XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1972

УДК 519.21

СХОДИМОСТЬ К ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЗАКОНАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. Бакштис

Целью настоящей работы является исследование той роли логарифмических законов распределения (з. р.), которую они играют в схеме перемножения независимых случайных величин (М-схеме) [1]. Кроме того, будут затронуты вопросы о месте квазисимметрических з. р. в центральной предельной проблеме М-схемы. В п. 1 дано распространение логарифмических з. р. на всю прямую. В п. 2 рассмотрены М-безгранично делимые (М-б. д.) логарифмические законы и, наконец, в п. 3 доказан критерий сходимости к квазисимметрическим з. р.

1. Пусть нам дана двойная последовательность случайных величин $\xi_{nk}(k=1,\ 2,\ \dots,\ k_n;\ n=1,\ 2,\ \dots)$, которые в каждой серии взаимно независимы. Образуем произведение

$$\zeta_n = a_n \xi_{n1} \xi_{n2} \ \dots\ \xi_{nk_n}, \tag{1}$$

где $a_n > 0\,(n=1,\ 2,\ \dots)$ – некоторая последовательность постоянных чисел. Очевидно, если функции распределения (ф. р.) произведений (1) при $n \to \infty$ сходятся к некоторой собственной ф. р., то ф. р. сумм

$$\ln|\zeta_n| = \ln a_n + \ln|\xi_{n1}| + \ln|\xi_{n2}| + \dots + \ln|\xi_{nk_n}| \tag{2}$$

при условии, что $\xi_{nk} \neq 0\,(1 \leqslant k \leqslant k_n)$, также сходятся к некоторой ф. р. Следовательно, те з. р., которые наиболее распространены в схеме суммирования независимых случайных величин (А-схеме), в М-схеме тоже будут популярными, но уже как логарифмические з. р. Распространим логарифмические з. р. на всю прямую следующим образом.

Собственный з. р. случайной величины ξ называем логарифмически Λ-законом, если

$$\mathbf{P}(\ln|\xi| < x \mid \xi \neq 0) = \Lambda(x). \tag{3}$$

Когда в качестве $\Lambda(x)$ возьмем нормальный, пуассоновский или несобственный з. р., то получим три классических з. р. в М-схеме: логарифмически нормальный, логарифмически пуассоновский и логарифмически несобственный з. р.

Найдем ф. р. случайной величины ξ,

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x),$$

считая ф. р. $\Lambda(x)$ известной. Положим

$$\mathbf{P}(\xi<0)=c^-, \quad \mathbf{P}(\xi>0)=c^+,$$

$$c^+ + c^- = \alpha_0, \quad c^+ - c^- = \alpha_1.$$

Из (3) вытекает, что

$$F(x)-F(-x+0)=\alpha_0\,\Lambda(\ln x)+1-\alpha_0, \tag{4}$$

где $x>0$. Поскольку нам известен з. р. только абсолютной величины $|\xi|$, то распределение на одной полуоси, например, отрицательной, можем задать произвольно:

$$F(x)=\Phi(x) \quad \text{для} \quad x<0,$$

где $\Phi(x)$ — любая ф. р. Тогда из (4) получаем ф. р. случайной величины ξ для $x>0$:

$$F(x)=\Phi(-x+0)+\alpha_0\,\Lambda(\ln x)+1-\alpha_0.$$

Конечно, чтобы полученное выражение могло быть ф. р., необходимо на $\Phi(x)$ наложить условия:

1) $\Phi(0)\leqslant\alpha_0$; (5)

2) при любых $0<x_1\leqslant x_2$,

$$\Phi(-x_1+0)-\Phi(-x_2+0)\leqslant\alpha_0\,[\Lambda(\ln x_2)-\Lambda(\ln x_1)]. \tag{6}$$

Элементы характеристического преобразования (х. п.) ф. р. $F(x)$ равны:

$$w_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{it}\,dF(x)=\int_{-\infty}^{0}|x|^{it}\,d\Phi(x)+\int_{0}^{+\infty}|x|^{it}\,d\Phi(-x)+$$

$$+\alpha_0\int_{0}^{+\infty}|x|^{it}\,d\Lambda(\ln x)=\alpha_0\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,d\Lambda(x)=\alpha_0 f(t),$$

где $f(t)$ — характеристическая функция (х. ф.) ф. р. $\Lambda(x)$;

$$w_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{it}\operatorname{sgn}x\,dF(x)=-\int_{-\infty}^{0}|x|^{it}\,d\Phi(x)+$$

$$+\int_{0}^{+\infty}|x|^{it}\,d\Phi(-x)+\alpha_0\int_{0}^{+\infty}|x|^{it}\,d\Lambda(\ln x)=\alpha_0 f(t)-2\varphi(t),$$

где

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{0}|x|^{it}\,d\Phi(x). \tag{7}$$

Приведем примеры логарифмических з. р., соответствующих классическим з. р. в А-схеме.

а) Если

$$\Lambda(x)=G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

то случайная величина ξ будет распределена по логарифмически нормальному закону с ф. р.

$$F(x)=\begin{cases}\Phi(x), & \text{если} \quad x\leqslant 0,\\ \Phi(-x+0)+\alpha_0 G(\ln x)+1-\alpha_0, & \text{если} \quad x>0,\end{cases}$$

где $0<\alpha_0\leqslant 1$ — параметр распределения, а $\Phi(x)$ — любая ф. р., удовлетворяющая условиям (5) и (6). Элементы х. п. этого з. р. равны

$$w_0(t)=\alpha_0 e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{8}$$

$$w_1(t)=\alpha_0 e^{-\frac{t^2}{2}}-2\varphi(t), \tag{9}$$

где функция $\varphi(t)$ определена по формуле (7).

б) Если

$$\Lambda(x)=\sum_{k<x}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

то случайная величина ξ будет распределена по логарифмически пуассоновскому з. р. с ф. р.

$$F(x)=\begin{cases}\Phi(x), & \text{если} \quad x\leqslant 0,\\ \Phi(-x+0)+\alpha_0\sum\limits_{k<\ln x}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+1-\alpha_0, & \text{если} \quad x>0,\end{cases}$$

где α_0 и $\Phi(x)$ имеют такой же смысл, как и в а). Элементы х. п. этого з. р. равны

$$w_0(t)=\alpha_0\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}, \tag{10}$$

$$w_1(t)=\alpha_0\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}-2\varphi(t), \tag{11}$$

где функция $\varphi(t)$ определена по формуле (7).

в) Наконец, чтобы получить логарифмически несобственный з. р., положим

$$\Lambda(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\leqslant 0,\\ 1, & \text{если} \quad x>0.\end{cases}$$

Теперь, согласно (6), ф. р. $\Phi(x)$ при $x<0$ может иметь единственную точку роста $x=-1$, в которой скачек должен удовлетворить условие (5). Следовательно, логарифмически несобственная случайная величина ξ принимает только три значения с вероятностями

$$\mathbf{P}(\xi=-1)=c^-, \quad \mathbf{P}(\xi=0)=1-c^+-c^-, \quad \mathbf{P}(\xi=1)=c^+,$$

где $0\leqslant c^-\leqslant 1$, $0\leqslant c^+\leqslant 1$, $0<c^++c^-\leqslant 1$. Элементы х. п. логарифмически несобственного з. р. равны

$$w_0(t)=\alpha_0, \quad w_1(t)=\alpha_1.$$

Если функциональное уравнение (4) решить в классе квазисимметрических ф. р. [2], то-есть таких ф. р., которые для всех $x>0$ удовлетворяют соотношение

$$1-F(x)=cF(-x+0),$$

где $c\,(0<c<+\infty)$ — постоянная, то получим с точностью до параметров c^+ и c^- единственное решение. Действительно, поскольку тогда (4) превращается в

$$\frac{1}{c}\,[(c+1)\,F(x)-1]=\alpha_0\,\Lambda(\ln x)+1-\alpha_0,$$

то с учетом того, что

$$c=\frac{\mathbf{P}\,(\xi>0)}{\mathbf{P}\,(\xi<0)}=\frac{c^+}{c^-}\ ,$$

находим:

$$F(x)=1-c^+\,[1-\Lambda(\ln x)] \quad \text{для} \quad x>0.$$

Аналогично, если (4) представить в виде

$$1-(c+1)\,F(-x+0)=\alpha_0\,\Lambda(\ln x)+1-\alpha_0,$$

то для $x>0$ получим

$$F(-x+0)=c^-\,[1-\Lambda(\ln x)],$$

или

$$F(x)=c^-\,[1-\Lambda(\ln|x|+0)] \quad \text{для} \quad x<0.$$

Легко проверить, что этой ф. р. $F(x)$ соответствует х. п. с элементами

$$w_0(t)=\alpha_0 f(t), \quad w_1(t)=\alpha_1 f(t),$$

где $f(t)$ — х. ф., соответствующая ф. р. $\Lambda(x)$. Таким образом, элементы х. п. соответственно равны:

а) квазисимметрического логарифмически нормального з. р.

$$w_j(t)=\alpha_j\,e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad j=0,\ 1;$$

б) квазисимметрического логарифмически пуассоновского з. р.

$$w_j(t)=\alpha_j \exp\{\lambda(e^{it}-1)\}, \quad j=0,\ 1.$$

2. В М-схеме безграничная делимость з. р. определяется относительно перемножения независимых случайных величин. Критерием служит следующая теорема В. М. Золотарева [1]:

Ф. р. $F(x)$ принадлежит классу М-б. д. з. $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда соответствующее ей х. п. имеет элементы вида

$$w_0(t)=\alpha_0 f^{(1)}(t)\,f^{(2)}(t), \quad w_1(t)=\alpha_1\,\frac{f^{(1)}(t)}{f^{(2)}(t)}\ ,$$

где: а) $f^{(\nu)}(t)$, $\nu=1,\ 2,$ — *х. ф. некоторых А-б. д. з., причем* $f^{(2)}(t)$ *имеет вид*

$$f^{(2)}(t)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\,dH(x)\right\} \tag{12}$$

$\Big($*$H(x)$ — функция Леви*$\Big)$; б) *вещественные параметры α_0 и α_1 удовлетворяют условиям*

$$0\leqslant\alpha_0\leqslant 1, \quad |\alpha_1|\leqslant\alpha_0\exp\left\{-2\int_{-\infty}^{+\infty}dH(x)\right\}.$$

Поскольку в качестве предельных з. р. для произведений „почти-единичных“ случайных величин (1) могут выступить только М-б. д. з., то не все логарифмические законы могут быть использованы для решения этой задачи. Пользуясь теоремой В. М. Золотарева можно выяснить, какие из логарифмически нормальных и логарифмически пуассоновских законов являются М-б. д. з.

Так как для логарифмически нормального з. р. имеем

$$w_0(t)=\alpha_0 e^{-\frac{t^2}{2}},$$

а х. ф. нормального закона разлагается на х. ф. только того же типа, стало быть

$$f^{(1)}(t)=e^{ita_1-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}},\quad f^{(2)}(t)=e^{ita_2-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}},$$

где

$$a_1+a_2=0,\quad \sigma_1^2+\sigma_2^2=1.$$

Поскольку х. ф. нормального закона не удовлетворяет условие (12), то должно быть $f^{(2)}(t)\equiv 1$. Тогда

$$f^{(1)}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Следовательно, логарифмически нормальный закон будет М-б. д. з. тогда и только тогда, когда

$$w_1(t)=\alpha_0 e^{-\frac{t^2}{2}}-2\varphi(t)=\alpha_1 e^{-\frac{t^2}{2}},\quad |\alpha_1|\leqslant\alpha_0,$$

т. е.

$$\varphi(t)=\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2}\, e^{-\frac{t^2}{2}},$$

что для ф. р. $\Phi(x)$ по формуле обращения дает

$$\Phi(x)=\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2}\,[1-G(\ln|x|)]\quad \text{для}\quad x<0.$$

Поэтому ф. р. М-б. д. логарифмически нормального з. р. имеет вид

$$F(\alpha_0,\ \alpha_1,\ x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha_0-\alpha_1}{2}\,[1-G(\ln|x|)] & \text{для}\quad x<0,\\[2ex] 1-\dfrac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\,[1-G(\ln x)] & \text{для}\quad x>0,\end{cases}$$

где параметры α_0, α_1 удовлетворяют условия:

$$0<\alpha_0\leqslant 1,\quad |\alpha_1|\leqslant\alpha_0.$$

Очевидно, условия (5) и (6) тоже удовлетворены.

Аналогично из класса логарифмически пуассоновских з. р. можо выделить подкласс М-б. д. з. р. Поскольку для логарифмически пуассоновского з. р. имеем

$$w_0(t)=\alpha_0\exp\{\lambda(e^{it}-1)\},$$

а х. ф. распределения Пуассона разлагается на х. ф. только того же типа, то

$$f^{(1)}(t)=\exp\{\lambda_1(e^{it}-1)\},\quad f^{(2)}(t)=\exp\{\lambda_2(e^{it}-1)\},$$

где

$$\lambda_1+\lambda_2=\lambda, \quad \lambda_1\geqslant 0, \quad \lambda_2\geqslant 0,$$

и $f^{(2)}(t)$ удовлетворяет условие (12), то логарифмически пуассоновский з. р. будет М-б. д. тогда и только тогда, когда

$$w_1(t)=\alpha_0 \exp\{\lambda(e^{it}-1)\}-2\varphi(t)=\alpha_1 \exp\{(\lambda_1-\lambda_2)(e^{it}-1)\},$$

где

$$|\alpha_1|\leqslant \alpha_0 e^{-2\lambda_2}. \tag{13}$$

Поэтому

$$\varphi(t)=\frac{\alpha_0}{2}\exp\{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)-\frac{\alpha_1}{2}\exp\{(\lambda_1-\lambda_2)(e^{it}-1)\}.$$

Отсюда по формуле обращения для $\Phi(x)$ из (7) вытекает, что

$$\Phi(x)=\frac{\alpha_0}{2}\sum_{k\geqslant \ln|x|}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}-\frac{\alpha_1}{2}\sum_{k\geqslant \ln|x|}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Очевидно, ф. р. $\Phi(x)$ условие (5) удовлетворяет. Условие же (6) будет удовлетворено тогда и только тогда, когда для любых $0<x_1<x_2$, удовлетворяющих условие $k-1<\ln x_1<k<\ln x_2<k+1$ (k — целое неотрицательное число), будет верно неравенство

$$\frac{\alpha_0}{2}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}-\frac{\alpha_1}{2}\cdot\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)}\leqslant$$

$$\leqslant \alpha_0\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е.

$$-\alpha_1\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\leqslant \alpha_0 e^{-2\lambda_2}.$$

Это неравенство выполняется всегда, как только имеет место (13). Поэтому ф. р. М-б. д. логарифмически пуассоновского распределения имеет вид: для $x<0$

$$F(x)=\frac{\alpha_0}{2}\sum_{k\geqslant \ln|x|}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}-\frac{\alpha_1}{2}\sum_{k\geqslant \ln|x|}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)},$$

а для $x>0$

$$F(x)=\frac{\alpha_0}{2}\sum_{k<\ln x}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}+\frac{\alpha_1}{2}\sum_{k<\ln x}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)}+$$

$$+1-\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}.$$

Отсюда для случайной величины ξ, имеющей М-б. д. логарифмически пуассоновский з. р., вытекает [1]:

$$\mathbf{P}\left(\xi=(-1)^j e^k\right)=\frac{1}{2k!}[\alpha_0(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}+(-1)^j\alpha_1(\lambda_1-\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1-\lambda_2)}],$$

$$\mathbf{P}(\xi=0)=1-\alpha_0,$$

$$\lambda_1\geqslant 0, \quad \lambda_2\geqslant 0, \quad \lambda_1+\lambda_2>0, \quad 0<\alpha_0\leqslant 1,$$

$$|\alpha_1|\leqslant \alpha_0 e^{-2\lambda_2}; \quad j=0,\ 1; \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Логарифмически несобственный з. р., очевидно, всегда М-б. д.

3. Из рассмотренных нами трех двусторонних М-б. д. з. р. только один, логарифмически пуассоновский, не является квазисимметрическим. Это можно установить по их х. п. [3].

Ф. р. $F(x)$ является квазисимметрической тогда и только тогда, когда элементы соответствующего ей х. п. удовлетворяют соотношение:

$$w_1(t) = K w_0(t),$$

где K ($|K| < 1$) — вещественная постоянная.

В данном случае, как это показано в [3], ф. р. $F(x)$ можно определить по ф. р. абсолютной величины $|\xi|$. Таким образом, если предельный для произведений (1) з. р. — квазисимметрический, можно обойтись только предельным з. р. для сумм (2) и величиной

$$c = \frac{1+K}{1-K} = \frac{\alpha_0+\alpha_1}{\alpha_0-\alpha_1}.$$

Докажем критерий сходимости ф. р. произведений (1) к некоторой предельной квазисимметрической ф. р. Пусть случайные величины ξ_{nk} с ф. р. $F_{nk}(x)$ являются М-предельно пренебрегаемыми: для любого $\varepsilon > 0$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mathbf{P}\left((|\xi_{nk}|-1)^2 > \varepsilon\right) \to 0 \quad (n\to\infty). \tag{14}$$

Определим независимые случайные величины $\tilde{\xi}_{nk}$ посредством ф. р. $\Lambda_{nk}(x)$:

$$\Lambda_{nk}(x) = \mathbf{P}(\tilde{\xi}_{nk} < x) = \mathbf{P}(\ln|\xi_{nk}| < x \mid \xi_{nk} \neq 0). \tag{15}$$

Если случайные величины ξ_{nk} являются М-предельно пренебрегаемыми, то $\tilde{\xi}_{nk}$ — предельно бесконечно малые [4]. Поэтому к последним применимы результаты А-схемы. Х. ф. случайной величины $\tilde{\xi}_{nk}$ равна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\mathbf{P}(\tilde{\xi}_{nk} < x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{it}\, d\mathbf{P}(\xi_{nk} < x \mid \xi_{nk} \neq 0) = {}_{nk}w_0(t \mid \xi_{nk} \neq 0).$$

Следовательно, [3, лемма 5],

$$\prod_{k=1}^{k_n} {}_{nk}w_0(t\mid \xi_{nk}\neq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{it}\, d\mathbf{P}\left(\prod_{k=1}^{k_n} \xi_{nk} < x \,\Big|\, \prod_{k=1}^{k_n} \xi_{nk} \neq 0\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{k_n} \ln|\xi_{nk}| < x \,\Big|\, \prod_{k=1}^{k_n} \xi_{nk} \neq 0\right)$$

и х. ф. закона

$$\mathbf{P}(\ln|\zeta_n| < x \mid \zeta_n \neq 0)$$

равна

$$a_n^{it} \prod_{k=1}^{k_n} {}_{nk}w_0(t\mid \xi_{nk}\neq 0).$$

Положим

$$\mathbf{P}(\xi_{nk}<0)=c_{nk}^-,\quad \mathbf{P}(\xi_{nk}>0)=c_{nk}^+,$$

$$\xi'_{nk}=\begin{cases}\xi_{nk}, & \text{если}\quad c_{nk}^+\geqslant c_{nk}^-,\\ -\xi_{nk}, & \text{если}\quad c_{nk}^+<c_{nk}^-,\end{cases}$$

$$F'_{nk}(x)=\mathbf{P}(\xi'_{nk}<x),\quad F'_{nk}(x\mid\xi'_n\neq 0)=\mathbf{P}(\xi'_{nk}<x\mid\xi'_{nk}\neq 0),$$

$$\beta_{nk}=\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c}\ln|x|\,dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0),\quad c>1$$

$$\Psi_n^{(2)}(x)=-\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{u^2}{1+u^2}\,dF'_{nk}(-e^{u+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0),$$

$$\gamma_n^{(2)}=-\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{1+u^2}\,dF'_{nk}(-e^{u+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0),$$

$$(\gamma,\Psi)=it\gamma+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\Psi(x).$$

Сходимость $\Psi_n(x)\xrightarrow{\text{вп.}}\Psi(x)$ при $n\to\infty$ означает, что $\Psi_n(x)$ сходятся к $\Psi(x)$ не только слабо, но и $\Psi_n(+\infty)\to\Psi(+\infty)$.

Из теоремы о каноническом представлении х. п. законов класса $\mathfrak{M}$ следует, что х. ф.

$$f^{(2)}(t)=\exp(\gamma^{(2)},\Psi^{(2)})$$

должна удовлетворять условия:

$$\gamma^{(2)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\,d\Psi^{(2)}(x),\tag{16}$$

$$|\alpha_1|\leqslant\alpha_0\exp\left\{-2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dH(x)\right\},\tag{17}$$

где функция Леви

$$H(x)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1+u^2}{u^2}\,d\Psi^{(2)}(u) & \text{для}\quad x<0,\\ \displaystyle-\int\limits_{x}^{+\infty}\frac{1+u^2}{u^2}\,d\Psi^{(2)}(u) & \text{для}\quad x>0.\end{cases}$$

В дальнейшем будем опираться на следующие два утверждения.

Теорема 1. *Для сходимости ф. р. произведений* (1), (14) *при некотором подборе постоянных* $a_n>0$ *к закону класса* $\mathfrak{M}$, *определяемому посредством* $w_0(t)$, α_1 *и* $f^{(2)}(t)=\exp(\gamma^{(2)},\Psi^{(2)})$, *удовлетворяющим условия* (16), (17), *необходимо и достаточно выполнения следующих условий.*

В случае $\alpha_1 \neq 0$: *при* $n \to \infty$

а) $\prod_{k=1}^{k_n} \left(c_{nk}^{+} + (-1)^j c_{nk}^{-}\right) \to \alpha_j, \quad j=0,\ 1,$

причем $\alpha_0 = w_0(0)$;

б) *суммы* $\tilde{\xi}_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \tilde{\xi}_{nk_n} + \ln a_n$, *где* $\tilde{\xi}_{nk}$ — *независимые случайные величины с ф. р.* (15), *имеют предельным закон с х. ф.* $w_0(t)/w_0(0)$;

в) $\Psi_n^{(2)}(x) \xrightarrow{\text{en.}} \Psi^{(2)}(x)$,

$\gamma_n^{(2)} \to \gamma^{(2)}$.

В случае $\alpha_1 = 0$, $w_0(0) \neq 0$ *условия* а) *и* б) *сохраняются, а условие* в) *становится излишним.*

В случае $w_0(0) = 0$ *сохраняется только условие* а) *с* $j = 0$.

Доказательство этой теоремы см. в [4, теорема 3 и лемма 5].

Лемма. *Если случайные величины* ξ_{nk} — *М-предельно пренебрегаемы и выполнено условие* а) *теоремы* 1, *причем* $\alpha_1 \neq 0$, *то существует такая, независящая от* n, *постоянная* C, *что*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(\xi'_{nk} < 0) < C \tag{18}$$

и для всех достаточно больших n

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(\xi'_{nk} < 0 \mid \xi'_{nk} \neq 0) < 2C.$$

Доказательство. Если обозначить через m_n число в серии ξ_{n1}, ξ_{n2}, ..., ξ_{nk_n} таких случайных величин ξ_{nk}, для которых $c_{nk}^{+} < c_{nk}^{-}$, то

$$\prod_{k=1}^{k_n} [\mathbf{P}(\xi'_{nk} > 0) - \mathbf{P}(\xi'_{nk} < 0)] = (-1)^{m_n} \prod_{k=1}^{k_n} (c_{nk}^{+} - c_{nk}^{-}),$$

$$\prod_{k=1}^{k_n} [\mathbf{P}(\xi'_{nk} > 0) + \mathbf{P}(\xi'_{nk} < 0)] = \prod_{k=1}^{k_n} (c_{nk}^{+} + c_{nk}^{-}).$$

Когда выполнено условие а) теоремы 1 и $\alpha_1 \neq 0$, то, начиная с некоторого n, все числа m_n становятся или четными (когда $\alpha_1 > 0$), или нечетными (когда $\alpha_1 < 0$), так что

$$\prod_{k=1}^{k_n} \frac{\mathbf{P}(\xi'_{nk} > 0) - \mathbf{P}(\xi'_{nk} < 0)}{\mathbf{P}(\xi'_{nk} > 0) + \mathbf{P}(\xi'_{nk} < 0)} \to \frac{|\alpha_1|}{\alpha_0} > 0 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому, согласно лемме 2 из [4], имеет место (18). Далее, поскольку случайные величины ξ_{nk} — М-предельно пренебрегаемы, то для любого $0 < \varepsilon < 1$ при $n \to \infty$

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathbf{P}(\xi'_{nk} \neq 0) \geqslant 1 - \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathbf{P}\left((|\xi'_{nk}| - 1)^2 > \varepsilon\right) \to 1,$$

т. е.

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathbf{P}(\xi'_{nk} \neq 0) \to 1 \quad (n \to \infty). \tag{19}$$

Поэтому для всех достаточно больших n и всех $k\,(1 \leqslant k \leqslant k_n)$

$$\mathbf{P}(\xi'_{nk} \neq 0) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\xi'_{nk} < 0 \,|\, \xi'_{nk} \neq 0) \leqslant 2\mathbf{P}(\xi'_{nk} < 0)$$

и из первого утверждения леммы вытекает второе.

Следующая теорема дает нам критерий, когда по предельной ф. р. для сумм (2) можно определить предельную ф. р. произведений (1), (14). В этой теореме случайные величины $\bar{\xi}_{nk}$ имеют ф. р. (15).

Теорема 2. *Для сходимости ф. р. произведений* (1), (14) *при подходящем подборе постоянных $a_n > 0$ к закону класса $\mathfrak{M}$, определяемому посредством $f^{(1)}(t)$, $f^{(2)}(t) \equiv 1$, α_0 и α_1, необходимо и достаточно выполнения следующих условий.*

В случае $\alpha_1 \neq 0$: при $n \to \infty$

1) $\prod_{k=1}^{k_n} \left(c_{nk}^{+} + (-1)^j c_{nk}^{-}\right) \to \alpha_j, \quad j = 0,\ 1;$

2) *суммы* $\bar{\xi}_{n1} + \bar{\xi}_{n2} + \ldots + \bar{\xi}_{nk_n} + \ln a_n$ *имеют предельным закон с х. ф.* $f^{(1)}(t)$;

3) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} dF'_{nk}(-e^x) \to 0;$

4) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \tau} x\,dF'_{nk}(-e^x) \to 0;$

5) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \tau} x^2\,dF'_{nk}(-e^x) \to 0,$

где $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0\,(\varepsilon < \tau)$ — произвольно выбранные числа.

В случае $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 \neq 0$ условия 1) *и* 2) *сохраняются, а условия* 3)—5) *становятся излишними.*

В случае $\alpha_0 = 0$ сохраняется только условие 1) *с $j = 0$.*

Если суммы в условии 2) *имеют предельной ф. р. $\Lambda(x)$, то ф. р. $F(x)$, предельная для произведений* (1), (14), *определяется формулой:*

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}\,[1 - \Lambda(\ln|x| + 0)] & \text{для} \quad x < 0, \\[2ex] 1 - \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\,[1 - \Lambda(\ln x)] & \text{для} \quad x > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Сопоставляя теоремы 1 и 2, видим, что в случаях $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 \neq 0$ и $\alpha_0 = 0$ необходимые и достаточные условия в них совпадают. Поэтому остается рассмотреть только случай $\alpha_1 \neq 0$. Поскольку $f^{(2)}(t) \equiv 1$, то $\gamma^{(2)} = 0$, $\Psi^{(2)}(x) \equiv 0$ и условия в теоремы 1 превращаются в следующие: при $n \to \infty$

$$\Psi_n^{(2)}(+\infty) = -\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0) \to 0, \tag{21}$$

$$\gamma_n^{(2)} = -\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0) \to 0. \tag{22}$$

Если для произвольно выбранного $\tau > 0$ представить $-\gamma_n^{(2)}$ в виде

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} x\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0) - \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} x\,d\Psi_n^{(2)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geq\tau} \frac{1}{x}\, d\Psi_n^{(2)}(x),$$

то получим, что (21) и (22) эквивалентны (21) и

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} x\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{23}$$

Из (21) вытекает, что для любого $\delta > 0$ при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{k_n} [F'_{nk}(0 \mid \xi'_{nk} \neq 0) - F'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk} \neq 0)] \to 0 \quad (x < -\delta), \tag{24}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} F'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk} \neq 0) \to 0 \quad (x > \delta). \tag{25}$$

Действительно, поскольку

$$\sum_{k=1}^{k_n} dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0) = -\frac{1+x^2}{x^2}\, d\Psi_n^{(2)}(x),$$

то при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{k_n} [F'_{nk}(0 \mid \xi'_{nk} \neq 0) - F'_{nk}(-e^{u+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0)] =$$

$$= -\int_{-\infty}^{u} \frac{1+x^2}{x^2}\, d\Psi_n^{(2)}(x) \to 0 \quad (u < 0), \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} F'_{nk}(-e^{u+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk} \neq 0) = -\int_{u}^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^2}\, d\Psi_n^{(2)}(x) \to 0 \quad (u > 0). \tag{27}$$

Согласно лемме 3 из [4]

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\beta_{nk}| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{28}$$

Поэтому для любого $\delta>0$ и всех достаточно больших n верны неравенства $|\beta_{nk}|<\delta\,(1\leqslant k\leqslant k_n)$, откуда для всех достаточно больших n и всех $k\,(1\leqslant \leqslant k\leqslant k_n)$

$$F'_{nk}(-e^{u+\delta}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)\leqslant F'_{nk}(-e^{u+\beta_{nk}}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)\leqslant F'_{nk}(-e^{u-\delta}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0).$$

Следовательно, если имеет место (27), то

$$\sum_{k=1}^{k_n} F'_{nk}(-e^{u+\delta}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0) \to 0 \quad (u>0,\ n \to \infty).$$

Положив здесь $u+\delta=x$, получим (25). Аналогично доказывается и (24).

Рассмотрим, далее, условие (23). Левую часть этого условия можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)=$$

$$=\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x-\beta_{nk}|<\tau} (x-\beta_{nk})\,dF'_{nk}(-e^{x}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)=I_1+I_2,$$

где

$$I_1=\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} (x-\beta_{nk})\,dF'_{nk}(-e^{x}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0) =$$

$$=\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{|x|<\tau} x\,dF'_{nk}(-e^{x}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)-\beta_{nk}\int\limits_{|x|<\tau} dF'_{nk}(-e^{x}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x\,dF'_{nk}(-e^{x}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)-\sum_{k=1}^{k_n}\beta_{nk}\,F'_{nk}(-e^{\tau}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)-$$

$$-\sum_{k=1}^{k_n}\beta_{nk}\,[F'_{nk}(0\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)-F'_{nk}(-e^{-\tau}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{k_n}\beta_{nk}\,F'_{nk}(0\,|\,\xi'_{nk}\neq 0),$$

$$I_2=\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{|x-\beta_{nk}|<\tau}(x-\beta_{nk})\,dF'_{nk}(-e^{x}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{|x|<\tau}(x-\beta_{nk})\,dF'_{nk}(-e^{x}\,|\,\xi'_{nk}\neq 0)\right\}.$$

Вторая и третья суммы в I_1 мажорируются суммой

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\beta_{nk}|\sum_{k=1}^{k_n}\{F'_{nk}(-e^{\tau}\mid\xi'_{nk}\neq 0)+F'_{nk}(0\mid\xi'_{nk}\neq 0)-$$
$$-F'_{nk}(-e^{-\tau}\mid\xi'_{nk}\neq 0)\},$$

которая, согласно (24), (25) и (28), при $n\to\infty$ сходится к нулю. Четвертая сумма, согласно лемме, имеет порядок $O(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\beta_{nk}|)$, т. е. при $n\to\infty$ тоже сходится к нулю. Кроме того, для любого произвольно выбранного $\varepsilon>0\,(\varepsilon<\tau)$ при всех достаточно больших n будут выполнены неравенства $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\beta_{nk}|<\varepsilon$, в силу которых будет верна оценка

$$|I_2|\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{\tau-\varepsilon<|x|<\tau+\varepsilon}|(x-\beta_{nk})\,dF'_{nk}(-e^{x}\mid\xi'_{nk}\neq 0)|\leqslant$$
$$\leqslant-(\tau+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|\geqslant\tau-\varepsilon}dF'_{nk}(-e^{x}\mid\xi'_{nk}\neq 0).$$

Отсюда, согласно (24) и (25), вытекает, что $I_2\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, условия (21) и (23) эквивалентны (21) и

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\tau}x\,dF'_{nk}(-e^{x}\mid\xi'_{nk}\neq 0)\to 0\ (n\to\infty),\tag{29}$$

причем $\tau>0$ может быть выбран произвольно.

Рассмотрим условие (21). Так как для любого $\tau>0$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0)=$$
$$=\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\tau}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0)+$$
$$+\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|\geqslant\tau}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0)$$

и, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\tau}x^2\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\tau}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{1+\tau^2}\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\tau}x^2\,dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}}\mid\xi'_{nk}\neq 0),$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\geqslant\tau} dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk}\neq 0) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\geqslant\tau} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk}\neq 0) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau^2}{1+\tau^2} \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\geqslant\tau} dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk}\neq 0),$$

то условие (21) эквивалентно следующим: для произвольно выбранного $\tau>0$ при $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\geqslant\tau} dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk}\neq 0) \to 0, \tag{30}$$

$$\sum_{k=1}^{kn} \int\limits_{|x|<\tau} x^2\, dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk}\neq 0) \to 0. \tag{31}$$

Далее, имеем

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x^2\, dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk}\neq 0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x^2\, dF'_{nk}(e^{-x} \mid \xi'_{nk}\neq 0) + I_3,$$

где

$$I_3 = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_{|x|<\tau} x^2\, dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk}\neq 0) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{|x|<\tau} x^2\, dF'_{nk}(-e^{x} \mid \xi'_{nk}\neq 0) \right\}.$$

Для достаточно больших n имеют место оценки:

$$|I_3| = \left| \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_{|x-\beta_{nk}|<\tau} (x-\beta_{nk})^2\, dF'_{nk}(-e^{x} \mid \xi'_{nk}\neq 0) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int\limits_{|x|<\tau} x^2\, dF'_{nk}(-e^{x} \mid \xi'_{nk}\neq 0) \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant (\tau+\varepsilon)^2 \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\geqslant\tau-\varepsilon} |dF'_{nk}(-e^{x} \mid \xi'_{nk}\neq 0)| +$$

$$+ 2 \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\beta_{nk}| \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau+\varepsilon} |x\, dF'_{nk}(-e^{x} \mid \xi'_{nk}\neq 0)| +$$

$$+ \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \beta_{nk}^2 \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau+\varepsilon} |dF'_{nk}(-e^{x} \mid \xi'_{nk}\neq 0)| \leqslant$$

$$\leqslant -(\tau+\varepsilon)^2 \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\geqslant\tau-\varepsilon} dF'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk}\neq 0)+$$

$$+[2(\tau+\varepsilon)\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\beta_{nk}| + \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \beta_{nk}^2] \sum_{k=1}^{k_n} F'_{nk}(0 \mid \xi'_{nk}\neq 0),$$

$$\left| \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\geqslant\tau} dF'_{nk}(-e^{x+\beta_{nk}} \mid \xi'_{nk}\neq 0) \right| =$$

$$=\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x-\beta_{nk}|\geqslant\tau} |dF'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk}\neq 0)| \leqslant -\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\geqslant\tau-\varepsilon} dF'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk}\neq 0).$$

Из этих оценок, поскольку суммы

$$\sum_{k=1}^{k_n} F'_{nk}(0 \mid \xi'_{nk}\neq 0),$$

согласно лемме ограничены, вытекает, что условия (30) и (31) эквивалентны следующим: для произвольно выбранных $\tau>0$ и $\varepsilon>0\,(\varepsilon<\tau)$ при $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} dF'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk}\neq 0) \to 0, \tag{32}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x^2\, dF'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk}\neq 0) \to 0. \tag{33}$$

Таким образом, условия в) теоремы 1, когда $\gamma^{(2)}=0$ и $\Psi^{(2)}(x)\equiv 0$, эквивалентны условиям (29), (32) и (33). Освободимся в них от условия $\xi'_{nk}\neq 0$. Поскольку, согласно (20), для всех достаточно больших n и всех $k\,(1\leqslant k\leqslant k_n)$

$$2\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} dF'_{nk}(-e^x) \leqslant \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} dF'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk}\neq 0) \leqslant \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} dF'_{nk}(-e^x),$$

то (32) эквивалентно условию 3) теоремы 2. Аналогично доказывается эквивалентность условий (33) и 5).

Наконец, рассмотрим условие (29). Из оценок

$$\left| \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x\,dF'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk}\neq 0) - \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x\,dF'_{nk}(-e^x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} [1-\mathbf{P}(\xi'_{nk}\neq 0)] \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} |x\,dF'_{nk}(-e^x \mid \xi'_{nk}\neq 0)| \leqslant$$

$$\leqslant [1-\min_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mathbf{P}(\xi'_{nk}\neq 0)]\,\tau \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(\xi'_{nk}<0 \mid \xi'_{nk}\neq 0),$$

согласно (19) и лемме, вытекает эквивалентность (29) и условия 4) теоремы 2.

Формула для предельной ф. р. произведений (1), (14) выводится следующим образом. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда произведения (1), (14) имеют предельную ф. р. $F(x)$, а суммы в условии 2) — предельную ф. р. $\Lambda(x)$. Множество таких $x>0$, что $\pm x$ являются точками непрерывности ф. р. $F(x)$, а $\ln x$ — точкой непрерывности ф. р. $\Lambda(x)$, обозначим $\mathfrak{A}$. Поскольку точек разрыва ф. р. $F(x)$ и $\Lambda(x)$ не более чем счетное множество, то для каждого $x>0$ при любом $\varepsilon>0$ существует $x'\in\mathfrak{A}$, удовлетворяющее неравенство $|x-x'|<\varepsilon$, т. е. множество $\mathfrak{A}$ — плотное в положительной полуоси.

Пусть $\alpha_0\neq 0$. Тогда для $x\in\mathfrak{A}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\zeta_n|<x \mid \zeta_n\neq 0)=\Lambda(\ln x), \tag{34}$$

а также

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\zeta_n|<x \mid \zeta_n\neq 0)=\frac{1}{\alpha_0}\,[F(x)-F(-x)-1+\alpha_0]. \tag{35}$$

Если $|\alpha_1|<\alpha_0$, то ф. р. $F(x)$ — квазисимметрическая и из (34) и (35) вытекает, что

$$F(x)=1-\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\,[1-\Lambda(\ln x)],$$

$$F(-x)=\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2}\,[1-\Lambda(\ln x)].$$

Если же $|\alpha_1|=\alpha_0$, тогда предельное распределение целиком расположено только на одной полуоси. Например, если $\alpha_1=\alpha_0$, то для $x<0$

$$F(x)\leqslant F(0)=\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2}=0$$

и из (34) и (35) вытекает утверждение теоремы. Аналогично доказывается случай $\alpha_1=-\alpha_0$.

Пусть $\alpha_0=0$. Тогда $\alpha_1=0$ и для любого $x>0$

$$F(-x)\leqslant F(0)=0,$$

$$F(x)\geqslant F(+0)=1-\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}=1,$$

т. е. $F(x)$ — несобственная ф. р.

Для $x\notin\mathfrak{A}$ ф. р. $F(x)$ определяется, как обычно, по непрерывности слева. Теорема доказана.

Как легко заметить, ф. р. $F(x)$ является Λ-логарифмической.

Каунасский Политехнический институт, Шяуляй

Поступило в редакцию 23.X.1970

Литература

1. В. М. Золотарев, Общая теория перемножения независимых случайных величин, ДАН СССР, **142**, 4(1962), 788–791.
2. В. М. Золотарев. Преобразования Меллина–Стилтьеса в теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., **11**, 4 (1957), 444–469.
3. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций (III), Liet. matem. rink., **VIII**, 4(1968), 643–680.
4. А. Бакштис, Сходимость законов распределения произведений независимых случайных величин, Liet. matem. rink., **XI**, 4 (1971), 727–744.

KONVERGAVIMAS PRIE LOGARITMINIŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ

A. Bakštys

(*Reziumė*)

Darbe logaritminiai pasiskirstymo dėsniai apibrėžiami visoje tiesėje ir įrodomas kriterijus, kada pagal tam tikrų nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų ribinę pasiskirstymo funkciją galima rasti nepriklausomų atsitiktinių dydžių sandaugų ribinę pasiskirstymo funkciją.

KONVERGENZ GEGEN LOGARITHMISCHE VERTEILUNGSGESETZE

A. Bakštys

(*Zussammenfassung*)

In der Arbeit werden die logarithmischen Verteilungsgesetze auf ganze Achse definiert, ebenso ist das Kriterium bewiesen, mit welchem man die Grenzverteilungsfunktion der Produkte von unabhängigen zufälligen Veränderlichen aus der Grenzverteilungsfunktion der Summen von der gewissenen unabhängigen zufälligen Veränderlichen bestimmen kann.