XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1972

УДК 519.21

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В R^k. II

А. Бикялис

§ 1. Обозначения

$(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ и $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из k-мерного евклидового пространства R^k; $|\mathbf{x}|=\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$; $\mathbf{0}$ – нулевой вектор в R^k; $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{R}$ – соответственно, классы измеримых выпуклых и борелевских множеств в R^k.

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – последовательность независимых k-мерных случайных векторов, координаты которых имеют равные нулю математические ожидания; $F_{\xi_j}(\mathbf{x})$ – функция распределения случайного вектора ξ_j; $\mathbf{\Theta}=(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$ – случайный вектор с функцией распределения $F_\Theta(\mathbf{x})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_{\xi_j}(x)$; V – матрица ковариаций вектора $\mathbf{\Theta}$; $\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$.

$P\{\ldots\}$ – вероятность события, указанного в скобках; $\Phi_{\mathbf{u},\,D}(A)$ – k-мерное нормальное распределение с центром распределения $\mathbf{u}$ и с ковариационной матрицей D; $M(\mathbf{t}, \mathbf{\Theta})^m$ – математическое ожидание случайной величины $(\mathbf{t}, \mathbf{\Theta})^m=(t_1\Theta_1+t_2\Theta_2+\ldots+t_k\Theta_k)^m$.

Пусть $T=\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_k\}$ – система линейно независимых k-мерных векторов в R^k; $C=\left\{\mathbf{x}: \sum_{j=1}^{k}\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t}_j)^2}{M(\mathbf{\Theta}, \mathbf{t}_j)^2}\leqslant z^2\right\}$;

$$L_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sup_{\substack{0<z\leqslant\sqrt{n}\\ T}}\left\{\left|\int_C\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t}_{i_1})(\mathbf{x}, \mathbf{t}_{i_2})(\mathbf{x}, \mathbf{t}_{i_3})}{\sqrt{M(\mathbf{\Theta}, \mathbf{t}_{i_1})^2 M(\mathbf{\Theta}, \mathbf{t}_{i_2})^2 M(\mathbf{\Theta}, \mathbf{t}_{i_3})^2}}\,dF_{\xi_j}(\mathbf{x})\right|+\right.$$

$$\left.+z\sum_{i=1}^{k}\int_{|(\mathbf{x}, \mathbf{t}_i)|>z\sqrt{M(\mathbf{\Theta}, \mathbf{t}_i)^2}}\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{t}_i)^2}{M(\mathbf{\Theta}, \mathbf{t}_i)^2}\,dF_{\xi_j}(\mathbf{x})\right\}, \qquad i_1\neq i_2\neq i_3.$$

$C_1(k), C_2(k), \ldots$ – положительные функции.

§ 2. Оценка остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме

Еще раз вернемся к оценке разности

$$R_n(A)=P\{\mathbf{S}_n\in A\}-\Phi_{0,\,V}(A), \quad A\in\mathfrak{A}.$$

В первой части настоящей работы мы дали обзор и полную библиографию работ (см. еще [42–49]), в которых затронута эта задача. Здесь расширим достаточные условия для оценки $R_n(A)$, т. е. потребуем, чтобы слагаемые $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имели конечные дисперсии и чтобы матрица V была невырождена. Для оценки $R_n(A)$ использовали усеченные моменты третьего порядка и „хвосты" дисперсий случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Для одномерных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ оценка такого типа впервые получена Ц.-Г. Эссееном в [50, теорема 2]. При $k=1$ из нашей теоремы 1 вытекает утверждение Ц.-Г. Эссеена.

Теорема 1. *Если независимые k-мерные случайные векторы имеют конечные моменты второго порядка и матрица V невырождена, то существует положительная функция $C_1(k)$ такая, что*

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |R_n(A)| \leqslant \frac{C_1(k)}{\sqrt{n}} L_n.$$

Доказательство теоремы 1. Оно незначительно отличается от доказательства теоремы 1 первой части [49] настоящей работы.

Так как класс $\mathfrak{A}$ инвариантный относительно линейных невырожденных преобразований, то

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |P\{\mathbf{S}_n\in A\}-\Phi_{0,V}(A)| = \sup_{A\in\mathfrak{A}} |P\{\mathbf{S}_nB\in A\}-\Phi_{0,I}(A)|.$$

Здесь $B=\left\| \frac{u_{ij}}{\sqrt{M(\Theta,\mathbf{u}_j)^2}} \right\|$ — матрица, столбцы которой образуют координаты векторов $\frac{\mathbf{u}_i}{\sqrt{M(\Theta,\mathbf{u}_i)^2}} = \frac{1}{\sqrt{M(\Theta,\mathbf{u}_i)^2}}(u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{ik})$. Векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ линейно независимы и такие, что случайные величины $(\Theta,\mathbf{u}_1), (\Theta,\mathbf{u}_2), \ldots, (\Theta,\mathbf{u}_k)$ некоррелированы. Такую нормировку впервые использовал В. В. Сазонов.

Рассмотрим усеченные векторы

$$\eta_j = \begin{cases} \xi_j B & \text{при } |\xi_j B| \leqslant \sqrt{n}, \\ 0 & \text{при } |\xi_j B| > \sqrt{n}. \end{cases}$$

Пусть $M\eta_j$ — вектор математических ожиданий случайного вектора η_j; ζ — случайный вектор с функцией распределения $F_\zeta(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_{\eta_j}(\mathbf{x}+M\eta_j)$; Λ — матрица вторых моментов вектора ζ; $\mathbf{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\eta_j - M\eta_j)$; $D=\left\| \frac{\omega_{ij}}{\sqrt{M(\zeta,\omega_i)^2}} \right\|$ — матрица порядка $k\times k$, где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ — линейно независимые векторы, выбранные так, чтобы случайные величины (ζ,ω_1), $(\zeta,\omega_2), \ldots, (\zeta,\omega_k)$ были некоррелированными.

Лемма 1.

$$\left| M(\zeta,\mathbf{t})^2 - |\mathbf{t}|^2 \right| \leqslant 2|\mathbf{t}|^2 \int_{|\mathbf{x}|\geqslant\sqrt{n}} |\mathbf{x}|^2 dF_{\Theta B}(\mathbf{x}). \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) показывает, что для всех n, для которых имеет место неравенство

$$\int_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}} |\mathbf{x}|^2 dF_{\Theta B}(\mathbf{x}) < \frac{1}{4}, \tag{2.3}$$

матрица Λ положительно определена. Так как в противоположных случаях доказываемые неравенства тривиальные, то в дальнейшем будем считать, что неравенство (2.3) выполнено. Отметим, что при этих условиях имеет место неравенство

$$M(\zeta,\ \mathbf{t})^2 \geqslant \frac{|\mathbf{t}|^2}{2}.$$

В силу леммы 8 из [49]

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |R_n(A)| \leqslant nP\{|\Theta B| > \sqrt{n}\} + \sup_{A\in\mathfrak{A}} |\Phi_{MZ_n,\ \Lambda}(A) - \Phi_{0,\ I}(A)| + \\ + \sup_{A\in\mathfrak{A}} |P\{\mathbf{Z}_n D \in A\} - \Phi_{0,\ I}(A)|. \tag{2.4}$$

Очевидно

$$nP\{|\Theta B| > \sqrt{n}\} \leqslant \int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}} |\mathbf{x}|^2 dF_{\Theta B}(\mathbf{x}). \tag{2.5}$$

Пользуясь утверждением леммы 7 из [49] и неравенством (2.2), получаем

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |\Phi_{MZ_n,\ A}(A) - \Phi_{0,\ I}(A)| \leqslant C_2(k) \int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}} |\mathbf{x}|^2 dF_{\Theta B}(\mathbf{x}). \tag{2.6}$$

Осталось оценить разность

$$J = \sup_{A\in\mathfrak{A}} |P\{\mathbf{Z}_n D \in A\} - \Phi_{0,\ I}(A)|.$$

Известное неравенство Б. вон Бары (см. [11]) утверждает, что

$$J \leqslant 2 \sup_{A\in\mathfrak{R}} \left| [P\{\mathbf{Z}_n D \in A\} - \Phi_{0,\ I}(A)] * H\left(\frac{A}{\varepsilon}\right) \right| + \\ + C_3(k) \sup_{\mathbf{y}} \int\limits_{(\mathring{A})_\varepsilon} d\Phi_{0,\ I}(\mathbf{y}+\mathbf{x}).$$

Здесь $*$ — знак композиции; $H\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)$ — известное распределение; $(\mathring{A})_\varepsilon$ — ε-окрестность контура множества A; ε — любое положительное число. Нам удобно далее выбрать $\varepsilon = \frac{C_4(k)\, L_n}{\sqrt{n}}$.

В [11] показано, что для $A\in\mathfrak{A}$

$$C_3(k) \sup_{\mathbf{y}} \int\limits_{(\mathring{A})_\varepsilon} d\Phi_{0,\ I}(\mathbf{y}+\mathbf{x}) \leqslant C_5(k)\,\varepsilon. \tag{2.7}$$

Пусть далее $f_j(\mathbf{t})$ — характеристическая функция случайного вектора $(\eta_j - M\eta_j)D$; $f^{(n)}(\mathbf{t}) = \prod\limits_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{t})$; $h(\mathbf{t})$ — характеристическая функция, соответствующая распределению $H(A)$; $\beta_j = M|\zeta D|^j$; $\zeta = (\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_k)$; $\varkappa_3 = \sum\limits_{l_1 l_2 l_3} |M\zeta_{l_1}\zeta_{l_2}\zeta_{l_3}|$, где $\sum\limits_{l_1 l_2 l_3}$ обозначает суммирование по всем $l_1,\ l_2,\ l_3 = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$; $\alpha_n = C_6(k)\, n^{\frac{1}{6}}\, \beta_{k+3}^{-\frac{1}{3(k+1)}}$.

Существует функция $C_7(k)$ такая, что

$$J \leqslant \frac{C_7(k) L_n}{\sqrt{n}} + C_7(k) \left(\int\limits_{|t| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}} \left| \left(f^{(n)}(t) - e^{-\frac{|t|^2}{2}} \right) h(t\varepsilon) \right|^2 dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{k} \int\limits_{|t| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}} \left| \frac{\partial^{k+3}}{\partial t_m^{k+3}} \left[\left(f^{(n)}(t) - e^{-\frac{|t|^2}{2}} \right) h(t\varepsilon) \right] \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

Здесь все интегралы оцениваются одинаково. Поскольку

$$\left| \frac{\partial^p h(t)}{\partial t_m^p} \right| \leqslant C_8(k) < \infty,$$

то достаточно оценить следующий интеграл:

$$Y_\varepsilon = \int\limits_{|t| < \frac{1}{\varepsilon}} \left| \frac{\partial^p}{\partial t_m^p} \left(f^{(n)}(t) - e^{-\frac{|t|^2}{2}} \right) \right|^2 dt \tag{2.9}$$

при $p = 0, 1, \ldots, k+3$ и $m = 1, 2, \ldots, k$.

Теперь рассмотрим разность

$$Y_p(t) = \left| \frac{\partial^p}{\partial t_m^p} \left(f^{(n)}(t) - e^{-\frac{|t|^2}{2}} \right) \right|.$$

В силу леммы 16 из [49] для $|t| \leqslant \alpha_n$ имеет место неравенство

$$Y_p \leqslant \frac{1}{6\sqrt{n}} \left| \frac{\partial^p}{\partial t_m^p} \left(e^{-\frac{|t|^2}{2}} M(t, \zeta D)^3 \right) \right| +$$

$$+ \sum_{r=4}^{k+3} \frac{C_9(k) \beta_r |t|^{v_r} e^{-\frac{|t|^2}{8}}}{n^{\frac{r-2}{2}}}. \tag{2.10}$$

Здесь $v_r = r - p$ при $r \geqslant p$ и $v_r = 0$ при $r < p$. Нетрудно заметить, что

$\varkappa_3 \leqslant C_{10}(k) L_n$

и для всех $t \in R^k$ и $q = 0, 1, \ldots, k+3$

$$\left| \frac{\partial^q}{\partial t_m^q} M(t, \zeta D)^3 \right| \leqslant C_{11}(k)(1 + |t| + |t|^3) L_n. \tag{2.11}$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial t_m^p} \left(e^{-\frac{|t|^2}{2}} M(t, \zeta)^3 \right) \right| \leqslant C_{12}(k)(1 + |t| + |t|^{k+4}) \frac{L_n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{|t|^2}{2}}. \tag{2.12}$$

Поскольку $|\zeta D| \leqslant \sqrt{k} |\zeta|$, то для $r = 4, 5, \ldots$

$$\beta_r = M |\zeta D|^r \leqslant \frac{\sqrt{k}^r}{4} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{R^k} |x - M\eta_j|^r dF_{\eta_j}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{\frac{3r}{2}} \sqrt{k}}{n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x| \leqslant \sqrt{n}} |x|^r dF_{\xi_j B}(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{3r}{2}} n^{\frac{r-2}{2}} \sqrt{k} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x| \leqslant \sqrt{n}} |x|^4 dF_{\xi_j B}(x). \tag{2.13}$$

Лемма 2.

$$\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt{n}} |\mathbf{x}|^4\, dF_{\xi_j B}(\mathbf{x}) \leqslant 2k \sum_{i=1}^{k} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{n}{k}}} u \int\limits_{|x_1|\leqslant\sqrt{\frac{n}{k}}} \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{|x_i|>u} \cdots \int\limits_{|x_k|\leqslant\sqrt{\frac{n}{k}}} x_i^2\, dF_{\xi_j B}(\mathbf{x})\, du. \tag{2.14}$$

Доказательство леммы 2 очевидное.

Из (2.10—2.14) вытекает

$$Y_p(\mathbf{t}) \leqslant \frac{C_{13}(k) L_n}{\sqrt{n}} (1+|\mathbf{t}|+|\mathbf{t}|^{k+3})\, e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{4}}$$

и

$$\int\limits_{|\mathbf{t}|\leqslant\alpha_n} Y_p^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} \leqslant \frac{C_{14}(k) L_n^2}{n}. \tag{2.15}$$

Пользуясь неравенством

$$\alpha_n \leqslant C_{15}(k)\, n^{\frac{1}{6(k+1)}} \Big/ L_n^{\frac{1}{3(k+1)}}, \tag{2.16}$$

получаем

$$\int\limits_{\alpha_n\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}} \left| \frac{\partial^p}{\partial t_m^p} \left(f^{(n)}(\mathbf{t}) - e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}} \right) \right|^2 d\mathbf{t} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\alpha_n\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}} \left| \frac{\partial^p}{\partial t_m^p} f^{(n)}(\mathbf{t}) \right|^2 d\mathbf{t} + \frac{C_{16}(k) L_n^2}{n}. \tag{2.17}$$

Переходим к оценке интеграла

$$Y_\alpha = \int\limits_{\alpha_n\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}} \left| \frac{\partial^p}{\partial t_m^p} f^{(n)}(\mathbf{t}) \right|^2 d\mathbf{t}$$

при $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k+3$ и $m=1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Докажем две общие леммы.

Лемма 3. *Пусть координаты k-мерного случайного вектора ξ_j имеют равные нулю математические ожидания и конечные дисперсии. Тогда*

$$|g_j(\mathbf{t})|^2 \leqslant 1 - M(\mathbf{t},\ \xi_j)^2 + 47\, \omega_j\, |\mathbf{t}|^3.$$

Здесь $g_j(\mathbf{t})$ — характеристическая функция случайного вектора ξ_j;

$$\omega_j = \sup_{\substack{z>0\\ |\mathbf{e}_t|=1}} z \int\limits_{|(\mathbf{e}_t,\ \mathbf{x})|>z} (\mathbf{e}_t,\ \mathbf{x})^2\, dF_{\xi_j}(\mathbf{x}).$$

Доказательсто леммы 3. Пусть $\varphi_j(u) = g_j(u\mathbf{t})$ — характеристическая функция случайной величины $(\mathbf{t},\ \xi_j)$. Она удовлетворяет всем условиям леммы 3 из [49], следовательно, для всех u

$$|\varphi_j(u)|^2 \leqslant 1 - u^2 M(\mathbf{t},\ \xi_j)^2 + 47\, \varkappa_{0j}(\mathbf{t})\, |u|^3. \tag{2.18}$$

Здесь

$$\varkappa_{0j}(\mathbf{t})=\sup_{z>0} z \int\limits_{|(\mathbf{t},\,\mathbf{x})|>z} (\mathbf{t},\ \mathbf{x})^2\, dF_{\xi_j}(\mathbf{x}).$$

Поскольку $|\varphi_j(1)|^2=|g_j(\mathbf{t})|^2$ и при $|\mathbf{t}|\neq 0$ имеет место неравенство $\varkappa_{0j}(\mathbf{t})\leqslant \leqslant |\mathbf{t}|^3\omega_j$, то из (2.18) вытекает утверждение леммы 3. В случае $|\mathbf{t}|=0$ утверждение леммы 3 тривиальное.

Лемма 4. *Если выполнены условия леммы 3, то для всех*

$$\mathbf{t}\in\left\{\mathbf{t}:\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_j(\mathbf{t})\leqslant\frac{\sqrt{n}}{94}(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^2\right\}$$

имеет место неравенство

$$\left|\prod_{j=1}^{n} g_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{4}}.$$

Здесь

$$\rho_j(\mathbf{t})=\sup_{z>0}\left(\left|\int\limits_{|(\mathbf{x},\,\mathbf{t})|\leqslant z}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^3\,dF_{\xi_j}(\mathbf{x})\right|+z\int\limits_{|(\mathbf{x},\,\mathbf{t})|>z}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^2\,dF_{\xi_j}(\mathbf{x})\right).$$

Доказательство леммы 4. Пусть $|\mathbf{t}|\neq 0$. В силу леммы 4 из [49]

$$\left|\prod_{j=1}^{n}\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n(\mathbf{t}V\mathbf{t}')}}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{u^2}{2}}$$

при $|u|\leqslant\sqrt{n}(\mathbf{t}V\mathbf{t}')^{\frac{3}{2}}\Big/\left(\frac{94}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\rho_j(\mathbf{t})\right)$. Здесь выбираем $u=\sqrt{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}$ и получаем утверждение леммы 4. В случае $\mathbf{t}=0$ утверждение леммы тривиальное.

Следствие 1. *Для характеристической функции $f^{(n)}(\mathbf{t})$ для всех $\mathbf{t}\in\{\mathbf{t}:|\mathbf{t}|\leqslant C_{17}(k)\sqrt{n}/L_n\}$ справедливо неравенство*

$$|f^{(n)}(\mathbf{t})|\leqslant e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{4}}.$$

Действительно,

$$\rho_j(\mathbf{t})\leqslant|\mathbf{t}|^3\sup_{z>0}\left(\left|\int\limits_{\substack{|\mathbf{x}|\leqslant z\\ |(\mathbf{x},\,\mathbf{e}_t)|\leqslant z}}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_t)^3\,d\overline{\overline{F}}_j(\mathbf{x})\right|+\right.$$

$$+\left|\int\limits_{\substack{|\mathbf{x}|>z\\ |(\mathbf{x},\,\mathbf{e}_t)|\leqslant z}}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_t)^3\,d\overline{\overline{F}}_j(\mathbf{x})\right|+z\int\limits_{|(\mathbf{x},\,\mathbf{e}_t)|>z}(\mathbf{x},\ \mathbf{e}_t)^2\,d\overline{\overline{F}}_j(\mathbf{x})\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant 2|\mathbf{t}|^3\sup_{z>0}\left(\sum_{l_1 l_2 l_3}\left|\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant z}x_{l_1}x_{l_2}x_{l_3}\,d\overline{\overline{F}}_j(\mathbf{x})\right|+\right.$$

$$\left.+z\int\limits_{|\mathbf{x}|>z}|\mathbf{x}|^2\,d\overline{\overline{F}}_j(\mathbf{x})\right).$$

где $\bar{\bar{F}}_j(\mathbf{x})$ – функция распределения случайного вектора $(\eta_j - M\eta_j)D$. Поскольку $\mathbf{t}\Lambda\mathbf{t}' \geqslant \frac{|\mathbf{t}|^2}{2}$, то

$$U = \sum_{l_1 l_2 l_3} \Big| \int_{|\mathbf{x}| \leqslant z} x_{l_1} x_{l_2} x_{l_3} \, d\bar{\bar{F}}_j(\mathbf{x}) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l_1 l_2 l_3} 2^3 \Big| \int_{\substack{|\mathbf{x}| \leqslant \sqrt{n} \\ |\mathbf{x}D^{-1}| \leqslant z}} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{l_1})(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{l_2})(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{l_3})}{|\mathbf{u}_{l_1}|\,|\mathbf{u}_{l_2}|\,|\mathbf{u}_{l_3}|} \, dF_{\xi_j B}(\mathbf{x}) \Big| +$$

$$+ 2^6 \sum_{l_1 l_2 l_3} \Big[\Big| \Big(M\eta_j, \frac{\mathbf{u}_{l_1}}{|\mathbf{u}_{l_1}|}\Big) \Big(M\eta_j, \frac{\mathbf{u}_{l_2}}{|\mathbf{u}_{l_2}|}\Big) \Big(M\eta_j, \frac{\mathbf{u}_{l_3}}{|\mathbf{u}_{l_3}|}\Big) \Big| +$$

$$+ \Big| \Big(M\eta_j, \frac{\mathbf{u}_{l_1}}{|\mathbf{u}_{l_1}|}\Big) \Big(M\eta_j, \frac{\mathbf{u}_{l_2}}{|\mathbf{u}_{l_2}|}\Big) \Big| + \Big| \Big(M\eta_j, \frac{\mathbf{u}_{l_1}}{|\mathbf{u}_{l_1}|}\Big) \Big| \Big].$$

Используя соотношение $\left\{ \mathbf{x} : |\mathbf{x}| \leqslant \frac{z}{2\sqrt{k}} \right\} \subset \{ \mathbf{x} : |\mathbf{x}D^{-1}| \leqslant z \}$, выводим

$$U \leqslant C_{18}(k) \sum_{l_1 l_2 l_3} \Big| \int_{\substack{|\mathbf{x}| \leqslant \sqrt{n} \\ |\mathbf{x}| \leqslant \frac{z}{2\sqrt{k}}}} x_{l_1} x_{l_2} x_{l_3} \, dF_{\xi_j B}(\mathbf{x}) \Big| +$$

$$+ C_{19}(k) z \int_{\frac{z}{2\sqrt{k}} < |\mathbf{x}| \leqslant \sqrt{n}} |\mathbf{x}|^2 \, dF_{\xi_j B}(\mathbf{x}).$$

После аналогичных подсчетов вытекает

$$\int_{z < |\mathbf{x}|} |\mathbf{x}|^2 \, dF_j(\mathbf{x}) \leqslant C_{20}(k) \int_{\frac{z}{2\sqrt{k}} < |\mathbf{x}| \leqslant \sqrt{n}} |\mathbf{x}|^2 \, dF_{\xi_j B}(\mathbf{x}).$$

Следовательно,

$$\rho_j(\mathbf{t}) \leqslant C_{21}(k) |\mathbf{t}|^3 \sup_{0 < z \leqslant \sqrt{n}} \Big(\sum_{l_1 l_2 l_3} \Big| \int_{|\mathbf{x}| < z} x_{l_1} x_{l_2} x_{l_3} \, dF_{\xi_j B}(\mathbf{x}) \Big| +$$

$$+ z \int_{|\mathbf{x}| > z} |\mathbf{x}|^2 \, dF_{\xi_j B}(\mathbf{x}) \Big) \leqslant C_{22}(k) |\mathbf{t}|^3 L_n.$$

Следствие 1 доказано.

Лемма 5. *Для всех* $|\mathbf{t}| \leqslant \frac{1}{\epsilon}$ *имеет место неравенство*

$$\left| \frac{\partial^r f^{(n)}(\mathbf{t})}{\partial t_m^r} \right| \leqslant C_{23}(k) \sum_{l=1}^{k+3} \Big(1 + |\mathbf{t}|^2 + |\mathbf{t}|^{r-1} + \frac{L_n}{\sqrt{n}} \Big)^l \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{|\mathbf{t}|^2}{3} + \Big(\frac{r}{16}\Big)^{\frac{1}{3}} |\mathbf{t}|^{\frac{4}{3}} \right\}. \tag{2.19}$$

Доказательство леммы 5. Из лемм 3 и 4 следует, что неравенство (2.19) справедливо при $r = 1, 2, 3$. Так как

$$\left| \frac{\partial^l f_j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)}{\partial t_m^l} \right| \leqslant C_{24}(k) \frac{\beta_l^{(j)}}{n^{\frac{l}{2}}}$$

для $l=4, 5, \ldots, k+3$ и $m=1, 2, \ldots, k$, где $\beta_l^{(j)} = \sum_{m=1}^{k} \left| \frac{\partial^l f_j(\mathbf{t})}{\partial t_m^l}\Big|_{\mathbf{t}=0} \right|$, то в силу (5.24) из [49] имеем

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial t_m^r} f^{(n)}(\mathbf{t}) \right| \leqslant C_{25}(k) \prod_{j=1}^{k+3} \left(1+|\mathbf{t}|^2+|\mathbf{t}|^r+\frac{\beta_j}{n^{\frac{j-2}{2}}}\right)^r \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{3}+\left(\frac{r}{16}\right)^{\frac{1}{3}} |\mathbf{t}|^{\frac{4}{3}}\right\}.$$

Лемма 5 доказана.

Из (2.16) и (2.19) следует, что

$$Y_\alpha \leqslant C_{26}(k) \frac{L_n^2}{n}.$$

Отсюда и (2.4–2.9; 2.15; 2.17) немедленно вытекает утверждение теоремы 1.

§ 3. Необходимые и достаточные условия для оценки $R_n(A)$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Предположим, что они имеют равные нулю математические ожидания и невырожденную матрицу вторых моментов V. Исследуем необходимые и достаточные условия для того, чтобы при $n \to \infty$ имело место соотношение $R_n(A)=O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right)$, $0<\delta\leqslant 1$. В случае $k=1$ эту задачу решил И. А. Ибрагимов в [51]. Из наших теорем следует утверждение И. А. Ибрагимова.

Здесь используем обозначения, введенные в § 1. Заметим, что случайные векторы ξ_1 и Θ имеют одинаковые функции распределения, т. е. $F_{\xi_1}(\mathbf{x})=F_\Theta(\mathbf{x})=F(\mathbf{x})$. Константы $C_1, C_2, \ldots$ не зависят от n.

Теорема 2. *Для того чтобы при $n \to \infty$ имело место соотнсшение*

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |R_n(A)|=O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \quad 0<\delta\leqslant 1, \tag{3.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

1)

$$\sup_{|\mathbf{t}|=1} \sup_{y\in R^1} |P\{(\mathbf{S}_n, \mathbf{t})<y\}-P\{(\eta, \mathbf{t})<y\}| = O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \quad 0<\delta\leqslant 1. \tag{3.2}$$

Здесь η обозначает случайный вектор с нормальным распределением $\Phi_{0,V}(A)$.

Теорема 3. *Для того, чтобы при $n \to \infty$ имело место соотношение*

$$\sup_{A\in\mathfrak{R}} |R_n(A)|=O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \quad 0<\delta\leqslant 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие 1) *теоремы* 2 *и условие*

2) *существует целое число n_0 такое, что распределение $P\{\mathbf{S}_{n_0}\in A\}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту.*

Замечание 1. В случае $0<\delta<1$ условия 1) и

3) для всех $|\mathbf{t}|=1$

$$\int\limits_{|(\mathbf{x},\,\mathbf{t})|>z} (\mathbf{x},\ \mathbf{t})^2 dF(\mathbf{x})=O(z^{-\delta}), \qquad z\to\infty,$$

эквивалентные.

Замечание 2. В случае $\delta=1$ условие 1) эквивалентно следующим двум условиям: условию 3) с $\delta=1$ и условию

4) для всех $|\mathbf{t}|=1$

$$\int\limits_{-z}^{z}\dots\int\limits_{-z}^{z}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^3 dF(\mathbf{x})=O(1), \qquad z\to\infty.$$

Замечание 3. Условия 3) и

5)

$$\sum_{j=1}^{k}\ \int\limits_{|x_j|>z} x_j^2\, dF(\mathbf{x})=O(z^{-\delta}), \qquad z\to\infty,$$

эквивалентные.

Используя теоремы 3.1 и 3.2 из [51], легко получаем утверждения замечаний 1 и 2. Замечание 3 очевидное.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть $A_{\mathbf{t}}(y)=\{\mathbf{x}:(\mathbf{x},\ \mathbf{t})<y\}$, тогда

$$\sup_{|\mathbf{t}|=1}\ \sup_{y\in R^1}\left|R_n\left(A_{\mathbf{t}}(y)\right)\right|\leqslant\sup_{A\in\mathfrak{A}}|R_n(A)|=O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right).$$

Достаточность. Отдельно рассмотрим два случая: при $0<\delta<1$ и при $\delta=1$. Если $0<\delta<1$, то при $\mathbf{t}=\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \dots,\ \mathbf{e}_k$, где $\mathbf{e}_l$ — единичный вектор на l-той координатной оси в R^k, из (3.2) и теоремы 3.1 работы [51] следует

$$\int\limits_{|x_j|>z} x_j^2\, dF_j(x_j)=O(z^{-\delta}), \qquad z\to\infty, \tag{3.3}$$

для $j=1,\ 2,\ \dots,\ k$. Здесь $F_j(x_j)$ — функция распределения случайной величины ξ_{1j}. ξ_{1j} — j-тая координата случайного вектора $\boldsymbol{\xi}_1$. Следовательно,

$$L_n=\sup_{\substack{0<z\leqslant\sqrt{n}\\ T}}\left\{\left|\int\limits_{C}\frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{t}_{i_1})(\mathbf{x},\ \mathbf{t}_{i_2})(\mathbf{x},\ \mathbf{t}_{i_3})}{\sqrt{M(\boldsymbol{\xi}_1,\ \mathbf{t}_{i_1})^2 M(\boldsymbol{\xi}_1,\ \mathbf{t}_{i_2})^2 M(\boldsymbol{\xi}_1,\ \mathbf{t}_{i_3})^2}}\,dF(\mathbf{x})\right|+\right.$$

$$\left.+z\sum_{j=1}^{k}\ \int\limits_{|(\mathbf{x},\,\mathbf{t}_j)|>z\sqrt{M(\boldsymbol{\xi}_1,\,\mathbf{t}_j)^2}}\frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{t}_j)^2}{M(\boldsymbol{\xi}_1,\ \mathbf{t}_j)^2}\,dF(\mathbf{x})\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_1(z_0)+C_2\sup_{z_0<z\leqslant\sqrt{n}}\left\{\ \int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant\frac{z}{\sqrt{k\lambda}}}|\mathbf{x}|^3 dF(\mathbf{x})+\right.$$

$$\left.+zk\int\limits_{|\mathbf{x}|>z\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}|\mathbf{x}|^2 dF(\mathbf{x})\right\}\leqslant C_3(z_0)+$$

$$+C_4 \sup_{z_0<z\leqslant\sqrt{n}} \left\{ O(z^{1-\delta})+\sum_{j=1}^{k} \int_0^{z\sqrt{\frac{\lambda}{k}}} \int_{|u_j|>v_j} u_j^2\, dF_j(u_j)\, dv_j \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_5(z_0)+C_6 \sup_{z_0<z\leqslant\sqrt{n}} \{O(z^{1-\delta})\}=O(\sqrt{n}^{1-\delta}).$$

Здесь z_0 – некоторое большое положительное число, λ – наименьшее собственное значение матрицы V. Отсюда и из теоремы 1 следует утверждение теоремы 2.

Пусть теперь $\delta=1$. Используя утверждение теоремы 3.2 из [51], получаем, что имеет место соотношение (3.3) с $\delta=1$. Поэтому

$$L_n \leqslant C_7(z_0)+C_8 \sup_{z_0<z\leqslant\sqrt{n}} \left\{ \left| \int_C (\mathbf{x},\ \mathbf{u}_{l_1})(\mathbf{x},\ \mathbf{u}_{l_2})(\mathbf{x},\ \mathbf{u}_{l_3})\, dF(\mathbf{x}) \right| \right. . \tag{3.4}$$

Пусть далее $\mathbf{u}_{l_1}$, $\mathbf{u}_{l_2}$, $\ldots$, $\mathbf{u}_{l_s}$ – линейно независимые векторы, длина которых равна единице; $C_z=\left\{ \mathbf{x}: |\mathbf{x}_i| \leqslant \frac{z}{\sqrt{k\lambda}},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k \right\}$. Очевидно, что $C_z \subset C$ и

$$\left| \int_C (\mathbf{x},\ \mathbf{u}_{l_1})(\mathbf{x},\ \mathbf{u}_{l_2})(\mathbf{x},\ \mathbf{u}_{l_3})\, dF(\mathbf{x}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \sum_{l_1 l_2 l_3} \left| \int_{C_z} x_{l_1} x_{l_2} x_{l_3}\, dF(\mathbf{x}) \right| + C_{10}. \tag{3.5}$$

Осталось показать, что для l_1, l_2, $l_3=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ имеет место соотношение

$$\int_{-z}^{z} \ldots \int_{-z}^{z} x_{l_1} x_{l_2} x_{l_3}\, dF(\mathbf{x})=O(1), \qquad z\to\infty. \tag{3.6}$$

Из (3.2) и теоремы 3.2 из [51] следует, что

$$\left| \int_{|(\mathbf{x},\ \mathbf{t})|<z} (\mathbf{x},\ \mathbf{t})^3\, dF(\mathbf{x}) \right| \leqslant C_{11}(\mathbf{t}), \qquad z\to\infty, \tag{3.7}$$

для $|\mathbf{t}|=1$. При $\mathbf{t}=\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_k$ получаем

$$\int_{|x_j|\leqslant z} x_j^3\, dF(\mathbf{x})=O(1), \qquad z\to\infty \quad \text{и} \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Следовательно, соотношение (3.6) справедливо при $l_1=l_2=l_3$.

Пусть теперь $\mathbf{t}=(0,\ \ldots,\ 0, t_j, 0,\ \ldots,\ 0, t_l, 0,\ \ldots,\ 0)$, где $t_l=\sqrt{1-t_j^2}$, тогда

$$\left| \int_{|x_j t_j+t_l x_l|\leqslant z} (x_j t_j+x_l t_l)^3\, dF(\mathbf{x}) \right| \leqslant C_{11}(\mathbf{t}).$$

Очевидно

$$\left| \int_{-z}^{z} \ldots \int_{-z}^{z} \left(x_j^2 x_l t_j^2 \sqrt{1-t_j^2}+x_j x_l^2 t_j (1-t_j^2) \right) dF(\mathbf{x}) \right| \leqslant C_{12}(\mathbf{t}).$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{-z}^{z} \ldots \int_{-z}^{z} x_j^2 x_l \, dF(\mathbf{x}) = O(1), \qquad z \to \infty,$$

при $j,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Аналогичным образом выводим, что

$$\int_{-z}^{z} \ldots \int_{-z}^{z} x_i x_j x_l \, dF(\mathbf{x}) = O(1), \qquad z \to \infty,$$

при $i,\ j,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ и $i \neq j \neq l$. Соотношение (3.6) доказано.

Из (3.4), (3.5) и (3.6) следует, что

$$L_n = O(1), \qquad n \to \infty.$$

В силу теоремы 1 имеет место соотношение (3.1). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Очевидно, что условие 1) необходимое. В силу теоремы 1 из [3] условие 2) также необходимое.

Достаточность условия 1) доказана методом Ю. В. Прохорова. Для случайных векторов автор этот метод использовал, например, в [14]. Все рассуждения подробно излагать не будем, так как в следующей части настоящей работы докажем более общие утверждения, из которых будет выведена теорема 3.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 27.I.1971

Литература

42. H. Bergström, On the Central Limit Theorem in R_k. The Remainder term for special Borel sets, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verb. Geb., B. **14** (1969), 113–126.

43. R. N. Bhattacharya, Rates of weak convergence for the Multi-dimensional Central Limit Theorem, Теор. вер. и ее прим., **15**, 1 (1970), 69–85.

44. J. E. A. Dunnage, On Sadikova's Method in the central limit theorem, Journ. of the London Math. Society, **2**, part 1 (1970), 49–59.

45. J. E. A. Dunnage, The speed of convergence of the d. f. in the two-dimensional C. L. T., Proceedings of Lond. Math. Society, Third series, **XX**, part 1 (1970).

46. В. И. Ротарь, О сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Теор. вер. и ее прим., **XV**, 2 (1970), 370–372.

47. В. И. Ротарь, Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Теор. вер. и ее прим., **15**, 4 (1970), 647–665.

48. В. Паулаускас, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. II, Liet. matem. rink., **IX**, 2 (1969), 791–815.

49. А. Бикялис, О центральной предельной теореме в R^k. I, Liet. matem. rink., **XI**, 1 (1971), 27–58.

50. C.-G. Esseen, On the remainder term in the central limit theorem, Arkiv főr Math., B. **8**, 2, (1969), 7–15.

51. И. А. Ибрагимов, О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением, Теор. вер. и ее прим., **II**, 4 (1966), 632–655.

APIE CENTRINĘ RIBINĘ TEOREMĄ ERDVĖJE R^k. II

A. Bikelis

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama nepriklausomų k-mačių atsitiktinių vektorių $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sumos $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ pasiskirstymo konvergavimo į k-matį normalinį pasiskirstymą greitis tolygiai visoms iškiloms Borelio aibėms.

Vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių vektorių $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ atveju įrodytos šitokios teoremos.

2 teorema. *Tam, kad galiotų priklausomybė*

$$\sup_{A \in \mathfrak{A}} |P\{S_n \in A\} - P\{\eta \in A\}| = O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \quad 0 < \delta \leqslant 1,$$

būtina ir pakankama, kad

$$\sup_{|t|=1} \sup_{y \in R^1} |P\{(S_n, t) < y\} - P\{(\eta, t) < y\}| = O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \tag{1}$$

kai $n \to \infty$. *Čia* (x, t) — *skaliarinė sandauga;* $|t|$ — *vektoriaus* t *ilgis;* η — *k-matis normalinis vektorius;* $\mathfrak{A}$ — *iškilų Borelio aibių klasė;* $\mathfrak{R}$ — *Borelio aibių klasė.*

3 teorema. *Tam, kad galiotų priklausomybė*

$$\sup_{A \in \mathfrak{R}} |P\{S_n \in A\} - P\{\eta \in A\}| = O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \quad 0 < \delta \leqslant 1,$$

būtina ir pakankama, kad galiotų sąlygos (1) *ir*

2) *egzistuotų sveikas skaičius* n_0 *toks, kad sumos* S_{n_0} *pasiskirstymo funkcija turėtų absoliučiai tolydinę komponentę.*

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM IN R^k. II

A. Bikelis

(*Summary*)

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be a sequence of identically distributed k-dimensional random vectors and $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$. This paper considers the rate of convergence of the probability function $P\{S_n \in A\}$ of the standardized sum S_n to a probability function $P\{\eta \in A\}$ with a k-dimensional normal law, uniformly for all convex Borel sets.

The following theorems are proved.

Theorem 2. *In order that*

$$\sup_{A \in \mathfrak{A}} |P\{S_n \in A\} - P\{\eta \in A\}| = O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \quad 0 < \delta \leqslant 1,$$

it is necessary and sufficient that

$$\sup_{|t|=1} \sup_{y \in R^1} |P\{(S_n, t) < y\} - P\{(\eta, t) < y\}| = O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \tag{*}$$

as $n \to \infty$. *Here* (x, t) *is the scalar product;* t *is a vector of length* $|t|$; η *is a k-dimensional normal random vector and* $\mathfrak{A}$ *is a class of convex Borel sets;* $\mathfrak{R}$ *is a class of Borel sets.*

(1) we will denote as condition (*). The condition (2) is the following: there exists an integer n_0 such that the distribution function of the sum S_{n_0} has an absolute continuons component.

Theorem 3. *In order that*

$$\sup_{A \in \mathfrak{R}} |P\{S_n \in A\} - P\{\eta \in A\}| = O\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right), \quad 0 < \delta \leqslant 1,$$

it is necessary and sufficient that conditions (1) *and* (2) *be satisfied.*