{6\sigma^2}c_{n,1}^{(1)}+\frac{\lambda_4}{6\cdot 24\sigma^3}c_{n,1}^{(0)}\right)(it)^5+\frac{\lambda_3^2}{72\sigma}c_{n,1}^{(0)}(it)^7,\ \ldots$$

Из (6), (7) и (12) имеем

$$\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_{4,\nu}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+\sum_{i=1}^{4}R_{i,n}(t),\qquad(14)$$

где $\Pi_{4,\nu}(it)$ — полиномы степени $3\nu-2$ относительно it с коэффициентами, выражающимися через $\nu+1$ первых моментов распределения $F(x)$ и через $c_{n,m}^{(l)}$, $m+l\leqslant\nu$, $0\leqslant l\leqslant\nu-1$, $1\leqslant m\leqslant\nu$, например,

$$\Pi_{4,1}(it)=\frac{c_{n,1}^{(0)}}{\sigma}it,$$

$$\Pi_{4,2}(it)=\left(\frac{c_{n,2}^{(0)}}{2\sigma^2}+\frac{ac_{n,1}^{(0)}}{\sigma^2}\right)(it)^2+\frac{\lambda_3}{3!\sigma}c_{n,1}^{(0)}(it)^4,$$

$$\Pi_{4,3}(it)=\left(\frac{c_{n,3}^{(0)}}{6\sigma^3}+\frac{ac_{n,2}^{(1)}}{2\sigma^3}+\frac{c_{n,1}^{(1)}}{2\sigma^2}+\frac{a^2c_{n,1}^{(2)}}{2\sigma^3}\right)(it)^3+\left(\frac{\lambda_3c_{n,2}^{(0)}}{12\sigma^2}+\frac{a\lambda_3c_{n,1}^{(1)}}{6\sigma^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_4c_{n,1}^{(0)}}{3!4!\sigma^3}\right)(it)^5+\frac{\lambda_3^2c_{n,1}^{(0)}}{72}(it)^7,\ \ldots$$

Воспользовавшись разложением

$$\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}=a+\sum_{j=2}^{s-1}\frac{\alpha_j}{j!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{j-1}+\frac{1}{s!}f^{(s)}\left(\frac{\Theta_2t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{s-1},\ 0<\Theta_2<1,\qquad(15)$$

получаем

$$\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{f}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\left[a+\sum_{j=2}^{s-1}\frac{\alpha_j}{j!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{j-1}\right]e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{k=1}^{s-2}P_k(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k\right]+$$

$$+\frac{1}{s!}f^{(s)}\left(\frac{\Theta_2 t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{s-1}\bar{f}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}\left[\bar{f}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{s-2}P_k(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k\right]\right]=ae^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_{5,\nu}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}+R_{5,n}(t), \qquad (16)$$

где

$$+R_{5,n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=s-1}^{(s-2)^2}\Pi_{5,\nu}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}\left[\bar{f}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{s-2}P_k(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k\right]\right]+\frac{1}{s!}f^{(s)}\left(\frac{\Theta_2 t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{s-1}\bar{f}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \qquad (17)$$

и $\Pi_{5,\nu}(it)$ — полиномы степени 3ν относительно it с коэффициентами, зависящими от первых $\nu+2$ моментов распределения $F(x)$, например,

$$\Pi_{5,1}(it)=\frac{\alpha_2}{2\sigma}(it)+\frac{a\lambda_3}{6}(it)^3,$$

$$\Pi_{5,2}(it)=\frac{\alpha_3}{6\sigma^2}(it)^2+\left(\frac{a\lambda_4}{24}+\frac{\alpha_2\lambda_3}{12\sigma}\right)(it)^4+\frac{a\lambda_3^2}{72}(it)^3,$$

$$\Pi_{5,3}(it)=\frac{\alpha_4}{24\sigma^3}(it)^3+\left(\frac{a\lambda_5}{5!}+\frac{\alpha_3\lambda_3}{36\sigma^2}+\frac{\alpha_2\lambda_4}{48\sigma}\right)(it)^5+$$

$$+\left(\frac{a\lambda_3\lambda_4}{3!4!}+\frac{\alpha_2\lambda_3^2}{4\cdot 36\sigma}\right)(it)^7+\frac{a\lambda_3^3}{3\cdot 6^3}(it)^9,\ \ldots$$

Далее, согласно (14) и (15), имеем

$$\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\left[a+\sum_{j=2}^{s-1}\frac{\alpha_j}{j!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{j-1}+\frac{1}{s!}f^{(s)}\left(\frac{\Theta_2 t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{s-1}\right]\left\{e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_{4,\nu}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{4}R_{i,n}(t)\right\}=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi'_{6,\nu}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}+R_{6,n}(t), \qquad (18)$$

где

$$R_{6,n}(t)=\frac{1}{s!}f^{(s)}\left(\frac{\Theta_2 t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{s-1}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+$$

$$+\left[a+\sum_{j=2}^{s-1}\frac{\alpha_j}{j!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{j-1}\right]\sum_{i=1}^{4}R_{i,n}(t)+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=s-1}^{(s-2)^2}\Pi'_{6,\nu}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} \qquad (19)$$

и $\Pi'_{6,\nu}(it)$ — полиномы степени $3\nu-2$ относительно it с коэффициентами, зависящими от $\nu+1$ первых моментов распределения $F(x)$ и от величин $c^{(l)}_{n,m}$, $m+l\leqslant\nu$, $0\leqslant l\leqslant\nu-1$, $1\leqslant m\leqslant\nu$, например,

$$\Pi'_{6,1}(it)=\frac{ac^{(0)}_{n,1}}{\sigma}\,it,$$

$$\Pi'_{6,2}(it)=\left(\frac{ac^{(0)}_{n,2}}{2\sigma^2}+\frac{a^2c^{(1)}_{n,1}}{\sigma^2}+\frac{\alpha_2c^{(0)}_{n,1}}{2\sigma^2}\right)(it)^2+\frac{a\lambda_3}{6\sigma}c^{(0)}_{n,1}(it)^4,$$

$$\Pi'_{6,3}(it)=\left[\frac{ac^{(0)}_{n,3}}{6\sigma^3}+\frac{a^2c^{(1)}_{n,1}}{2\sigma^3}+\frac{ac^{(1)}_{n,1}}{2\sigma^2}+\frac{a^3c^{(2)}_{n,1}}{2\sigma^3}+\frac{\alpha_2c^{(0)}_{n,2}}{4\sigma^3}+\frac{a\alpha_2c^{(1)}_{n,1}}{2\sigma^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_3c^{(0)}_{n,1}}{6\sigma^3}\right](it)^3+\left[\frac{a\lambda_3}{12\sigma^2}c^{(0)}_{n,2}+\frac{a^2\lambda_3}{6\sigma^2}c^{(1)}_{n,1}+\frac{a\lambda_4}{6\cdot 24\sigma^3}c^{(0)}_{n,1}+\frac{\alpha_2\lambda_3}{12\sigma^2}c^{(0)}_{n,1}\right](it)^5+$$

$$+\frac{a\lambda_3^2}{72\sigma}c^{(0)}_{n,1}(it)^7,\ \ldots$$

В полиномах $\Pi'_{6,\nu}(it)$, $\nu=1,\ \ldots,\ s-2$, заменив величины $c^{(l)}_{n,m}$ соответственно величинами $c^{(l)}_m$, получим новые полиномы, которые обозначим через $\Pi_{6,\nu}(it)$, соответственно. Далее, для оценки разности $|\Pi_{6,\nu}(it)-\Pi'_{6,\nu}(it)|$ воспользуемся доказанной ниже леммой. Согласно лемме, имеем

$$|c^{(l)}_m-c^{(l)}_{n,m}|\leqslant\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty}k^l|\bar{\alpha}_{k,m}|\leqslant C\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty}\frac{1}{k^{s-m-l}}=$$

$$=\begin{cases}o\left(\dfrac{1}{n^{s-m-l-1}}\right) & \text{при } m+l<s-2,\\ o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{при } m+l=s-2.\end{cases}$$

Отсюда, вспомнив, что полином $\Pi'_{6,\nu}(it)$ зависит только от величин $c^{(l)}_{n,m}$, в которых $m+l\leqslant\nu$, и что

$$|\Pi'_{6,\nu}(it)|\leqslant C(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{\nu+1},\ c^{(\nu-m)}_{n,m})(|t|^{\nu}+|t|^{3\nu-2}),$$

получаем

$$|\Pi_{6,\nu}(it)-\Pi'_{6,\nu}(it)|=\begin{cases}o\left(\dfrac{1}{n^{s-\nu-1}}\right)(|t|+|t|^{3\nu-2}) & \text{при } \nu<s-2,\\ o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)(|t|^{s-2}+|t|^{3(s-2)-2} & \text{при } \nu=s-2.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\left|e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi'_{6,\nu}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}-e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_{6,\nu}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta(n)}{n^{\frac{s-1}{2}}}\left(|t|+|t|^{3(s-2)-2}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad (20)$$

Из (5), (16), (18) и (20) окончательно получаем

$$\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}e^{-\frac{itna}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=ae^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}+$$

$$+\sum_{i=5}^{8}R_{i,n}(t), \qquad (21)$$

где

$$R_{7,n}(t)=\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}\sum_{k=0}^{[n/2]-1}\bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad (22)$$

$$|R_{8,n}(t)|\leqslant\frac{\delta(n)}{n^{\frac{s-1}{2}}}\left(|t|+|t|^{3s-4}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (23)$$

и $\Pi_\nu(it)=\Pi_{5,\nu}(it)+\Pi_{6,\nu}(it)$ – полиномы степени 3ν относительно it с коэффициентами, зависящими от первых $\nu+2$ моментов распределения $F(x)$.

Для оценки величин $R_{i,n}(t)$, $1\leqslant i\leqslant 7$, нужна будет следующая

Лемма. *Если* $\beta_s<\infty$, $s>1$, *то при* $\nu<s$

$$|\bar{\alpha}_{n\nu}|=o\left(\frac{1}{n^{s-\nu}}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$\Psi(t;\ z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}_n(t)z^n.$$

Тогда из (4) следует, что производящей функцией для $i^\nu\bar{\alpha}_{n\nu}$ является $\Psi_t^{(\nu)}(0;\ z)$. Но, так как (см. [2])

$$\Psi(t;\ z)=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\int_{-\infty}^{0}(1-e^{itx})\,dF_n(x)\right\},$$

то

$$\Psi_t^{(\nu)}(0;\ z)=\sum\frac{1}{k_1!k_2!\ \dots\ k_\nu!}\prod_{r=1}^{\nu}\left(\frac{\psi_t^{(r)}(0,\ z)}{r!}\right)^{k_r}, \qquad (24)$$

где

$$\psi(t,\ z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\int_{-\infty}^{0}(1-e^{itx})\,dF_n(x) \qquad (25)$$

и суммирование производится по всем целым неотрицательным $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, удовлетворяющим уравнению $k_1+2k_2+\ \ldots\ +\nu k_\nu=\nu$. Согласно (25),

$$\psi_t^{(m)}(0,\ z)=-i^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{nm}z^n}{n}. \tag{26}$$

В дальнейшем будем пользоваться неравенством (см. [1], следствие 1 из теоремы 1)

$$\hat{F}_n(x)=F_n(x+na)<nF\left(\frac{2x}{3}\right)+\exp\left\{2\left(\frac{3}{2}s\right)^2\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2K_s^{1/s}}\right)^2+1\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{n\beta_s\left(\frac{3}{2}\right)^s K_s}{x^s}\right]^{3/2}=n\hat{F}_1\left(\frac{2x}{3}\right)+C_0\frac{n^{3/2}}{x^{3s/2}} \tag{27}$$

справедливым при всех $x<-\frac{3}{2}(\beta_sK_s)^{1/s}\sqrt{n}\ \ln n$. Здесь

$$K_s=1+(s+1)^{s+2}e^{-s}$$

и

$$C_0=\left[\beta_s\left(\frac{3}{2}\right)^s K_s\right]^{3/2}\exp\left\{2\left(\frac{3}{2}s\right)^2\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2K_s^{1/s}}\right)^2+1\right\}.$$

Далее имеем

$$\alpha_{nm}=\int_{-\infty}^{0}x^m dF_n(x)=-m\int_{-\infty}^{0}x^{m-1}F_n(x)\,dx=-m\int_{-\infty}^{-na}x^{m-1}\hat{F}_n(x)\,dx-$$

$$-m\int_{-\infty}^{-na}\sum_{k=0}^{m-2}C_{m-1}^k x^k(na)^{m-k-1}\hat{F}_n(x)\,dx. \tag{28}$$

Согласно (27) при $s>1$

$$\int_{-\infty}^{-na}|x|^{m-1}\hat{F}_n(x)\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{-na}|x|^{m-1}\left[n\hat{F}_1\left(\frac{2x}{3}\right)+C_0\frac{n^{3/2}}{|x|^{3s/2}}\right]dx=$$

$$=n\int_{-\infty}^{-na}|x|^{m-1}\hat{F}_1\left(\frac{2x}{3}\right)dx+C_0n^{3/2}\int_{-\infty}^{-na}\frac{dx}{|x|^{3/2\,s-m+1}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{s-1}\frac{a^{m-s}}{n^{s-m-1}}\int_{-\infty}^{-na}\left(\frac{2}{3}|x|\right)^{s-1}\hat{F}_1\left(\frac{2x}{3}\right)dx+O\left(n^{-\frac{3}{2}s+m+\frac{3}{2}}\right)=o\left(\frac{1}{n^{s-m-1}}\right). \tag{29}$$

Аналогично можно показать, что и второй интеграл правой части соотношения (28) имеет порядок $o\left(\frac{1}{n^{s-m-1}}\right)$. Следовательно,

$$\alpha_{nm}=o\left(\frac{1}{n^{s-m-1}}\right). \tag{30}$$

Пусть символ $C_n\left(\psi(z)\right)$ обозначает коэффициент при z^n в разложении функции $\psi(z)$ по степеням z^k, $k\geqslant 0$. Тогда из (26) и (30) следует, что

$$C_n\left(\psi_t^{(m)}(0,\ z)\right)=o\left(\frac{1}{n^{s-m}}\right). \tag{31}$$

Далее нетрудно показать, что и при любом конечном целом ν

$$C_n\left([\psi_t^{(m)}(0,\ z)]^\nu\right)=o\left(\frac{1}{n^{s-m}}\right). \tag{32}$$

Действительно, согласно (26) и (30), в случае $\nu=2$ имеем

$$\left|C_n\left([\psi_t^{(m)}(0,\ z)]^2\right)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_{km}}{k}\,\frac{\alpha_{n-k,m}}{n-k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{n}\,|\,\alpha_{[n/2],m}\,|\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{|\,\alpha_{k,m}\,|}{k}=o\left(\frac{1}{n^{s-m}}\right).$$

Методом индукции показывается, что и при любом целом конечном $\nu>2$ выполняется (32). Аналогично показывается, что и

$$C_n\left(\psi_t^{(m_1)}(0,\ z)\ \ldots\ \psi_t^{(m_l)}(0,\ z)\right)=o\left(\frac{1}{n^{s-\bar m}}\right),$$

$$\bar m=\max(m_1,\ \ldots,\ m_l),\ \bar m<s. \tag{33}$$

Следовательно, из (24) и (31)—(33) окончательно получаем, что при $\nu<s$

$$|\,\bar\alpha_{n\nu}\,|=o\left(\frac{1}{n^{s-\nu}}\right).$$

Лемма доказана.

Приступим к оценке интеграла I_1, определенного соотношением (2). Согласно (2) и (21), имеем

$$I_1=\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}}e^{-ity_{xn}}\left[ae^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+\sum_{i=5}^{8}R_{i,n}(t)\right]dt=$$

$$=\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\,e^{-\frac{y_{xn}^2}{2}}+\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_\nu\left(-\varphi(y_{xn})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}}e^{-ity_{xn}}\times$$

$$\times\sum_{i=5}^{8}R_{i,n}(t)\,dt+\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|>T_{sn}}e^{-ity_{xn}}\left[ae^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right]dt, \tag{34}$$

где $\Pi_\nu(-\varphi)$ вычисляется как $\Pi_\nu(-w)$ с заменой w^r на $\varphi^{(r)}(y_{xn})$.

Сначала заметим, что

$$\left|\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|>T_{sn}}e^{-ity_{xn}}\left[ae^{-\frac{t^2}{2}}+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|>T_{sn}}e^{-\frac{t^2}{2}}\left[a+\sum_{\nu=1}^{s-2}|\,\Pi_\nu(it)\,|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right]dt=o(n^{-\frac{s-1}{2}}). \tag{35}$$

Далее, из (4), (22) и леммы получаем, что

$$\left|\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}} e^{-ity_{xn}} R_{7,n}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a}{2\pi\sigma^2 n}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}} \sum_{k=0}^{[n/2]-1}\left|\bar f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^k |\bar\alpha_{n-k,1}||t|\,dt = O(n\,|\bar\alpha_{[n/2],1}|) = o\left(\frac{1}{n^{s-2}}\right). \quad (36)$$

Воспользовавшись оценкой

$$\left|\bar f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{k=1}^{s-2} P_k(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k\right]\right| \leqslant C(s)\,\frac{\delta(n)}{T_{sn}^{s-2}}\times$$

$$\times(|t|^s+|t|^{3(s-2)})\,e^{-\frac{t^2}{4}}, \quad (37)$$

справедливой при всех $|t|\leqslant T_{sn}$ (см., напр., [3]), и тем, что (см. [7], формула (27))

$$\left|\bar f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| < e^{-\frac{t^2}{4n}} \quad \text{при } |t| \leqslant \frac{3\sigma^3\sqrt{n}}{2\beta_3}, \quad (38)$$

из (17) имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}} e^{-ity_{xn}} R_{5,n}(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=s-1}^{(s-2)^2}\times\right.$$

$$|\Pi_{5,\nu}(it)|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} + aC(s)\frac{\delta(n)}{T_{sn}^{s-2}}(|t|^s+|t|^{3(s-2)})\,e^{-\frac{t^2}{4}} + \frac{\beta_s}{s!}\times$$

$$\left.\frac{|t|^{s-1}}{(\sigma\sqrt{n})^{s-1}}\,e^{-\frac{t^2}{4}}\right]dt = o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right). \quad (39)$$

Далее, так как при $|t|\leqslant T_{sn}$

$$\left|\varphi_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{\alpha_{n-k,\nu}}{\sigma^\nu \nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right| \leqslant \frac{|\bar\alpha_{n-k,s-1}|}{(s-1)!}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{s-1}, \quad (40)$$

то из (6), (37) и леммы получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}} e^{-ity_{xn}}\left[a+\sum_{j=2}^{s-1}\frac{\alpha_j}{j!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{j-1}\right][R_{1,n}(t)+R_{2,n}(t)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}}\left[a+\sum_{j=2}^{s-1}\frac{|\alpha_j|}{j!}\left(\frac{|t|}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{j-1}\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{C(s)}{\sigma\sqrt{n}}\,\frac{n\delta\left(\frac{n}{2}\right)}{T_{s,[n/2]}^{s-2}}\,|\bar\alpha_{[n/2],1}|\,(|t|^{s+1}+|t|^{3s-5})\,e^{-\frac{t^2}{8}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{t^2}{4}}\left[1+\sum_{r=1}^{s-2}k^{-r/2}\left|P_r\left(it\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\right|\right]\frac{n\,|\bar\alpha_{[n/2],s-1}|}{(s-1)!}\left(\frac{|t|}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{s-1}\right\}dt = o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right). \quad (41)$$

Из (9) имеем

$$|R_{3,n}(t)|\leqslant\left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right)^{s-1}e^{-\frac{t^2}{4}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{|c_{n,\nu}^{(s-\nu-1)}|}{\sigma^\nu\nu!\,(s-\nu-1)!}\left[\frac{a}{\sigma}+\frac{1}{2}\right)^{s-\nu-1}+$$

$$+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=s-1}^{2s-5}|\omega_{2,\nu}|\left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right)^{\nu},\tag{42}$$

и так как по лемме при любом $1\leqslant\nu\leqslant s-2$

$$|c_{n,\nu}^{(s-\nu-1)}|=o(\ln n),\tag{43}$$

то и

$$\left|\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}}e^{-ity_{xn}}\left[a+\sum_{j=2}^{s-1}\frac{\alpha_j}{j!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{j-1}\right]R_{3,n}(t)\,dt\right|=o(n^{-\frac{s-1}{2}}).\tag{44}$$

Далее,

$$|R_{4,n}(t)|\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}}\left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right)^{s-1}\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{|c_{n-k,\nu}^{(s-\nu-1)}|}{\sigma^\nu\nu!\,(s-\nu-1)!}\left[\frac{a}{\sigma}+\frac{1}{2}\right]^{s-\nu-1}\times$$

$$\times\sum_{l=1}^{s-2}k^{-l/2}\left|P_l\left(it\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\right|+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{s-1}e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\left\{\frac{|C_{k,\nu}^{(s-\nu-1)}|}{\sigma^\nu\nu!}|t|^\nu\times\right.$$

$$\times\sum_{j=0}^{s-\nu-2}\frac{1}{j!}\left[\frac{a|t|}{\sigma}+\frac{t^2}{2}\right]^j|r_{1,s-\nu-j-1}(it)|+$$

$$\left.+|c_{n-k,\nu}^{(1)}||r_{2,s-\nu-1}(it)|\right\}.\tag{45}$$

Отсюда, согласно (43), имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}}e^{-ity_{xn}}\left[a+\sum_{j=2}^{s-1}\frac{\alpha_j}{j!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{j-1}\right]R_{4,n}(t)\,dt\right|=o(n^{-\frac{s-1}{2}}),\tag{46}$$

а согласно соотношениям (20), (41), (44), (46) и лемме

$$\left|\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}}e^{-ity_{xn}}R_{6,n}(t)\,dt\right|=o(n^{-\frac{s-1}{2}}).\tag{47}$$

Наконец, из (21), (23), (34)—(39) и (47) получаем

$$I_1=\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{y_{xn}^2}{2}}+\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\Pi_\nu\left(-\varphi(y_{xn})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+o(n^{-\frac{s-1}{2}}).\tag{48}$$

Осталось еще оценить I_2. Согласно (2) и (3), имеем

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>\varepsilon}e^{-ixt}\frac{f(t)-1}{it}\left[f^n(t)+\sum_{k=1}^{n-1}f^k(t)\bar{\varphi}_{n-k}(t)\right]dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>\varepsilon}e^{-ixt}\times$$

$$\times\frac{f(t)}{it}\bar{\varphi}_n(t)\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>\varepsilon}e^{-ixt}\frac{\bar{\varphi}_n(t)}{it}\,dt=I_2'+I_2''+I_2'''.\tag{49}$$

Далее,

$$\int\limits_{|t|>\varepsilon} e^{-itx}\frac{\bar{\varphi}_n(t)}{it}\,dt = \mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\}\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{e^{-itx}}{it}\,dt - \int\limits_{|t|>\varepsilon} e^{-itx}\frac{\psi_n(t)}{it}\,dt, \tag{50}$$

где

$$\psi_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx}\,d\bar{F}_n(x).$$

Но, так как при $x>\delta>0$

$$\left|\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{it}\,dt\right| = \left|-\frac{e^{-itx}}{ix}\cdot\frac{1}{it}\right|_{\varepsilon}^{\infty} - \frac{1}{i^2x}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{t^2}\,dt\,\Big| = O\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right) \tag{51}$$

и из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi_n(t)|^2\,dt<\infty$ следует

$$\left|\int\limits_{|t|>\varepsilon} e^{-itx}\frac{\psi_n(t)}{it}\,dt\right| \leqslant \mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\}^{1-\varepsilon_1}\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{|\psi_n(t)|^{\varepsilon_1}}{|t|}\,dt =$$

$$= O\left([\mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\}]^{1-\varepsilon_1}\right), \qquad \left(0<\varepsilon_1<\frac{1}{2s}\right), \tag{52}$$

то из (4) и (50) – (52) имеем

$$|I_2'''| = O\left(\frac{\mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\}}{x\varepsilon} + [\mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\}]^{1-\varepsilon_1}\right), \qquad x>\delta>0. \tag{53}$$

С другой стороны, при $x>4\sqrt{n\max\left[\ln\frac{n^{s/2-1}}{K_s\beta_s},\ 0\right]}$

$$\hat{F}_n(-x) \leqslant \frac{B_s\beta_s n}{|x|^s}$$

где K_s и B_s — абсолютные постоянные, зависящие только от s (см. [1], следствие 2 из теоремы 1). Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_n<0\} \leqslant \mathbf{P}\{S_n<0\} = \hat{F}_n(-na) \leqslant \frac{B_s\beta_s n}{(an)^s}. \tag{54}$$

Отсюда и из (53) имеем, что

$$|I_2'''| = o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right). \tag{55}$$

Заметив, что из условий теоремы следует существование такого $c=c(\varepsilon)>0$, что при $|t|>\varepsilon$ $|f(t)|<e^{-c}$, получаем

$$|I_2'| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{|f(t)|}{|t|}\left[e^{-c(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-(k-1)c}\,\mathbf{P}\{\bar{S}_{n-k}<0\}\right]dt.$$

Отсюда, из (49), (54) и из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt$ имеем

$$|I_2'| = o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right). \tag{56}$$

Следовательно, и

$$|I_2''|=o(n^{-\frac{s-1}{2}}). \tag{57}$$

Из соотношений (2), (48), (49) и (55)—(57) следует утверждение теоремы 1 в нерешетчатом случае.

Перейдем к решетчатому случаю. Для удобства будем считать x целым. Тогда согласно (1)

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\sum_{k=0}^{x}\mathbf{P}\{\xi_1>k\}\mathbf{P}\{\bar{S}_n=x-k\}-$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{-1}\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant k\}\mathbf{P}\{\bar{S}_n=x-k\}.$$

Но,

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\mathbf{P}\{\xi_1>k\}-\sum_{k=-\infty}^{-1}e^{itk}\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant k\}=\frac{f(t)-1}{e^{it}-1}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{N(x)=n\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itx}\frac{f(t)-1}{e^{it}-1}\varphi_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-T_{sn}}^{T_{sn}}e^{-ity_{xn}}\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{e^{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}-1}\varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{itna}{\sigma\sqrt{n}}}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\varepsilon}e^{-ixt}\frac{f(t)-1}{e^{it}-1}\varphi_n(t)\,dt=J_1+J_2. \tag{58}$$

Поступая точно так же, как и в нерешетчатом случае, только вместо соотношения (15) воспользовавшись соотношением

$$\frac{f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1}{e^{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}}-1}=a+\sum_{j=2}^{s-1}\frac{a_j}{j!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{j-1}+R_{9,n}(t), \tag{59}$$

где

$$|R_{9,n}(t)|\leqslant\frac{C(\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-1},\beta_s)}{(\sqrt{n})^{s-1}}\left(|t|^{s-1}+|t|^{(s-2)(s-3)}\right)$$

и коэффициенты выражаются через j первых моментов распределения $F(x)$, например,

$$a_2=\alpha_2-\alpha_1,\ a_3=\alpha_3-\frac{3}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_1,\ \ a_4=\alpha_4-\frac{1}{2}\alpha_3+\alpha_2-\frac{3}{2}\alpha_1,\ \ldots,$$

получаем

$$J_1=\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{y_{xn}^2}{2}}+\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{\nu=1}^{s-2}\bar{\Pi}_\nu\left(-\varphi(y_{xn})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu+o(n^{-\frac{s-1}{2}}). \tag{60}$$

Полиномы $\tilde{\Pi}_\nu(y)$ можно получить из полиномов $\Pi_\nu(y)$, только моменты α_j, от которых в явном виде зависят коэффициенты полинома, нужно заменить величинами a_j из соотношения (59).

Воспользовавшись тем, что для решетчатой случайной величины

$$|f(t)|<e^{-c_0}<1 \text{ и } |e^{it}-1|>\delta_1>0$$

при $\varepsilon_2 \leqslant |t| \leqslant 2\pi-\varepsilon_2$, $\varepsilon_2>0$, легко получаем, что и

$$|J_2|=o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right). \tag{61}$$

Из (58), (60) и (61) следует справедливость теоремы 1 в решетчатом случае. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Согласно (4) имеем, что при $|t|\leqslant T_{sn}$

$$\left|\sum_{k=0}^{[n/2]-1} \bar{f}^k\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{ia(n-k)t}{\sigma\sqrt{n}}}\bar{\varphi}_{n-k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant C|\bar{\alpha}_{[n/2],1}|\sqrt{n}|t|.$$

Отсюда и из (5), (14) и (37) получаем

$$\left|e^{-\frac{itna}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{s-2}\tilde{\Pi}_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{4}|R_{i,n}(t)|+C(s)\frac{\delta(n)}{T_{sn}^{s-2}}\left(|t|^s+|t|^{3(s-2)}\right)e^{-\frac{t^2}{4}}+C|\bar{\alpha}_{[n/2],1}|\sqrt{n}|t|, \tag{62}$$

где

$$\tilde{\Pi}_\nu(it)=P_\nu(it)+\Pi_{4,\nu}(it), \qquad \nu=1,\ \ldots,\ s-2.$$

Пусть

$$g_n(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{s-2}\tilde{\Pi}_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right].$$

Тогда, согласно (62) и лемме, оценивая величины $|R_{i,n}(t)|$, $i=1,\ \ldots,\ 4$, аналогично тому, как в соотношениях (41), (42) и (45), имеем

$$\int_{-T_{sn}}^{T_{sn}}\left|\frac{e^{-\frac{itna}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-g_n(t)}{t}\right|dt=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right). \tag{63}$$

Поступая аналогично тому, как при оценке интеграла I_2 в доказательстве теоремы 1, получаем, что и

$$\int_{T_{sn}<|t|\leqslant T}\left|\frac{e^{-\frac{iant}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-g_n(t)}{t}\right|dt=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right), \tag{64}$$

где $T=n^{s/2}$.

Воспользовавшись соотношениями (63), (64) и одним обобщением известной теоремы Эссеена (см. [4], теорема 2), завершаем доказательство теоремы 2.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
20.VI.1971

Литература

1. С. В. Нагаев, Асимптотические разложения для функции распределения максимума сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, Сибирский матем. ж., **XI**, 2 (1970).
2. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее примен., **X**, 2 (1965).
3. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
4. Б. А. Рагозин, Скорость сходимости распределения максимума сумм независимых случайных величин к предельному закону, Теория вероятн. и ее примен., **XI**, 3 (1966).
5. Л. Д. Мешалкин, Б. А. Рагозин, Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме, Сб. „Предельные теоремы“, Ташкент, 1963.
6. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948.
7. С. В. Нагаев, Оценка скорости сходимости распределения максимума сумм независимых случайных величин, Сиб. матем. ж., **X**, № 3 (1969).
8. А. Алешкявичене, Локальные теоремы для времени до первого достижения в случайном блуждании, Liet. matem. rink., **XI**, 3 (1971), 477—496.

ASIMPTOTINIAI IŠDĖSTYMAI APIBENDRINTAM ATSTATYMO PROCESUI

A. Aleškevičienė

(*Reziumė*)

Sakykime, turime nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seką $\xi_1, \xi_2, \ldots$ su neišsigimusia pasiskirstymo funkcija. Tarkime, kad

$$a=\mathbf{M}\xi_1 \qquad \sigma^2=\mathbf{D}\xi_1, \qquad S_0=0, \qquad S_n=\sum_{l=1}^{n}\xi_l, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

$$\bar{S}_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i, \qquad n=1, 2, \ldots, \qquad \bar{F}_n(x)=\mathbf{P}\{\bar{S}_n\leqslant x\},$$

$$N(x)=\max\{n:\bar{S}_n\leqslant x\}.$$

Šiame darbe surasti asimptotiniai išdėstymai tikimybėms $\mathbf{P}\{N(x)=n\}$ ir pasiskirstymo funkcijoms $\bar{F}_n(x\sigma\sqrt{n}+an)$, kai $a>0$ ir $n\to\infty$.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR A NATURAL GENERALIZATION OF THE CLASSICAL RENEWAL THEORY

A. Aleškevičienė

Summary)

Let ξ_l, $l=1, 2, \ldots$, be a sequence of independent random variables with the same nondegenerate distribution function.

Let

$$a=\mathbf{M}\xi_1, \qquad \sigma^2=\mathbf{D}\xi_1, \qquad S_0=0, \qquad S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

$$\bar{S}_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i, \qquad n=1, 2, \ldots, \qquad \bar{F}_n(x)=\mathbf{P}\{\bar{S}_n\leqslant x\},$$

$$N(x)=\max\{n:\bar{S}_n\leqslant x\}.$$

In the present paper are obtained asymptotic expansions for the probability $P\{N(x)=n\}$ and for the function of distribution $\bar{F}_n(x\sigma\sqrt{n}+an)$ in the case when $a>0$ and $n\to\infty$.