XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1972

УДК 519.21

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

И. И. Банис

Рассматривается последовательность

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Пусть функция распределения суммы S_n будет $F_n(x)$, где

$$S_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n). \tag{2}$$

Обозначим функцию распределения предельного устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha\ (0<\alpha\leqslant 2)$ через $G(x)$.

Псевдомоменты и обсолютные псевдомоменты обозначим соответственно через $\mu(m)$ и $\nu(m)$, где

$$\mu(m) = \int x^m\, d\Big(F(x) - G(x)\Big), \tag{3}$$

$$\nu(m) = \int |x|^m \Big|d\, \Big(F(x) - G(x)\Big)\Big|. \tag{4}$$

Оценки скорости сходимости получены в работах [1], [2] в случае предельного устойчивого закона с показателем $\alpha\ (0<\alpha\leqslant 2)$. Для случая нормального закона методом композиций получена скорость сходимости в работе [3], именно:

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C\nu(3)}{\sqrt{n}} \quad \text{при} \quad \nu(3)\geqslant 1$$

и

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C\nu(3)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} \quad \text{при} \quad \nu(3)<1,$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения нормального закона.

В этой заметке получена аналогичная оценка скорости сходимости в случае предельного устойчивого закона методом характеристических функций.

Теорема 1. *Для функции распределения $F_n(x)$ суммы S_n и функции распределения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha\ (0<\alpha\leqslant 2)$ имеют место следующие оценки:*

$$\sup_x |F_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{C\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \quad \textit{при} \quad \nu(r)\geqslant 1 \tag{5}$$

и

$$\sup_x |F_n(x)-G(x)| \leqslant \frac{C\nu(r)^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \quad при \quad \nu(r)<1, \tag{6}$$

если:

а) *существует* $\nu(r)$, $r=1+[\alpha]$ *и*

б) $\mu(0)=\cdots=\mu(r-1)=0$,

где $C=C(\alpha)$.

Теорема 2. *Для функции распределения $F_n(x)$ суммы S_n и функции распределения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha(0<\alpha\leqslant 2)$ имеют место следующие оценки*:

$$\sup_x |F_n(x)-G(x)| \leqslant \frac{C\nu(1+\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \quad при \quad \nu(1+\alpha)\geqslant 1 \tag{7}$$

и

$$\sup_x |F_n(x)-G(x)| \leqslant \frac{C\nu(1+\alpha)^{\frac{1}{2+\alpha}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \quad при \quad \nu(1+\alpha)<1, \tag{8}$$

если:

в) *существует* $\nu(1+\alpha)$ *и*

г) $\mu(0)=\cdots=\mu(r)=0$.

Для доказательства теоремы необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Если случайные величины последовательности* (1) *удовлетворяют условиям* а *и* б, *то для*

$$|t|\leqslant T, \quad T=n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,16^{-\frac{1}{\alpha}}\,\nu(r)^{-1}, \quad \nu(r)\geqslant 1$$

имеет место оценка:

$$|f_n(t)-g(t)|\leqslant n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}\cdot 3\sqrt{e}\,\nu(r)\,|t|^r e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}. \tag{9}$$

Лемма 2. *Если случайные величины последовательности* (1) *удовлетворяют условиям* в *и* г, *то для*

$$|t|\leqslant T, \quad T=n^{\frac{1}{\alpha}}\,6^{-1}\,\nu(1+\alpha)^{-1}, \quad \nu(1+\alpha)\geqslant 1$$

имеет место оценка:

$$|f_n(t)-g(t)|\leqslant n^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot 3\,\nu(1+\alpha)\,|t|^{1+\alpha} e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}. \tag{10}$$

Лемма 3. *Если случайные величины последовательности* (1) *удовлетворяют условиям* а *и* б, *то для*

$$|t|\leqslant T, \quad T=n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}\,6^{-\frac{1}{r-\alpha}}\,\nu(r)^{-\frac{1}{r+1}} \quad и \quad \nu(r)<1$$

имеет место оценка:

$$|f_n(t)-g(t)|\leqslant n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}\cdot 3\,\nu(r)\,|t|^r e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha \nu(r)^{\frac{\alpha}{r+1}}}. \tag{11}$$

Лемма 4. *Если случайные величины последовательности* (1) *удовлетворяют условиям* в *и* г, *то для*

$$|t| \leqslant T, \quad T = n^{\frac{1}{\alpha}} 6^{-1} \nu(1+\alpha)^{-\frac{1}{2+\alpha}} \quad и \quad \nu(1+\alpha) < 1$$

имеет место оценка:

$$|f_n(t) - g(t)| \leqslant n^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot 3\nu(1+\alpha) |t|^{1+\alpha} e^{-\frac{1}{2}|t|^{\alpha} \nu(1+\alpha)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}}. \tag{12}$$

$f_n(t)$ – характеристическая функция суммы (2) и $g(t)$ – характеристическая функция устойчивого закона с показателем $\alpha (0 < \alpha \leqslant 2)$.

Первая и вторая леммы доказываются аналогично [5].

Докажем лемму 3, а лемма 4 доказывается аналогично лемме 2.

Пусть

$$\Delta = |f_n(t) - g(t)| = \left| f^n\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g(t) \right| =$$

$$= e^{-|t|^{\alpha}\nu(r)^{\frac{\alpha}{r+1}}} \left| f^n\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g^{-1}\left(t\nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) - g(t)\, g^{-1}\left(t\nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) \right| =$$

$$= e^{-|t|^{\alpha}\nu(r)^{\frac{\alpha}{r+1}}} \left| \left[f\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}} \nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) \right]^n - \right.$$

$$\left. - \left[g\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}} \nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) \right]^n \right|.$$

Полученное выражение под модулем разложим по формуле

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + b^{n-1}). \tag{13}$$

Представляя $f\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = g\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) + \omega\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$, получаем при $|t| \leqslant T$ следующую оценку:

$$\left| f\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}} \nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) - g\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}} \nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3|t|^r \nu(r)}{n^{\frac{r}{\alpha}}}. \tag{14}$$

Заметим, что для выражения

$$\left| \left[f\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}} \nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) \right]^{n-k} \left[g\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}} \nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) \right]^{k-1} \right|$$

имеет место оценка:

$$\left| \left[f\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}} \nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) \right]^{n-k} \left[g\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g^{-1}\left(tn^{-\frac{1}{\alpha}} \nu(r)^{\frac{1}{r+1}}\right) \right]^{k-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{3(n-k)\frac{|t|^r \nu(r)}{n^{\frac{r}{\alpha}}}} \leqslant e^{\frac{3|t|^r \nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}} \tag{15}$$

В силу (14) и (15) получаем при $|t| \leqslant T$, что

$$\Delta \leqslant \frac{3|t|^r \nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} e^{-\frac{|t|^\alpha \nu(r)^{\frac{\alpha}{r+1}}}{2}} \tag{16}$$

Доказательство теоремы 1. Пользуясь леммой 1 и неравенством Эссеена [4], получаем

$$\sup_x |F_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{3k\sqrt{e}\,\nu(r)}{2\pi n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \int_{-T}^{T} |t|^{r-1} e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha} dt + \frac{c(k)A}{T}, \tag{17}$$

где $A = \sup_x |G'(x)|$.

Оценим интеграл

$$\int_{-T}^{T} |t|^{r-1} e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha} dt \leqslant \frac{2^{\frac{r+\alpha}{\alpha}}}{\alpha} \int_0^\infty s^{\frac{r}{\alpha}-1} e^{-s} ds = \frac{2^{\frac{r+\alpha}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right)}{\alpha}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что

$$\sup_x |F_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{C\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}, \tag{19}$$

где

$$C = \frac{3k\sqrt{e}}{2\pi\alpha} 2^{\frac{r+\alpha}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right) + c(k)A \cdot 16^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Пользуясь леммой 3, получаем

$$\sup_x |F_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{2k\nu(r)}{2\pi n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \int_{-T}^{T} |t|^{r-1} e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha \nu(r)^{\frac{\alpha}{r+1}}} dt + \frac{c(k)A}{T}\cdot \tag{20}$$

Оценим интеграл

$$\int_{-T}^{T} |t|^{r-1} e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha \nu(r)^{\frac{\alpha}{r+1}}} dt \leqslant \frac{2^{\frac{r+\alpha}{\alpha}}}{\alpha\nu(r)^{\frac{r}{r+1}}} \int_0^\infty s^{\frac{r}{\alpha}-1} e^{-s} ds = \frac{2^{\frac{r+\alpha}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right)}{\alpha\nu(r)^{\frac{r}{r+1}}}. \tag{21}$$

Тогда из (20) и (21) следует

$$\sup_x |F_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{C\nu(r)^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}, \tag{22}$$

где

$$C = \frac{3k}{2\pi\alpha} 2^{\frac{r+\alpha}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right) + c(k)A \cdot 6^{\frac{1}{r-\alpha}}.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, разница лишь в том, что здесь используются леммы 2 и 4.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
21.V.1971

Литература

1. В. М. Золотарев, Аналог асимптотического разложения Эджворта — Крамера для случая сближения с устойчивыми законами распределения, Труды VI Всес. совещ. по теории вероятн. и матем. стат., Вильнюс, 1962, 49—50.
2. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., **X**, 3 (1965), 519—526.
3. В. Паулаускас, Об одном усилении теоремы Ляпунова, Liet. matem. rink., **IX**, 2 (1969), 323—328.
4. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., Гостехиздат, 1949.
5. И. И. Банис, Н. Б. Калинаускайте, П. С. Вайткус, О скорости сходимости к устойчивым распределениям в локальной теореме, Liet. matem. rink., **XI**, 3 (1971), 511—516.

KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTINIMAS INTEGRALINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE

J. Banys

(Reziumė)

Straipsnyje gautas konvergavimo greitis, kai (1) sekos atsitiktiniai dydžiai tenkina sąlygas (а), (б) ir (в), (г), atitinkamai

$$|F_n(x)-G(x)|\leqslant \frac{C\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}, \quad \nu(r)\geqslant 1,$$

$$|F_n(x)-G(x)|\leqslant \frac{C\nu(r)^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}, \quad \nu(r)<1,$$

ir

$$|F_n(x)-G(x)|\leqslant \frac{C\nu(1+\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \nu(1+\alpha)\geqslant 1,$$

$$|F_n(x)-G(x)|\leqslant \frac{C\nu(1+\alpha)^{\frac{1}{2+\alpha}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \nu(1+\alpha)<1.$$

ON THE ESTIMATION OF THE RATE OF CONVERGENCE IN THE INTEGRAL LIMIT THEOREM

J. Banys

(Summary)

The article presents the rate of convergence when random variables of the sequenc (1) satisfy the conditions (а), (б) and (в), (г), then

$$|F_n(x)-G(x)|\leqslant \frac{C\nu(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}, \quad \nu(r)\geqslant 1,$$

$$|F_n(x)-G(x)|\leqslant \frac{C\nu(r)^{\frac{1}{r+1}}}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}, \quad \nu(r)<1,$$

and

$$|F_n(x)-G(x)| \leqslant \frac{C\nu(1+\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \nu(1+\alpha) \geqslant 1,$$

$$|F_n(x)-G(x)| \leqslant \frac{C\nu(1+\alpha)^{\frac{1}{2+\alpha}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \nu(1+\alpha) < 1.$$