1972

УДК 519.21

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО УСТОЙЧИВОГО ЗАКОНА

П. Вайткус

1. Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1.1}$$

с функциями распределения $G_1(x)$, $G_2(x)$, $\ldots$, $G_n(x)$, соответственно. Функцию распределения суммы

$$S_n = \frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{B_n} \tag{1.2}$$

обозначим $F_n(x)$, соответствующую плотность — $\nu_n(x)$.

В. М. Золотарев [1] поставил задачу распространить результаты В. Рихтера [2], Ю. В. Линника [3], В. В. Петрова [4] о больших уклонениях вероятностей на случай негауссовских предельных законов. Им было получено асимптотическое представление для $\nu_n(x)$ в случае предельного устойчивого закона с характеристическим показателем $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, когда случайные величины в (1.1) распределены одинаково. А. Алешкявичене [5] обобщила результаты В. М. Золотарева на случай неодинаково распределенных непрерывных случайных величин. Асимптотику $1-F_n(x)$ для одинаково распределенных случайных величин и без предположений о предельном законе исследовал В. В. Петров [6].

В настоящей заметке исследуется асимптотическое представление для $1-F_n(x)$ и $\nu_n(x)$ в случае предельного устойчивого закона $G_\alpha(x)$, $0<\alpha<1$.

Допустим, что функция распределения $G_j(x)\,(j=\overline{1,\ n})$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $G_{\alpha j}(x)$, для которого

$$R_{\alpha j}(h) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{hx}\,dG_{\alpha j}(x) = \exp\{-\lambda_j h^\alpha\}, \tag{1.3}$$

где $\lambda_j > 0$.

Обозначим

$$R_j(h) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{hx}\,dG_j(x), \qquad B_j = \sup\{h: R_j(h) < \infty\}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$B = \min_{1\leqslant j\leqslant n} B_j, \quad \Omega_j(x) = G_j(x) - G_{\alpha j}(x), \quad B_n^\alpha = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Пусть

$$\bar{G}_j(x)=\frac{1}{R_j(h)}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{hy}\,dG_j(y),\quad 0<h<B, \tag{1.4}$$

а $\tilde{g}_j(x)$ — плотность симметризованной функции распределения

$$\tilde{G}_j(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{G}_j(x+y)\,d\bar{G}_j(y),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Φ и φ обозначают $(0,\ 1)$ — нормальную функцию распределения и плотность вероятности, соответственно.

Через $\mathfrak{M}_j=\{\Delta_{ji},\ C_{ji},\ i=1,\ 2,\ \ldots\}$ обозначим набор непересекающихся интервалов Δ_{ji} длины $|\Delta_{ji}|$ и положительных констант $C_{ji}\leqslant\infty$, $j=1,\ 2,\ldots$ Положим

$$\tau(\mathfrak{M}_j,\ N)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_{ji}^3}{(|\Delta_{ji}|+2N)^2\,C_{ji}^2},$$

где $N>0$ и

$$Q_{ji}=\int\limits_{\Delta_{ji}}\min\{C_{ji},\ \bar{p}_j(x)\}\,dx.$$

Нам будет нужна теорема 4 из [7], которую для удобства сформулируем для случайных величин $\bar{X}_j$ с функцией распределения (1.4) и математическим ожиданием $\bar{a}_j=[\ln R_j(h)]'$. Еще обозначим

$$F_{Z_n}(x)=\mathbf{P}\left\{\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\ldots+\bar{X}_n-\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{a}_j}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}D\bar{X}_j\right)^{\frac{1}{2}}}<x\right\},\quad \frac{dF_{Z_n}(x)}{dx}=p_{Z_n}(x).$$

Теорема 1.1 [7]. *Если для каких-нибудь n и целого $s\geqslant 3$ случайные величины $\bar{X}_j$ имеют конечные моменты $\mathbf{M}\,|\bar{X}_j-\bar{a}_j|^s$, существуют плотности $\bar{p}_j(x)=\frac{d\bar{G}_j(x)}{dx}$, $j=\overline{1,\ n}$, и $\bar{p}_i(x)\leqslant C_i<\infty$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, то*

$$p_{Z_n}(x)=\varphi(x)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{k=1}^{s-3}Q_{kn}(x)\,L_{k+2n}\right)+\Theta_1 L_{sn}+$$

$$+\Theta_2\bar{B}_n L_{3n}\exp\left\{-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\tau(\mathfrak{M}_j,\ \pi\bar{B}_nL_{3n})\right\}\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{\pi\bar{\sigma}_i}{8\sqrt{2}\,\bar{B}_nL_{3n}}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$F_{Z_n}(x)=\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{k=1}^{s-3}Q_{kn}(x)\,L_{k+2n}+\Theta_1' L_{sn}+$$

$$+\Theta_2'\bar{B}_n L_{3n}^2\exp\left\{-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\tau(\mathfrak{M}_j,\ \pi\bar{B}_nL_{3n})\right\}\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{\pi\bar{\sigma}_i}{8\sqrt{2}\,\bar{B}_nL_{3n}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

для любых наборов $\mathfrak{M}_j$, $j=1, 2, \ldots, n$. *Здесь* $\bar{B}_n^2=\sum_{i=1}^{n}\bar{\sigma}_i^2$,

$$\bar{\sigma}_i^2=D\bar{X}_i, \quad L_{sn}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\,|\bar{X}_i-\bar{a}_i|^s}{\bar{B}_n^s},$$

многочлены

$$Q_{kn}(x)=\sum_{m=1}^{3k}a_{mkn}x^{m-1},$$

причем $a_{mkn}=0$, *если* m *и* k *неодинаковой четности, и*

$$a_{mkn}L_{k+2n}=\frac{1}{(m-1)!}\sum_{\substack{l\\k+2\leqslant m+2l\leqslant 3k}}\frac{(-1)^{l+1}(m+2l-1)!}{2^l\,l!\,\mu!\,\bar{B}_n^{m+2l}}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_\mu\geqslant 3\\ \nu_1+\ldots+\nu_\mu=m+2l\\ 2\mu=m+2l-k}}\frac{\Gamma_{\nu_1 n}\ldots\Gamma_{\nu_\mu n}}{\nu_1!\ldots\nu_\mu!}$$

в других случаях. Коэффициенты a_{mkn}, *величины* Θ_i, Θ_i' *равномерно ограничены относительно* n.

Лемма 1.1 [6]. *Пусть* $B>0$. *Положим для* $0<h<B$

$$\bar{a}_j=\frac{1}{R_j(h)}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{hx}\,dG_j(x),$$

$$\bar{\sigma}_j^2=D\bar{X}_j=\frac{d\bar{a}_j}{dh}, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. $0<\bar{\sigma}_j^2<\infty$ при $0<h<B$.

Функция $\bar{a}_j=\bar{a}_j(h)$ *строго возрастает и непрерывна в интервале* $0<h<B$.

3. $-\infty\leqslant\mathbf{M}\,\bar{X}_j<\infty$, $\lim\limits_{h\downarrow 0}\bar{a}_j(h)=\mathbf{M}\,\bar{X}_j$, $j=1, 2, \ldots, n$.

4. *Существует предел* $\lim\limits_{h\uparrow B}\bar{a}_j(h)=A_j$, $j=1, 2, \ldots, n$.

5. *Каково бы ни было число* y *из интервала* $\mathbf{M}\,\bar{X}_j<y<A_j$, *уравнение* $\bar{a}_j(h)=y$ *имеет единственный действительный корень* h_0. *При этом* $0<h_0<B$.

2. Предельная теорема для плотностей, случай неодинаковых распределений

На последовательность независимых случайных величин (1.1) налагаем условия.

2.1. Найдется число $0<B<\infty$ такое, что

$$R_j(h)<\infty, \text{ когда } 0<h<B, \ j=1, 2, \ldots, n.$$

2.2. Существуют плотности

$$g_j(x)=\frac{dG_j(x)}{dx}, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

и

$$g_i(x) \leqslant K_i < \infty, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

2.3.

$$\lim_{h \uparrow B} [\ln R_j(h)]' = A_j < \infty, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Теорема 2.1. *Если случайные величины* (1.1) *удовлетворяют условиям* 2.1 – 2.3, *то при* $n \to \infty$ *равномерно по* x *из интервала*

$$-C \leqslant x \leqslant \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} A_j \tag{2a}$$

имеем

$$\nu_n(x) = \frac{B_n e^{-x\rho B_n} \prod_{j=1}^{n} R_j(\rho)}{\bar{B}_n \sqrt{2\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^{s-3} a_{2kn} L_{k+2n} + \Theta_1 L_{sn} + \right.$$

$$+ \Theta_2 \bar{B}_n L_{3n} \exp\left\{ -\frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \tau(\mathfrak{M}_j,\ \pi \bar{B}_n L_{3n}) \right\} \times$$

$$\left. \times \prod_{i=1}^{4} C_i^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{\pi \bar{\sigma}_i}{8\sqrt{2}\, \bar{B}_n L_{3n}}\right)^{\frac{1}{4}} \right], \tag{2b}$$

где $\rho = \rho(x)$ – *единственное решение уравнения*

$$B_n x = \sum_{j=1}^{n} [\ln R_j(\rho)]',$$

C – *положительная сколь угодно большая константа,* $s \geqslant 3$ – *произвольное положительное число.*

Доказательство. Пусть $\{\bar{X}_j\}$ – последовательность независимых случайных величин с функциями распределения, соответственно,

$$\bar{G}_j(x) = \frac{1}{R_j(h)} \int_{-\infty}^{x} e^{hy}\, dG_j(y), \quad 0 < h < B, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда

$$\mathbf{M}\bar{X}_j = \ln' R_j(h) = \bar{a}_j,$$

$$\bar{\sigma}_j^2 = \ln'' R_j(h), \quad 0 < h < B, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Если обозначим

$$\bar{A}_n = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j, \quad \bar{B}_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \bar{\sigma}_j^2,$$

$$F_{Z_n} = \mathbf{P}\left\{ \frac{\bar{X}_1 + \ldots + \bar{X}_n - A_n}{\bar{B}_n} < x \right\}, \quad p_{Z_n}(x) = \frac{dF_{Z_n}(x)}{dx},$$

нетрудно получить [4], что

$$F_n(x)=\prod_{j=1}^{n} R_j(h)\,e^{-h\bar{A}_n}\int\limits_{-\infty}^{\frac{xB_n-\bar{A}_n}{\bar{B}_n}} e^{-yh\bar{B}_n}\,dF_{Z_n}(y). \tag{2.1}$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1.1, убедимся, что последовательность $\{\bar{X}_j\}$ удовлетворяет ее условиям. Действительно, из условия 2.2 следует, что существуют плотности $\bar{g}_j(x)$, а в силу условий 2.1 и 2.2 существуют константы $c_i<\infty$, такие что $g_i(x)\leqslant c_i$, $i=1, 2, 3, 4$.

Из условия 2.1 получаем, что функции распределений $\bar{G}_j(x)$, $j=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют условию Крамера, то есть

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ux}\,d\bar{G}_j(x)=\frac{1}{R_j(h)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(u+h)x}\,dG_j(x), \tag{2.2}$$

когда $-h<u<B-h$, где $0<h<B$. Значит, для любого $s\geqslant 3$

$$\mathbf{M}\,|\bar{X}_j-\bar{a}_j|^s<\infty.$$

Тогда из (2.1) и теоремы 1.1 имеем

$$\nu_n(x)=\frac{B_n}{\bar{B}_n}\prod_{j=1}^{n} R_j(h)\,e^{-h\bar{A}_n-hz\bar{B}_n}\Bigl[\varphi(z)+\frac{d}{dz}\Bigl(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{2}}\sum_{k=1}^{s-3} Q_{kn}(z)L_{k+2n}\Bigr)+$$

$$+\Theta_1 L_{3n}+\Theta_2\bar{B}_n L_{3n}\exp\Bigl\{-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\tau(\mathfrak{M}_j,\ \pi\bar{B}_n L_{3n})\Bigr\}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{4} c_i^{\frac{1}{4}}\Bigl(1+\frac{\pi\sigma_i}{8\sqrt{2}\,L_{3n}\bar{B}_n}\Bigr)^{\frac{1}{4}}\Bigr],$$

где

$$z=\frac{xB_n-\bar{A}_n}{\bar{B}_n}.$$

В силу леммы 1.1 функция $\ln' R_j(h)$ для $0<h<B$ непрерывна и строго возрастает, а также существует предел

$$\lim_{h\uparrow B}\ln' R_j(h)=A_j,\ j=1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Условие 2.3 дает, что $A_j<\infty$, а так как $G_j(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $G_{\alpha j}(x)$ с $0<\alpha<1$, то

$$\lim_{h\downarrow 0}\ln' R_j(h)=MX_j=-\infty,\quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, из утверждения 5 леммы 1.1 следует, что какое бы ни было число y из интервала $-c\leqslant y<\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n} A_j$, уравнение

$$yB_n=\sum_{j=1}^{n}\ln' R_j(h) \tag{2.4}$$

имеет единственный действительный корень $\rho\,(0<\rho<B)$. Пусть $h=\rho$. Тогда $z=0$ и из (2.3) получаем

$$\nu_n(x)=\frac{B_n e^{-x\rho B_n}}{\bar{B}_n\sqrt{2\pi}}\prod_{j=1}^{n}R_j(\rho)\Big[1+\sum_{k=1}^{s-3}a_{2kn}L_{k+2n}+\Theta_1 L_{sn}+$$

$$+\Theta_2\bar{B}_n L_{3n}\exp\Big\{-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\tau(\mathfrak{M}_j,\ \pi\bar{B}_n L_{3n})\Big\}\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\times\Big(1+\frac{\pi\bar{\sigma}_i}{8\sqrt{2}\,L_{3n}\bar{B}_n}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big],$$

когда $n\to\infty$ равномерно по x из интервала

$$-C\leqslant x<\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n}A_j,$$

где C — положительная сколь угодно большая константа, а $s\geqslant 3$ — положительное произвольное число. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если вместо условия 2.3 потребовать:

2.4. Существует число $a\geqslant 1$, такое что

$$\nu_j(\acute{a})=\int_{-\infty}^{\infty}|\,x\,|^{a}\,|\,d\pi_j\,(x)\,|<\infty,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

2.5. При всех n

$$\frac{B_n^{\alpha}}{n}\geqslant\delta>0,$$

то при $n\to\infty$ равномерно по x из интервала

$$-C\leqslant x<-o\,(B_n^{\alpha-1})$$

будем иметь

$$\frac{\nu_n(x)}{g_\alpha(x)}=\prod_{j=1}^{n}R_j(\rho)\exp\{-x\rho B_n+(1-\alpha)\,\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(-x)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}\Big(1+o\,(1)\Big),\quad(2.5)$$

где $\rho=\rho(x)$ — единственное решение уравнения (2.4), а

$$g_\alpha(x)=\frac{dG_\alpha(x)}{dx}.$$

Доказательство. Так как плотность устойчивого закона $G_\alpha(x)$ $(0<\alpha<1)$ при $x<0$ имеет асимптотическое представление

$$g_\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sum_{j=1}^{n}\ln''R_{\alpha j}\,(\rho_1 B_n)}}\exp\{-(1-\alpha)\,(\rho_1 B_n)^{\alpha}\}\Big(1+o\,(1)\Big),$$

где ρ_1 — решение уравнения

$$x=\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n}\ln' R_{\alpha j}(\rho_1),\qquad(2.6)$$

то

$$\frac{\nu_n(x)}{g_\alpha(x)}=\frac{B_n\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\ln'' R_{\alpha j}(\rho_1 B_n)}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\ln'' R_j(\rho)}}\exp\{-x\rho B_n+(1-\alpha)(\rho_1 B_n)^\alpha\}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}R_j(\rho)\Big(1+o(1)\Big).$$

Обозначим $\omega_j(\rho)=R_j(\rho)-R_{\alpha j}(\rho)$. Тогда

$$\ln R_j(\rho)=\ln R_{\alpha j}(\rho)+\ln\left[1+\frac{\omega_j(\rho)}{R_{\alpha j}(\rho)}\right],$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}\ln' R_j(\rho)=-\alpha\rho^{\alpha-1}B_n^\alpha+\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_j'(\rho)+\omega_j(\rho)\alpha\lambda_j\rho^{\alpha-1}}{\omega_j(\rho)+R_{\alpha j}(\rho)}. \tag{2.7}$$

Далее

$$\sum_{j=1}^{n}\ln'' R_j(\rho)=\alpha(1-\alpha)\rho^{\alpha-2}B_n^\alpha+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_j''(\rho)+\omega_j'(\rho)\alpha\lambda_j\rho^{\alpha-1}+\omega_j(\rho)\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}\lambda_j}{\omega_j(\rho)+R_{\alpha j}(\rho)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_j'^2(\rho)+\omega_j'(\rho)\omega_j(\rho)\alpha\rho^{\alpha-1}\lambda_j+\omega_j'(\rho)R_{\alpha j}'(\rho)+\omega_j(\rho)\alpha\lambda_j\rho^{\alpha-1}R_{\alpha j}'(\rho)}{[\omega_j(\rho)+R_{\alpha j}(\rho)]^2}. \tag{2.8}$$

Не уменьшая общности можно допустить, что

$$\mu_j(1)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,d\Omega_j(x)=0,\quad j=1,2,\ \dots,\ n.$$

Вообще, всегда найдутся такие $l_j\geqslant 1$, что

$$\mu_j(0)=\mu_j(1)=\dots=\mu_j(l_j)=0\,(j=1,\ 2,\ \dots,\ n),$$

а $\mu_j(l_j+1)$ отличны от нуля или не существуют. Пусть $l=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}l_j$ и $a'=$ $=\min(a,\ 1+l)$. Тогда при достаточно малых ρ из условия 2.4 следует, что

$$\omega_j(\rho)=0(\rho^{a'}),\quad \omega_j'(\rho)=0(\rho^{a'-1}),\quad j=1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{2.9}$$

Согласно этим оценкам, при $\rho\to 0$ имеем

$$B_n^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n}\ln'' R_j(\rho)=\alpha(1-\alpha)\rho^{\alpha-2}+C_1(n)\rho^{a'-2}+0(\rho^{2a'+\alpha-2}+\rho^{a'+2\alpha-2}).$$

Исходя из этого, получаем

$$\frac{B_n\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\ln'' R_{\alpha j}(\rho_1 B_n)}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\ln'' R_\alpha(\rho)}}=\frac{\rho\sqrt{\rho_1^\alpha}}{\rho_1\sqrt{\rho^\alpha}}\Big(1+C_1'(n)\rho^{a'-\alpha}\Big), \tag{2.10}$$

где $C_1'(n)$ — ограниченное постоянное, которое может стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Используя оценки (2.9) и соотношение (2.7), уравнение (2.4) можно переписать так:

$$xB_n^{1-\alpha} = -\alpha\rho^{\alpha-1} + 0\left(C_2(n)\,\rho^{a'-1} + \rho^{a'+\alpha-1}\right),$$

где $C_2(n)$ может стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Из уравнения (2.6) получаем, что

$$xB_n^{1-\alpha} = -\alpha\rho_1^{\alpha-1}.$$

Тогда

$$\rho_1^{\alpha-1} = \rho^{\alpha-1} + \Theta\rho^{a'-1},$$

или

$$\rho_1 = \rho\,(1 + \Theta_1\,\rho^{a'-\alpha}), \tag{2.12}$$

где Θ и Θ_1 — ограниченные постоянные.

Согласно (2.12) имеем

$$\frac{\rho\,\sqrt{\rho_1^\alpha}}{\rho_1\,\sqrt{\rho^\alpha}} = 1 + 0\,(\rho^{a'-\alpha}),$$

и окончательно получаем

$$\frac{\nu_n(x)}{g_\alpha(x)} = \prod_{j=1}^{n} R_j(\rho)\exp\left\{-x\rho B_n - (1-\alpha)\,(-x)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\,\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}\left(1 + o(1)\right).$$

3. Предельная теорема для плотностей, случай одинаковых распределений

Пусть случайные величины (1.1) распределены одинаково и имеют функцию распределения $G(x)$. В этом случае нормирующая константа будет $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$.

На последовательность (1.1) налагаем условия.

3.1. Найдется число $0 < B < \infty$, такое что $R(h) < \infty$, когда $0 < h < B$.

3.2. Существует такое N, что $\nu_N(x) < \infty$.

3.3. $\lim\limits_{h \uparrow B} \ln' R(h) = A < \infty$.

Теорема 3.1. *Если случайные величины* (1.1) *удовлетворяют условиям* 3.1 — 3.3, *то при $n \to \infty$ равномерно по x из интервала*

$$-C \leqslant x < n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} A \tag{3a}$$

имеем

$$\nu_n(x) = \frac{R^n(\rho)\,e^{-x\rho n^{\frac{1}{\alpha}}}}{n^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}\,\sigma(h)\,\sqrt{2\pi}}\left[1 + \sum_{j=1}^{s-2} \frac{a_j(x)}{n^{j_1}} + o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right)\right], \tag{3b}$$

где C — сколь угодно большая положительная константа, $s \geqslant 3$ — произвольное число, коэффициенты $a_j(x)$ зависят лишь от $2j+2$ моментов распределения

$$\bar{G}(x) = \frac{1}{R(h)} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hy}\, dG(y).$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1. В равенстве

$$F_n(x) = R^n(h) e^{-hn\bar{a}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{xn^{\frac{1}{\alpha}} - n\bar{a}}{\sqrt{n}\,\bar{\sigma}}} e^{-yh\sqrt{n}\,\bar{\sigma}}\, dF_{Z_n}(y) \tag{3.1}$$

для плотности функции распределения $F_{Z_n}(x)$ применяем локальную предельную теорему ([8], т. 4.5.2):

Пусть выполнены условия:

1) *случайные величины Y_j имеют конечный момент порядка $s \geqslant 3$;*

2) *существует N такое, что $\max p_N(x) < \infty$. Тогда при $n \to \infty$ равномерно по x*

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{s-2} n^{-\frac{j}{2}} \frac{d}{dx} \sum_{\nu=1}^{j} (-1)^{j+2\nu} c_\nu^{(j)} \frac{d^{j+2\nu}}{dx^{j+2\nu}} \Phi(x) + o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

Покажем, что последовательность случайных величин $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n$ с функцией распределения

$$\bar{G}(x) = \frac{1}{R(h)} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hy}\, dG(y),$$

математическим ожиданием $\bar{a} = \ln' R(h)$ и дисперсией $\bar{\sigma}^2 = \ln'' R(h)$ удовлетворяет условия 1) и 2).

В силу утверждения 1 леммы 1.1 $\bar{\sigma}^2 > 0$, а так как $\bar{G}(x)$ удовлетворяет условие Крамера (2.2), то

$$\mathbf{M}\,|\bar{X} - \bar{a}|^s < \infty, \quad s \geqslant 3.$$

Из условий 3.1 и 3.2 следует, что при некотором N существует ограниченная плотность $\bar{q}_N(x)$ распределения величины

$$\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \ldots + \bar{X}_N - N\bar{a}}{\sqrt{N}\,\bar{\sigma}}.$$

Значит, условия удовлетворены, и потому

$$\nu_n(x) = \frac{R^n(h)\, e^{-hn\bar{a} - zh\sqrt{n}\,\bar{\sigma}}}{n^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}\, \bar{\sigma}} \Bigg[\varphi(z) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s-2} n^{-\frac{j}{2}} \frac{d}{dz} \sum_{\nu=1}^{j} (-1)^{j+2\nu} C_\nu^{(j)} \frac{d^{j+2\nu}}{dz^{j+2\nu}} \Phi(z) + o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right) \Bigg], \tag{3.2}$$

где

$$z=\frac{xn^{\frac{1}{\alpha}}-n\bar{a}}{\sqrt{n}\,\bar{\sigma}}.$$

Возьмем h равным корню $\rho(x)$ уравнения

$$x=n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\bar{a}. \tag{3.3}$$

В силу леммы 1.1 $\rho(x)$ единственный, и $0<\rho<B$, когда,

$$-C\leqslant x<n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}A. \tag{3.4}$$

Если $h=\rho(x)$, то $z=0$, и из (3.2) получаем

$$\nu_n(x)=\frac{R^n(\rho)\,e^{-x\rho n^{\frac{1}{\alpha}}}}{n^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}}\left[1+\sum_{j=1}^{s-2}n^{-\frac{j}{2}}a_j(x)+o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right)\right]$$

при $n\to\infty$ равномерно по x из интервала (3.4). Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если вместо условия 3.3 потребовать, чтобы выполнялось условие 2.5, то при $n\to\infty$ равномерно по x из интервала

$$-C\leqslant x<-o\left(n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)$$

имеет место асимптотическое представление

$$\frac{\nu_n(x)}{g_\alpha(x)}=R^n(\rho)\exp\left\{-x\rho n^{\frac{1}{\alpha}}+(1-\alpha)\,\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(-x)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}\Big(1+o(1)\Big), \tag{3.5}$$

где ρ — корень уравнения (3.3).

4. Интегральная предельная теорема

Теорема 4.1. *Пусть случайные величины* (1.1) *удовлетворяют условиям* 2.1 — 2.3. *Тогда при $n\to\infty$ равномерно по x из интервала*

$$-C\leqslant x<\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n}A_j$$

имеем

$$1-F_n(x)=\frac{\prod_{j=1}^{n}R_j(\rho)\,e^{-x\rho B_n}}{\rho\bar{B}_n\sqrt{2\pi}}\left[1-\frac{\Theta}{\rho^2\bar{B}_n^2}+\sum_{k=1}^{s-3}L_{k+2n}\sum_{m=1}^{3k}a_{mkn}b_m+\right.$$

$$+\Theta_1''L_{sn}\rho\bar{B}_n+\Theta_2''\rho\bar{B}_n^2L_{3n}^2\exp\left\{-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\tau(\mathfrak{M}_j,\ \pi\bar{B}_nL_{3n})\right\}\times$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{\pi\bar{\sigma}_i}{8\sqrt{2}\,\bar{B}_nL_{3n}}\right)^{\frac{1}{4}}\right], \tag{4a}$$

где $0<\Theta<1$, Θ_1'' и Θ_2'' равномерно ограничены относительно n, b_m определено в (4.6), *$\rho=\rho(x)$ единственный корень уравнения*

$$B_nx=\sum_{j=1}^{n}\ln' R_j(h),$$

C — положительная сколь угодно большая константа, $s \geqslant 3$ — произвольное число.

Доказательство. Из (2.1) имеем

$$1 - F_n(x) = \prod_{j=1}^{n} R_j(h)\, e^{-h\bar{A}_n} \int\limits_{\frac{xB_n - \bar{A}_n}{\bar{B}_n}}^{\infty} e^{-y\bar{B}_n} dF_{Z_n}(y). \tag{4.1}$$

Так как уравнение $xB_n = \bar{A}_n$ имеет единственное решение $\rho = \rho(x)$, когда

$$-C \leqslant x < \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} A_j,$$

то возьмем $h = \rho(x)$. Тогда (4.1) имеет вид

$$1 - F_n(x) = \prod_{j=1}^{n} R_j(\rho)\, e^{-\rho\bar{A}_n} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-y\rho\bar{B}_n}\, dF_{Z_n}(y). \tag{4.2}$$

Ранее показали, что последовательность $\{\overline{X}_j - \bar{a}_j\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Тогда

$$F_{Z_n}(y) = \Phi(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \sum_{k=1}^{s-3} Q_{kn}(y)\, L_{k+2n} + R_{1n}(y) + R_{2n}(y), \tag{4.3}$$

где

$$R_{1n}(y) = \Theta_1'\, L_{sn},$$

$$R_{2n}(y) = \Theta_2'\, \bar{B}_n L_{3n} \exp\left\{ -\frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \tau(\mathfrak{M}_j,\ \pi\bar{B}_n L_{3n}) \right\} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{4} C_i^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{\pi\bar{\sigma}_i}{8\sqrt{2}\, L_{3n}\bar{B}_n}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Подставив это выражение в (4.2), получаем

$$1 - F_n(x) = \prod_{j=1}^{n} R_j(\rho)\, e^{-x\rho B_n}\, [I_1 + I_2 + I_3 + I_4], \tag{4.4}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-y\rho\bar{B}_n - \frac{y^2}{2}}\, dy,$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{s-3} L_{k+2n} \sum_{m=1}^{3k} a_{mkn} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-y\rho\bar{B}_n}\, de^{-\frac{y^2}{2}}\, y^m,$$

$$I_3 = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-y\rho\bar{B}_n}\, dR_{1n}(y),$$

$$I_4 = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-y\rho\bar{B}_n}\, dR_{2n}(y).$$

Для каждого x имеем

$$1-\Phi(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-\frac{\Theta}{x^2}\right),\quad 0<\Theta<1.$$

Отсюда

$$I_1=\frac{1}{\rho B_n\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{\Theta}{\rho^2 B_n^2}\right): \tag{4.5}$$

Величины

$$b_m=\int_0^\infty \exp\{-y\rho\bar{B}_n\}\,dy^m\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}$$

ограничены по n, и при $m\geqslant 2$ выполняется соотношение

$$b_m=(m-1)\,b_{m-2}-\rho\bar{B}_n b_{m-1}. \tag{4.6}$$

Далее

$$I_3=-R_{1n}(0)-\int_0^\infty R_{1n}(y)\,de^{-y\rho\bar{B}_n}=\Theta_1'' L_{3n}, \tag{4.7}$$

$$I_4=-R_{2n}(0)-\int_0^\infty R_{2n}(y)\,de^{-y\rho\bar{B}_n}=$$

$$=\Theta_2''\bar{B}_n L_{3n}\exp\left\{-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\tau(\mathfrak{M}_j,\ \pi\bar{B}_n L_{3n})\right\}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{4}C_i^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{\pi\bar{\sigma}_i}{8\sqrt{2}\,\bar{B}_n L_{3n}}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{4.8}$$

Из (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) и (4.8) получаем утверждение теоремы.

Следствие 4.1. *Пусть случайные величины* (1.1) *распределены одинаково с функцией распределения* $G(x)$, *удовлетворяют условиям* 3.1, 3.3 *и* 4.1.

$$g(x)=\frac{dG(x)}{dx}\leqslant C<\infty.$$

Тогда при $n\to\infty$ *равномерно по* x *из интервала* (3.4) *имеем*

$$1-F_n(x)=\frac{R^n(\rho)\,e^{-x\rho n^{\frac{1}{\alpha}}}}{\rho\sigma(\rho)\sqrt{2\pi n}}\left[1-\frac{\Theta}{\rho^2\sigma^2(\rho)\,n}+\sum_{k=1}^{s-3}\frac{\rho L_{k+2}\,\sigma(\rho)}{n^{\frac{k-1}{2}}}\sum_{m=1}^{3k}a_{mk}b_m+\right.$$

$$\left.+\frac{\Theta_1''\rho L_s\sigma(\rho)}{n^{\frac{s-3}{2}}}+\Theta_2''\frac{CL_3^{\frac{1}{3}}}{\sigma(\rho)}\left(1+\frac{\pi}{8\sqrt{2}\,L_3}\right)\exp\left\{-\frac{n}{3}\tau_1\left(\mathfrak{M}_1\,\pi L_3\,\sigma(\rho)\right)\right\}\right]. \tag{4.9}$$

где $\rho=\rho(x)$ — *единственный корень уравнения* (3.3).

Пользуясь случаем выражаю глубокую благодарность проф. Й. Кубилюсу за постановку задачи и постоянное внимание.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
4.VI.1971

Литература

1. В. М. Золотарев, Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, Тр. VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и мат. статистике, Вильнюс, 1962, 43–47.
2. В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее примен., **II**, 2 (1957), 214–229.
3. Ю. В. Линник, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, I, Теория вероятн. и ее примен., **VI**, 2 (1961), 145–163.
4. В. В. Петров, Обобщение предельной теоремы Крамера, Успехи мат. наук, **IX**, 4, 62 (1957), 195–202.
5. А. Алешкявичене, О предельной теореме для больших уклонений, Liet. matem. rink., **II**, 2 (1962), 5–13.
6. В В. Петров, О вероятностях больших уклонений сумм незнавиcимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., **X**, 2 (1965), 310–322.
7. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., **X**, 4 (1965), 645–659.
8. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Москва, 1955.

APIE ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ DIDELIUS NUKRYPIMUS STABILAUS RIBINIO DĖSNIO ATVEJU

P. Vaitkus

(Reziumė)

Straipsnyje kai kurios V. Zolotariovo [1], A. Aleškevičienės [5] ir V. Petrovo [6] ribinės teoremos dideliems atsilenkimams stabilaus ribinio dėsnio $G_\alpha(x)$, $0<\alpha<1$, atveju.

Sakykime, ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, – seka nepriklausomų atsitiktinių dydžių, kurių pasiskirstymo funkcijos $G_i(x)$ priklauso atitinkamo stabilaus dėsnio $G_{\alpha_i}(x)$ $(0<\alpha<1)$ traukos sričiai, kai $\beta=1$.

Jei $G_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots n)$ tenkina 2.1–2.3 sąlygas, tai tolygiai x atžvilgiu iš intervalo (2a) sumos (1.2) pasiskirstymo funkcijos $F_n(x)$ tankiui $\nu_n(x)$ galioja asimptotinis išdėstymas (2b), o reiškiniui $1-F_n(x)$ – asimptotinis išdėstymas (4a). Kai dydžiai ξ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ yra vienodai pasiskirstę ir tenkina atitinkamai 3.1–3.3 ir 3.1, 3.3, 4.1 sąlygas, yra gautos analogiškos priklausomybės (3b) ir (49).

ON LARGE DEVIATIONS OF SUMS OF RANDOM VARIABLES IN THE CASE OF STABLE LIMITING DISTRIBUTION

P. Vaitkus

(Summary)

Limit theorems on large deviations of sums of random variables in the case of stable limiting distribution $G_\alpha(x)$, $0<\alpha<1$, are given.

Let ξ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ be a sequence of independent random variables, the distribution function $G_i(x)$ belonging to the domain of normal attraction of respective stable distribution $G_{\alpha_i}(x)$ $(0<\alpha<1)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ $(\beta=1)$.

The paper presents an asymptotic expansion (2b) for the density $\nu_n(x)$ of the probability function $F_n(x)$ of the sum (1.2) and an asymptotic expansion (4a) for $1-F_n(x)$, when $G_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ satisfy conditions 2.1–2.3 and x belongs to the interval (2a). The analogous expansions (3b) and (49) for $\nu_n(x)$ and for $1-F_n(x)$, when the random variables ξ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ are identically distributed and the conditions 3.1–3.3 and 3.1, 3.3, 4.1 are satisfied and x belongs to the interval (3a) are given too.