XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1972

УДК 519.21

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОГО КЛАССА ОДНОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В. А. Ивницкий

Наблюдаемое в настоящее время широкое применение теории массового обслуживания в различных областях выдвинуло задачу разработки алгоритмического подхода к изучению вероятностных характеристик разнообразных схем массового обслуживания. Такой алгоритмический подход с учетом применения аналитических методов исследования был разработан И. Н. Коваленко [1] для введенной им общей схемы массового обслуживания, обобщающей известные в литературе схемы. Для однолинейных систем общего вида [1] им получена теорема, утверждающая, что стационарные вероятности состояний системы являются рациональными суперпозициями параметров входящего марковского потока, скоростей обслуживания и преобразований Лапласа – Стилтьеса распределений количества работы по обслуживанию требований. Вместе с теоремой получен и алгоритм их фактического нахождения. Представляет несомненный как теоретический, так и практический интерес перенесение этого результата на нестационарный случай, а также для других нестационарных характеристик системы, и разработка соответствующих алгоритмов нахождения этих характеристик. В настоящей статье исследуется более детально важный частный случай, когда нет прерываний в обслуживании требований, т. е. нет требований с абсолютным приоритетом; тогда в системе вообще нет приоритетов или есть требования только с относительными приоритетами. Показывается, что преобразования Лапласа основных характеристик этой системы, как-то, нестационарных вероятностей состояний, распределения времени пребывания системы в фиксированном множестве состояний, распределения периода занятости и распределения времени ожидания являются дробно-рациональными функциями от преобразований Лапласа – Стилтьеса распределений количества работы по обслуживанию требований, их производных, а также констант-параметров входящего потока и скорости обслуживания. Предложен также алгоритм нахождения вышеуказанных основных характеристик системы.

1. Постановка задачи

Имеется однолинейная система массового обслуживания (т. е. если в момент начала обслуживания требования Б требование А уже было в системе, то обслуживание требования А не может начаться раньше, чем закончится обслуживание требования Б; это значит, что исключена ситуация

„блуждающего" прибора [1]), состояния которой образуют конечное множество $N=\{\nu\}$.

Число требований на обслуживание в состоянии ν обозначим через $|\nu|$. Имеется только одно состояние с $|\nu|=0$, которое обозначим через 0. На вход системы поступает марковский поток требований, т.е., если в момент t система находилась в состоянии ν, то за время dt поступит требование с вероятностью $\lambda_\nu dt+o(dt)$. Поступление требований связано с изменением состояния. Вероятность перехода системы из состояния ν в состояние μ за счет поступления требований за время dt равна $\lambda_{\nu\mu} dt+o(dt)$. Следовательно, $\lambda_\nu=\sum\limits_{\mu\neq\nu}\lambda_{\nu\mu}$, и вероятность перехода из состояния ν в состояние μ при условии, что требование поступило, равна $\frac{\lambda_{\nu\mu}}{\lambda_\nu}$. В состоянии ν работа выполняется со скоростью $\alpha_\nu>0$. При условии окончания обслуживания требования в состоянии $\nu\neq 0$ система с вероятностью $P_{\nu\mu}$ переходит в состояние μ. В связи с этим для выполнения следующего требования нужно затратить случайное количество работы $\eta_{\nu\mu}$, имеющее функцию распределения $H_{\nu\mu}(x)$. Если требование приходит в момент, когда система свободна, т.е. $\nu=0$, и переводит ее в состояние μ, то для его выполнения нужно затратить случайное количество работы $\eta_{0\mu}$, имеющее функцию распределения $H_{0\mu}(x)$. Процесс функционирования системы полностью определен. Нужно определить нестационарное распределение вероятностей состояний системы, т.е. $P_\nu(t)=P\{\nu(t)=\nu\}$, где $\nu(t)$ – случайный процесс – состояние системы в момент t. Также нужно определить распределение времени пребывания системы в фиксированном множестве состояний, распределения периода занятости и времени ожидания.

2. Теорема об аналитическом виде основных характеристик системы

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для указанной однолинейной системы массового обслуживания с конечным числом состояний преобразования Лапласа ее основных характеристик, как-то нестационарных вероятностей состояний $P_\nu(t)$, распределения времени пребывания в фиксированном множестве состояний A $P_A(t)$, распределения периода занятости, распределения времени ожидания, являются дробно-рациональными функциями от преобразований Лапласа–Стилтьеса распределений количества работы по обслуживанию требований $\tilde{h}_{\nu\mu}\left(\frac{u+\lambda_{\nu'}}{\alpha_{\nu'}}\right)=\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{u+\lambda_{\nu'}}{\alpha_{\nu'}}t\right\}dH_{\nu\mu}(t)$ и их производных до порядка a, где a – порядок системы в нестационарном случае, определяемый ниже, и параметров $\lambda_{\nu\mu}$, α_ν, $P''_{\nu\mu}$.*

Доказательство. Введем случайный процесс

$$\zeta(t)=\{\nu(t),\ \xi(t)\},\tag{1}$$

где $\xi(t)$ – количество работы, которую еще необходимо выполнить с момента t для требования, обслуживающегося в этот момент. Обозначим $\varphi_\nu(x,t)=P\{\nu(t)=\nu,\ \xi(t)<x\}$. Процесс $\zeta(t)$ является кусочно-линейным

марковским процессом. Поэтому $\varphi_\nu(x, t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varphi_0'(t) = -\lambda_0 \varphi_0(t) + \sum_{\mu \in B_0} \alpha_\mu \frac{\partial \varphi_\mu(0, t)}{\partial x}, \\
&\vdots \\
&\frac{\partial \varphi_\nu(x, t)}{\partial t} - \alpha_\nu \frac{\partial \varphi_\nu(x, t)}{\partial x} = -\lambda_\nu \varphi_\nu(x, t) - \alpha_\nu \frac{\partial \varphi_\nu(0, t)}{\partial x} + \\
&+ \sum_{\mu \in B_\nu} \alpha_\mu \frac{\partial \varphi_\mu(0, t)}{\partial x} P_{\mu\nu} H_{\mu\nu}(x) + \sum_{\mu \in A_\nu} \lambda_{\mu\nu} \varphi_\mu(x, t) + \lambda_{0\nu} \varphi_0(t) H_{0\nu}(x), \\
&\vdots \\
&\frac{\partial \varphi_{\nu_T}(x, t)}{\partial t} - \alpha_{\nu_T} \frac{\partial \varphi_{\nu_T}(x, t)}{\partial x} = -\alpha_{\nu_T} \frac{\partial \varphi_{\nu_T}(0, t)}{\partial x} + \sum_{\mu \in A_{\nu_T}} \lambda_{\mu\nu_T} \varphi_\mu(x, t) + \lambda_{0\nu_T} \times \\
&\times \varphi_0(t) H_{0\nu_T}(x)
\end{aligned}
\right\} \quad (2)
$$

с начальными условиями $\varphi_\nu(x, 0) = \varphi_\nu^{(0)}(x)$, где ν_T обозначает тупиковое состояние, т.е. $\lambda_{\nu_T} = 0$, $P_\nu^{(0)} = \varphi_\nu^{(0)}(\infty)$, $P_0^{(0)} = \varphi_0(0)$. Здесь через A_ν обозначено множество состояний, из которых возможен переход в ν вследствие поступления требований, а через B_ν — множество состояний, из которых возможен переход в ν вследствие окончания обслуживания требования.

Введем также следующие обозначения:

$$
\tilde{\varphi}_\nu(s, u) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-ut} d_x \varphi_\nu(x, t)\, dt, \quad P_\nu(t) = \varphi_\nu(\infty, t),
$$

$$
\tilde{P}_\nu(u) = \int_0^\infty e^{-ut} P_\nu(t)\, dt, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial \varphi_\nu(0, t)}{\partial x}\, dt,
$$

$$
\tilde{h}_{\nu\mu}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH_{\nu\mu}(x), \quad \varphi_0(t) = P_0(t), \quad \tilde{\varphi}_0(u) = \int_0^\infty e^{-ut} \varphi_0(t)\, dt.
$$

Применяя к (2) двойное преобразование Лапласа, получаем

$$
\left.
\begin{aligned}
&u \tilde{\varphi}_0(u) = -\lambda_0 \tilde{\varphi}_0(u) + \sum_{\mu \in B_0} \alpha_\mu \frac{\partial \tilde{\varphi}_\mu(0, u)}{\partial x} + P_0^{(0)}, \\
&\vdots \\
&(u - \alpha_\nu s + \lambda_\nu) \tilde{\varphi}_\nu(s, u) = -\alpha_\nu \frac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x} + \sum_{\mu \in A_\nu} \lambda_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_\mu(s, u) + \\
&+ \sum_{\mu \in B_\nu} \alpha_\mu \frac{\partial \tilde{\varphi}_\mu(0, u)}{\partial x} P_{\mu\nu} \tilde{h}_{\mu\nu}(s) + \tilde{\varphi}_\nu^{(0)}(s) + \lambda_{0\nu} \tilde{\varphi}_0(u) \tilde{h}_{0\nu}(s), \\
&\vdots \\
&(u - \alpha_{\nu_T} s) \tilde{\varphi}_{\nu_T}(s, u) = -\alpha_{\nu_T} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{\nu_T}(0, u)}{\partial x} + \sum_{\mu \in A_{\nu_T}} \lambda_{\mu\nu_T} \tilde{\varphi}_\mu(s, u) + \tilde{h}_{0\nu_T}(s) \times \\
&\times \lambda_{0\nu_T} \tilde{\varphi}_0(u) + \tilde{\varphi}_{\nu_T}^{(0)}(s).
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

Рассмотрим второе уравнение системы (3). В левой части стоит произведение $u-\alpha_\nu s+\lambda_\nu$ на функцию, аналитическую при $\mathrm{Re}\{s\}\geqslant 0$ и $\mathrm{Re}\{u\}\geqslant 0$. Следовательно, при $s=\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}$ левая часть обращается в нуль. Записав условие равенства нулю для правой части, будем иметь

$$\alpha_\nu \frac{\partial\tilde{\varphi}_\nu(0,u)}{\partial x}=\sum_{\mu\in B_\nu}\alpha_\mu \frac{\partial\tilde{\varphi}_\mu(0,u)}{\partial x}P_{\mu\nu}\tilde{h}_{\mu\nu}\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right)+\sum_{\mu\in A_\nu}\lambda_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_\mu\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu},u\right)+$$
$$+\lambda_{0\nu}\tilde{\varphi}_0(u)\tilde{h}_{0\nu}\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right)+\tilde{\varphi}_\nu^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right). \tag{4}$$

Аналогичным образом, из последнего уравнения системы (3) находим

$$\alpha_{\nu_T}\frac{\partial\tilde{\varphi}_{\nu_T}(0,u)}{\partial x}=\tilde{\varphi}_{\nu_T}^{(0)}\left(\frac{u}{\alpha_{\nu_T}}\right)+\sum_{\mu\in A_{\nu_T}}\lambda_{\mu\nu_T}\tilde{\varphi}_\mu\left(\frac{u}{\alpha_{\nu_T}},u\right)+$$
$$+\lambda_{0\nu_T}\tilde{\varphi}_0(u)\tilde{h}_{0\nu_T}\left(\frac{u}{\alpha_{\nu_T}}\right). \tag{5}$$

Устремляя в уравнениях системы (3) $s\to 0$, получаем следующую систему

$$\left.\begin{aligned}
&u\tilde{P}_0(u)=-\lambda_0\tilde{P}_0(u)+\sum_{\mu\in B_0}\alpha_\mu\frac{\partial\tilde{\varphi}_\mu(0,u)}{\partial x}+P_0^{(0)},\\
&u\tilde{P}_\nu(u)=-\lambda_\nu\tilde{P}_\nu(u)+P_\nu^{(0)}-\alpha_\nu\frac{\partial\tilde{\varphi}_\nu(0,u)}{\partial x}+\\
&+\sum_{\mu\in B_\nu}\alpha_\mu\frac{\partial\tilde{\varphi}_\mu(0,u)}{\partial x}P_{\mu\nu}+\sum_{\mu\in A_\nu}\lambda_{\mu\nu}\tilde{P}_\mu(u),\\
&u\tilde{P}_{\nu_T}(u)=P_{\nu_T}^{(0)}-\alpha_{\nu_T}\frac{\partial\tilde{\varphi}_{\nu_T}(0,u)}{\partial x}+\sum_{\mu\in A_{\nu_T}}\lambda_{\mu\nu_T}\tilde{P}_\mu(u).
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Из второго уравнения системы (3), раскрывая рекуррентное соотношение, получаем

$$\tilde{\varphi}_\nu(s,u)=\frac{1}{u-\alpha_\nu s+\lambda_\nu}\left[\sum_{i=0}^{|\nu|-1}\sum_{\mu_1\in A_\nu}\frac{\lambda_{\mu_1\nu}}{u-\alpha_{\mu_1}s+\lambda_{\mu_1}}\cdots\sum_{\mu_i\in A_{\mu_{i-1}}}\frac{\lambda_{\mu_i\mu_{i-1}}}{u-\alpha_{\mu_i}s+\lambda_{\mu_i}}\times\right.$$
$$\times\left(\tilde{\varphi}_{\mu_i}^{(0)}(s)-\alpha_{\mu_i}\frac{\partial\tilde{\varphi}_{\mu_i}(0,u)}{\partial x}+\sum_{\mu\in B_{\mu_i}}\alpha_\mu\frac{\partial\tilde{\varphi}_\mu(0,u)}{\partial x}P_{\mu\mu_i}\tilde{h}_{\mu\mu_i}(s)+\lambda_{0\mu_i}\tilde{P}_0(u)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\tilde{h}_{0\mu_i}(s)\right)\right],$$

$$(\mu_0=\nu). \tag{7}$$

Из второго уравнения системы (6) аналогичным образом находим формулу для $\tilde{P}_\nu(u)$:

$$\tilde{P}_\nu(u)=\frac{1}{u+\lambda_\nu}\left[\sum_{i=0}^{|\nu|-1}\sum_{\mu_1\in A_\nu}\frac{\lambda_{\mu_1\nu}}{u+\lambda_{\mu_1}}\cdots\sum_{\mu_{i-1}\in A_{\mu_{i-2}}}\frac{\lambda_{\mu_{i-1}\mu_{i-2}}}{u+\lambda_{\mu_{i-1}}}\sum_{\mu_i\in A_{\mu_{i-1}}}\times\right.$$
$$\times\frac{\lambda_{\mu_i\mu_{i-1}}}{u+\lambda_{\mu_i}}\left(P_{\mu_i}^{(0)}-\alpha_{\mu_i}\frac{\partial\tilde{\varphi}_{\mu_i}(0,u)}{\partial x}+\sum_{\mu\in B_{\mu_i}}\alpha_\mu\frac{\partial\tilde{\varphi}_\mu(0,u)}{\partial x}P_{\mu\mu_i}\right)+$$
$$\left.+\tilde{P}_0(u)\sum_{i=0}^{|\nu|-1}\sum_{\mu_1\in A_\nu}\frac{\lambda_{\mu_1\nu}}{u+\lambda_{\mu_1}}\cdots\sum_{\mu_i\in A_{\mu_{i-1}}}\frac{\lambda_{\mu_i\mu_{i-1}}}{u+\lambda_{\mu_i}}\lambda_{0\mu_i}\right]. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (4) и (5), получаем для $\alpha_\nu \dfrac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x}$ систему линейных алгебраических уравнений. Определитель этой системы $\Delta(u) = 1 + o(1)$ при $u \to \infty$, $\operatorname{Re}\{u\} > 0$. Это соотношение показывает, что $\Delta(u)$ – функция, не обращающаяся в нуль тождественно. Ввиду очевидной аналитичности $\Delta(u)$ в правой полуплоскости из этого следует, что $\Delta(u)$ может обращаться в нуль лишь в исключительных точках. Тогда система уравнений для $\alpha_\nu \dfrac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x}$ будет иметь единственное решение почти для всех значений u из правой полуплоскости. Система линейных алгебраических уравнений для $\alpha_\nu \dfrac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x}$ решается обычными способами. Подставляя полученное решение в (8), находим выражения для $\tilde{P}_\nu(u)$. Осталось определить $\tilde{P}_0(u)$. $\tilde{P}_0(u)$ определяется из условия $\sum\limits_\nu P_\nu(u) = \dfrac{1}{u}$. Заметим, что для существования стационарного эргодического распределения в силу эргодической теоремы для общей схемы массового обслуживания [1], в которую рассматриваемая схема входит как частный случай, достаточно, чтобы $\alpha_\nu > 0$ при всех ν с $\nu > 0$ и $M\eta_{\nu\mu} < \infty$ при всех ν, μ. Умножая выражения для $\tilde{P}_\nu(u)$ на u и устремляя $u \to 0$, в силу тауберовой теоремы получаем стационарный случай, исследованный ранее в [2]. Таким образом, преобразование Лапласа нестационарного распределения вероятностей состояний $\tilde{P}_\nu(u)$ имеет вид дробно-рациональных функций от преобразований Лапласа – Стилтьеса распределений количества работы, необходимой для обслуживания различных требований,

$$\tilde{h}_{\nu\mu}\left(\frac{u+\lambda_{\nu'}}{\alpha_{\nu'}}\right) = \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{u+\lambda_{\nu'}}{\alpha_{\nu'}}\, x\right\} dH_{\nu\mu}(x)$$

и параметров $\lambda_{\nu\mu}$, α_ν, $P_{\nu\mu}$.

Заметим, что класс операций над исходными характеристиками, необходимых для получения преобразований Лапласа нестационарного распределения вероятностей состояний рассматриваемой системы, близок к классу операций для стационарного случая [2] и существенно у́же, чем класс операций, используемый в теореме И. Н. Коваленко [1] об аналитическом виде стационарного распределения общего класса однолинейных систем массового обслуживания. В частности, вместо решения алгебраических уравнений используется более простая операция – решение системы линейных алгебраических уравнений.

Подставляя полученные выражения для $\alpha_\nu \dfrac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x}$ и $\tilde{P}_0(u)$ в (7), определяем $\tilde{\varphi}_\nu(s, u)$, которые также имеют вид дробно-рациональных функций от преобразований Лапласа – Стилтьеса $\tilde{h}_{\nu\mu}\left(\dfrac{u+\lambda_{\nu'}}{\alpha_{\nu'}}\right)$, $h_{\nu\mu}(s)$ и параметров $\lambda_{\nu\mu}$, α_ν, $P_{\nu\mu}$. Выясним теперь, в каких случаях в формулы для $\tilde{P}_\nu(u)$ и $\tilde{\varphi}_\nu(s, u)$ будут входить производные от преобразований Лапласа – Стилтьеса $\tilde{h}_{\nu\mu}(s)$ и какого порядка. Как уже указывалось ранее [2], множество состояний $\{\nu\}$ можно частично упорядочить относительно операции следования $\to$, которая определяется следующим образом: $\mu \to \nu$, если $|\mu| < |\nu|$ и все требования состояния μ содержатся в требованиях состояния ν, т.е. переход из μ в ν

возможен только за счет поступления требований. Очевидно, что относительно этой операции $\{\nu\}$ будет частично упорядоченным множеством. Можно выделить цепочки состояний ν, соединяющие посредством введенной операции нулевое состояние с конечными (тупиковыми) состояниями. Рассмотрим такую цепочку c: $0 \to \nu_1 \to \nu_2 \to \ldots \to \nu_T$. Если в ней $(\lambda_{\nu_i}, \alpha_{\nu_i}) \neq \neq (\lambda_{\nu_j}, \alpha_{\nu_j})$ при $i \neq j$, то назовем ее цепочкой нулевого порядка для нестационарного случая. Если же $(\lambda_{\nu_i}, \alpha_{\nu_i}) = (\lambda_{\nu_j}, \alpha_{\nu_j})$ для $i \neq j$, то это будет цепочка ненулевого порядка и максимальное количество равенств такого типа a_c в цепочке назовем порядком цепочки в нестационарном случае. Порядок системы a в нестационарном случае определяется как $a = \max\limits_c \{a_c\}$. Производные получаются, если в (3) в выражение $u - \alpha_\nu s + \lambda_\nu$ подставляется значение $s = \frac{u + \lambda_{\nu'}}{\alpha_{\nu'}}$ такое, что $u - \alpha_\nu s + \lambda_\nu = 0$, а это возможно лишь в том случае, когда $(\lambda_\nu, \alpha_\nu) = (\lambda_{\nu'}, \alpha_{\nu'})$. Следовательно, $\tilde{P}_\nu(u)$ и $\tilde{\varphi}_\nu(s, u)$ будут содержать производные от преобразований Лапласа — Стилтьеса $\tilde{h}_{\nu\mu}(s)$ в том случае, если $(\lambda_\nu, \alpha_\nu) = (\lambda_\mu, \alpha_\mu)$ при $\mu \to \nu$. Поэтому из (3—8) следует, что максимальный порядок производных от преобразований Лапласа — Стилтьеса в формулах для $\tilde{P}_\nu(u)$ и $\tilde{\varphi}_\nu(s, u)$ не превышает a. Заметим, что в стационарном случае [2], который получается, если в (3—6) $u \to 0$, для того, чтобы формулы для P_ν содержали производные от $\tilde{h}_{\nu\mu}(s)$, достаточно было наличия равенств типа $\frac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{\lambda_\mu}{\alpha_\mu}$ при $\mu \to \nu$.

Перейдем теперь к нахождению распределения времени пребывания в фиксированном множестве состояний A $P_A(t)$. При условии $\alpha_\nu > 0$, $|\nu| > 0$ и $M\eta_{\nu\mu} < \infty$ граф переходов системы представляет собой связный ориентированный граф G. A является подмножеством N и связанный с A подграф G_A, вершины которого образуют A, пусть также является связным подграфом. Из A можно выйти в состояния, которые обозначим через $\nu_{A1}, \ldots, \nu_{Ak}$. Обозначим также

$$\bar{\varphi}_\nu(x, t) = P\{\nu(t) = \nu,\ \xi(t) < x,\ \nu(\tau) \neq \nu_{Ai},\ i = 1, \ldots, k,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$$

и

$$\bar{P}_{\nu_{Ai}}(t) = P\{\nu(t) = \nu_{Ai},\ \nu(\tau) \neq \nu_{Aj},\ j = 1, \ldots, k,\ 0 \leqslant \tau < t_1$$

и

$$\nu(\tau) = \nu_{Ai},\ t_1 \leqslant \tau \leqslant t\}.$$

Состояния ν_{Ai}, $i = 1, \ldots, k$, являются поглощающими состояниями. Пусть для определенности $0 \in A$.

Для $\bar{\varphi}_\nu(x, t)$ и $\bar{P}_{\nu_{Ai}}(t)$ имеет место следующая система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_0'(t) = -\lambda_0 \bar{\varphi}_0(t) + \sum_{\mu \in B_0} \alpha_\mu \frac{\partial \bar{\varphi}_\mu(0, t)}{\partial x}, \\
&\vdots \\
&\frac{\partial \bar{\varphi}_\nu(x, t)}{\partial t} - \alpha_\nu \frac{\partial \bar{\varphi}_\nu(x, t)}{\partial x} = -\lambda_\nu \bar{\varphi}_\nu(x, t) - \alpha_\nu \frac{\partial \bar{\varphi}_\nu(0, t)}{\partial x} + \\
&+ \sum_{\mu \in B_\nu} \alpha_\mu \frac{\partial \bar{\varphi}_\mu(0, t)}{\partial x} P_{\mu\nu} H_{\mu\nu}(x) + \sum_{\mu \in A_\nu} \lambda_{\mu\nu} \bar{\varphi}_\mu(x, t) + \lambda_{0\nu} \cdot \bar{\varphi}_0(t) H_{0\nu}(x), \\
&\vdots
\end{aligned}\right|$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\vdots\\
&\frac{\partial\bar\varphi_\nu(x,t)}{\partial t}-\alpha_\nu\frac{\partial\bar\varphi_\nu(x,t)}{\partial x}=-\lambda_\nu\bar\varphi_\nu(x,t)-\alpha_\nu\frac{\partial\bar\varphi_\nu(0,t)}{\partial x}+\\
&+\sum_{\mu\in B_\nu\setminus B_\nu\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\nu_{Ai}\right)}\alpha_\mu\frac{\partial\bar\varphi_\mu(0,t)}{\partial x}P_{\mu\nu}H_{\mu\nu}(x)+\sum_{\mu\in A_\nu}\lambda_{\mu\nu}\bar\varphi_\mu(x,t)+\lambda_{0\nu}\times\\
&\times\bar\varphi_0(t)H_{0\nu}(x)\ \text{для}\ \nu\subset|\nu|=|\nu_{Ai}|-1,\\
&\bar P'_{\nu_{Ai}}(t)=\sum_{\mu\in A_{\nu_{Ai}}}\lambda_{\mu\nu_{Ai}}\bar\varphi_\mu(\infty,t),\qquad i=1,\ \ldots,\ k,
\end{aligned}\right\}\quad(9)
$$

с начальными условиями

$$\bar\varphi_\nu(x,\ 0)=\bar\varphi_\nu^{(0)}(x),\ \bar P_0^{(0)}=\bar\varphi_0(0),\ \bar P_\nu^{(0)}=\bar\varphi_\nu^{(0)}(\infty),\ \nu\in A.$$

Обозначим

$$\bar{\bar\varphi}_\nu(s,\ u)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx-ut}d_x\bar\varphi_\nu(x,\ t)\,dt,\ \ \bar{\bar\varphi}_0(u)=\int_0^\infty e^{-ut}\bar\varphi_0(t)\,dt,$$

$$\frac{\partial\bar{\bar\varphi}_\nu(0,\ u)}{\partial x}=\int_0^\infty e^{-ut}\frac{\partial\bar\varphi_\nu(0,\ t)}{\partial x}\,dt,\ \ \bar{\bar P}_{\nu_{Ai}}(u)=\int_0^\infty e^{-ut}\bar P_{\nu_{Ai}}(t)\,dt.$$

Тогда в преобразованиях Лапласа (9) имеет вид:

$$
\left.\begin{aligned}
&u\bar{\bar\varphi}_0(u)=-\lambda_0\bar{\bar\varphi}_0(u)+\sum_{\mu\in B_0}\alpha_\mu\frac{\partial\bar{\bar\varphi}_\mu(0,\ u)}{\partial x}+\bar P_0^{(0)},\\
&(u-\alpha_\nu s+\lambda_\nu)\bar{\bar\varphi}_\nu(s,\ u)=-\alpha_\nu\frac{\partial\bar{\bar\varphi}_\nu(0,\ u)}{\partial x}+\sum_{\mu\in A_\nu}\lambda_{\mu\nu}\bar{\bar\varphi}_\mu(s,\ u)+\\
&+\sum_{\mu\in B_\nu}\alpha_\mu\frac{\partial\bar{\bar\varphi}_\mu(0,\ u)}{\partial x}P_{\mu\nu}\tilde h_{\mu\nu}(s)+\tilde{\bar\varphi}_\nu^{(0)}(s)+\lambda_{0\nu}\bar{\bar\varphi}_0(u)\tilde h_{0\nu}(s),\\
&(u-\alpha_\nu s+\lambda_\nu)\bar{\bar\varphi}_\nu(s,\ u)=-\alpha_\nu\frac{\partial\bar{\bar\varphi}_\nu(0,\ u)}{\partial x}+\sum_{\mu\in A_\nu}\lambda_{\mu\nu}\bar{\bar\varphi}_\mu(s,\ u)+\\
&+\sum_{\mu\in B_\nu\setminus B_\nu\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\nu_{Ai}\right)}\alpha_\mu\frac{\partial\bar{\bar\varphi}_\mu(0,\ u)}{\partial x}P_{\mu\nu}\tilde h_{\mu\nu}(s)+\tilde{\bar\varphi}_\nu^{(0)}(s)+\lambda_{0\nu}\bar{\bar\varphi}_0(u)\tilde h_{0\nu}(s)\\
&\text{для}\ \nu\subset|\nu|=|\nu_{Ai}|-1,\\
&u\bar{\bar P}_{\nu_{Ai}}(u)=\sum_{\mu\in A_{\nu_{Ai}}}\lambda_{\mu\nu_{Ai}}\bar{\bar P}_\mu(u),\qquad i=1,\ \ldots,\ k.
\end{aligned}\right\}\quad(10)
$$

Система уравнений (10) решается по тому же алгоритму, что и система уравнений (3). Доказательство единственности решения проводится аналогично. Тогда

$$\tilde P_A(u)=\int_0^\infty e^{-ut}P_A(t)\,dt=\sum_{i=1}^{k}\bar{\bar P}_{\nu_{Ai}}(u).$$

Отсюда легко видеть, что утверждение об аналитическом виде $\tilde P_\nu(u)$ полностью справедливо и для $\tilde P_A(u)$.

Рассмотрим период занятости. Очевидно, что функционирование системы происходит чередованием свободных периодов с функцией распределения длительности $1-e^{-\lambda_0 x}$ и периодов занятости с функцией распределения длительности $\Gamma(x)$. Если в начальный момент система была свободна, то, как показано в [5],

$$\tilde{P}_0(u)=\frac{1}{u+\lambda-\lambda\tilde{\Gamma}(u)},\ \text{где}\ \tilde{\Gamma}(u)=\int\limits_0^\infty e^{-ux}d\Gamma(x).$$

Отсюда $\tilde{\Gamma}(u)=\frac{1}{\lambda}[(u+\lambda)\tilde{P}_0(u)-1]$ и утверждение о виде $\tilde{P}_0(u)$ справедливо и для $\tilde{\Gamma}(u)$.

Перейдем теперь к виртуальному времени ожидания $\omega_\alpha(t)$. Известно, что $\omega_\alpha(t)$ – это время с момента t до того момента, когда начнется обслуживание требования α при условии, что оно пришло в момент t. Пусть в момент $t-0$ было состояние μ, а в момент t поступившее требование α перевело систему в состояние ν. Для определения времени ожидания поступившего требования $\alpha\omega_\alpha(t)$ необходимо ввести новую кодировку состояний с тем, чтобы выделить поступившее требование α (можно, например, поступившее требование выделить в отдельную компоненту вектора состояний, либо выделение произвести каким-либо другим способом). Тогда выделяется два множества: первое множество C_α состояний содержит поступившее требование α необслуживающимся и второе множество D_α состояний содержит поступившее требование уже обслуживающимся.

Пусть $\Phi_\alpha(x,\ t)=P\ \{\omega_\alpha(t)<x\}$, тогда

$$\tilde{\varphi}_\alpha(s,\ u)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-sx-ut}d_x\Phi_\alpha(x,\ t)\,dt=\tilde{P}_0(u)+\sum_{\nu\in N_\alpha}\tilde{P}_\nu(u)\cdot\tilde{\Psi}_\alpha(s),$$

где $\tilde{P}_\nu(u)$ – преобразования Лапласа вероятностей нахождения системы в момент $t-0$ (а, следовательно, и в момент t, т.к. t – не момент поступления требования или окончания обслуживания) в состоянии ν, найденные ранее, N_α – множество состояний, исключая состояние 0, при которых в момент t может поступить рассматриваемое требование α, $\tilde{\Psi}_\alpha(s)$ – преобразование Лапласа – Стилтьеса времени пребывания требования α в C_α. Легко видеть, что C_α получается из N_α, если в каждом состоянии N_α учесть поступившее требование α с его выделением. Тогда $\tilde{\Psi}_\alpha(s)$ определяется по предыдущему алгоритму для времени пребывания в фиксированном множестве со следующими начальными условиями:

$$\bar{\varphi}_\nu^{(0)}(x)=\frac{\varphi_\nu(x,\ t)}{\sum\limits_{\nu\in N_\alpha}P_\nu(t)},\quad \bar{P}_\nu^{(0)}=\frac{P_\nu(t)}{\sum\limits_{\nu\in N_\alpha}P_\nu(t)},$$

где t фиксировано. Следовательно, утверждение о виде $\tilde{P}_\nu(u)$, $\tilde{P}_A(u)$ и $\tilde{\Gamma}(u)$ справедливо и для $\tilde{\varphi}_\alpha(s,\ u)$. Теорема доказана. Доказательство теоремы является вместе с тем и эффективным алгоритмом фактического нахождения исследуемых характеристик.

Замечание 1. Если однолинейная система обслуживает с постоянной скоростью конечное число объектов, могущих выходить из строя, то для нее $\tilde{P}_\nu(u)$, $\tilde{\varphi}_\nu(s, u)$, $\tilde{\varphi}_\alpha(s, u)$, $\tilde{P}_A(u)$, $\tilde{\Gamma}(u)$ не будут зависеть от производных от функций $\tilde{h}_{\nu\mu}(s)$.

Замечание 2. Как указывалось в [2], исследуемая схема близка к схеме „линейчатых процессов" Ю. К. Беляева [3]. Оказывается посредством преобразований типа сжатия и растяжения из одного процесса можно получить другой, т.е. $\nu(\tau)=\mu(t)$, где $\mu(t)$ – процесс Беляева с интенсивностями поступления требований $\frac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}$ и $\tau=\int\limits_0^t \alpha_{\nu(u)}\,du$. Таким образом, если взять процесс Беляева с интенсивностями поступления $\frac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}$ и длину интервалов, на которых этот процесс находится в состоянии ν, изменить в α_ν раз, то получится процесс, тождественный исследуемому. Следовательно, указанный алгоритм нахождения нестационарных распределений вероятностей состояний действенен также и для схемы Ю. К. Беляева.

В исследованный класс однолинейных систем с марковским входящим потоком входят системы без приоритета, системы с приоритетом, не прерывающим обслуживания твебований.

3. Пример

Проиллюстрируем применение теоремы следующим примером. Имеются два устройства, времена исправной работы которых распределены по экспоненциальному закону с параметрами λ_1 и λ_2, соответственно. Времена восстановления имеют функции распределения $H_1(x)$ и $H_2(x)$, соответственно. Восстановление производится одним ремонтным органом. Нужно определить нестационарные вероятности состояний. Состояние определяется порядком в очереди. Возможны 5 состояний: 0, 1, 2, 12, 21. Для $\varphi_\nu(x, t)$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned}
&P_0'(t)=-(\lambda_1+\lambda_2)P_0(t)+\frac{\partial\varphi_1(0, t)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2(0, t)}{\partial x},\\
&\frac{\partial\varphi_1(x, t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_1(x, t)}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi_1(0, t)}{\partial x}-\lambda_2\varphi_1(x, t)+\frac{\partial\varphi_{21}(0, t)}{\partial x}H_1(x)+\lambda_1P_0(t)H_1(x),\\
&\frac{\partial\varphi_2(x, t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_2(x, t)}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi_2(0, t)}{\partial x}-\lambda_1\varphi_2(x, t)+\frac{\partial\varphi_{12}(0, t)}{\partial x}H_2(x)+\lambda_2P_0(t)H_2(x),\\
&\frac{\partial\varphi_{12}(x, t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_{12}(x, t)}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi_{12}(0, t)}{\partial x}+\lambda_2\varphi_1(x, t),\\
&\frac{\partial\varphi_{21}(x, t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_{21}(x, t)}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi_{21}(0, t)}{\partial x}+\lambda_1\varphi_2(x, t)
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

с начальными условиями

$$\varphi_1(x, 0)=\varphi_1^{(0)}(x),\ \varphi_2(x, 0)=\varphi_2^{(0)}(x),\ \varphi_{12}(x, 0)=\varphi_{12}^{(0)}(x),$$

$$\varphi_{21}(x, 0)=\varphi_{21}^{(0)}(x)\ \Big(P_0^{(0)}=P_0(0),\ P_1^{(0)}=\varphi_1^{(0)}(\infty),$$

$$P_2^{(0)}=\varphi_2^{(0)}(\infty),\ \ P_{12}^{(0)}=\varphi_{12}^{(0)}(\infty),\ \ P_{21}^{(0)}=\varphi_{21}^{(0)}(\infty)\Big).$$

Применяя двойное преобразование Лапласа, имеем

$$\left.\begin{aligned}
&(u+\lambda_1+\lambda_2)\tilde{P}_0(u)=\frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\ u)}{\partial x}+P_0^{(0)},\\
&(u-s+\lambda_2)\tilde{\varphi}_1(s,\ u)=-\frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}_{21}(0,\ u)}{\partial x}\tilde{h}_1(s)+\lambda_1\tilde{P}_0(u)\tilde{h}_1(s)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(s),\\
&(u-s+\lambda_1)\tilde{\varphi}_2(s,\ u)=-\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\ u)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}_{12}(0,\ u)}{\partial x}\tilde{h}_2(s)+\lambda_2\tilde{P}_0(u)\tilde{h}_2(s)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(s),\\
&(u-s)\tilde{\varphi}_{12}(s,\ u)=-\frac{\partial\tilde{\varphi}_{12}(0,\ u)}{\partial x}+\lambda_2\tilde{\varphi}_1(s,\ u)+\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(s),\\
&(u-s)\tilde{\varphi}_{21}(s,\ u)=-\frac{\partial\tilde{\varphi}_{21}(0,\ u)}{\partial x}+\lambda_1\varphi_2(s,\ u)+\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(s).
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Устремляя в (12) $s\to 0$, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&(u+\lambda_1+\lambda_2)\tilde{P}_0(u)=\frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\ u)}{\partial x}+P_0^{(0)},\\
&(u+\lambda_2)\tilde{P}_1(u)=-\frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}_{21}(0,\ u)}{\partial x}+\lambda_1\tilde{P}_0(u)+P_1^{(0)},\\
&(u+\lambda_1)\tilde{P}_2(u)=-\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\ u)}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\varphi}_{12}(0,\ u)}{\partial x}+\lambda_2\tilde{P}_0(u)+P_2^{(0)},\\
&u\tilde{P}_{12}(u)=-\frac{\partial\tilde{\varphi}_{12}(0,\ u)}{\partial x}+\lambda_2\tilde{P}_1(u)+P_{12}^{(0)},\\
&u\tilde{P}_{21}(u)=-\frac{\partial\tilde{\varphi}_{21}(0,\ u)}{\partial x}+\lambda_1\tilde{P}_2(u)+P_{21}^{(0)}.
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Из условия аналитичности функций при $\operatorname{Re}\{s\}\geqslant 0$ и $\operatorname{Re}\{u\}\geqslant 0$ находим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{\varphi}_{21}(0,\ u)}{\partial x}\tilde{h}_1(u+\lambda_2)+\lambda_1\tilde{P}_0(u)\tilde{h}_1(u+\lambda_2)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_2),\\
&\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\ u)}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{\varphi}_{12}(0,\ u)}{\partial x}\tilde{h}_2(u+\lambda_1)+\lambda_2\tilde{P}_0(u)\tilde{h}_2(u+\lambda_1)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1),\\
&\frac{\partial\tilde{\varphi}_{12}(0,\ u)}{\partial x}=\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\lambda_2\tilde{\varphi}_1(u,\ u)=\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\frac{\partial\tilde{\varphi}_{21}(0,\ u)}{\partial x}\tilde{h}_1(u)-\\
&-\frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}+\lambda_1\tilde{P}_0(u)\tilde{h}_1(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u),\\
&\frac{\partial\tilde{\varphi}_{21}(0,\ u)}{\partial x}=\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\lambda_1\tilde{\varphi}_2(u,\ u)=\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\frac{\partial\tilde{\varphi}_{12}(0,\ u)}{\partial x}\tilde{h}_2(u)-\\
&-\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\ u)}{\partial x}+\lambda_2\tilde{P}_0(u)\tilde{h}_2(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u).
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Решая эту систему уравнений, имеем $\Big(\Big[1-\big(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\big)\big(\tilde{h}_2(u)-$ $-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\big)\Big]$ обозначим через $L(u)\Big)$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_1(0,\ u)}{\partial x}=L^{-1}(u)\Big[\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\Big(\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1)+\lambda_1\tilde{P}_0(u)+$$

$$+\big(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\big)\big(\lambda_2\tilde{P}_0(u)+\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u)\big)\Big)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_2)\times$$

$$\times\Big(1-\tilde{h}_1(u)\big(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\big)\Big)\Big],$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_2(0,\,u)}{\partial x}=L^{-1}(u)\left[\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\left(\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_2)+\lambda_2\tilde{P}_0(u)+\right.\right.$$

$$+\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\left(\lambda_1\tilde{P}_0(u)+\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u)\right)\Big)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1)\times$$

$$\left.\times\left(1-\tilde{h}_2(u)\left(\tilde{h}_1(u)-h_1(u+\lambda_2)\right)\right)\right],$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_{12}(0,\,u)}{\partial x}=L^{-1}(u)\left[\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_2)+\lambda_1\tilde{P}_0(u)\times\right.$$

$$\times\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(a+\lambda_2)\right)+\left(\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1)+\right.$$

$$\left.+\lambda_2\tilde{P}_0(u)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\right)\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\Big], \tag{15}$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_{21}(0,\,u)}{\partial x}=L^{-1}(u)\left[\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1)+\lambda_2\tilde{P}_0(u)\times\right.$$

$$\times\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)+\left(\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_1)+\right.$$

$$\left.+\lambda_1\tilde{P}_0(u)\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\right)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\Big].$$

Подставляя эти выражения в (13), получаем искомые формулы

$$\tilde{P}_0(u)=\left[\left(\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u)\right)\left(\tilde{h}_2(u+\lambda_1)+\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\right)+\right.$$

$$+\left(\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u)\right)\left(\tilde{h}_1(u+\lambda_2)+\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\right)+$$

$$+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_2)\left(1-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)-\tilde{h}_1(u)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\right)+$$

$$+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1)\left(1-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)-\tilde{h}_2(u)\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\right)+$$

$$\left.+P_0^{(0)}\left(1-\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\right)\right]\times$$

$$\times\left[u\left(1-\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\right)-\lambda_1\tilde{h}_1(u+\lambda_2)-\right.$$

$$-\lambda_2\tilde{h}_2(u+\lambda_1)-\lambda_1\tilde{h}_2(u)\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)-$$

$$\left.-\lambda_2\tilde{h}_1(u)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)+\lambda_1+\lambda_2\right]^{-1},$$

$$\tilde{P}_1(u)=\frac{1}{u+\lambda_2}\left[P_1^{(0)}+\lambda_1\tilde{P}_0(u)+\left(1-\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\times\right.\right.$$
$$\times\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\Big)^{-1}\left(\left(\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1)+\right.\right.$$
$$+\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\left(\lambda_2\tilde{P}_0(u)+\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u)\right)\Big)\left(1-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)-$$
$$-\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_2)\left(\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\left(1+\tilde{h}_1(u)\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)+$$
$$\left.\left.+\lambda_1\tilde{P}_0(u)\left(\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\right)\right],$$

$$\tilde{P}_2(u)=\frac{1}{u+\lambda_1}\left[P_2^{(0)}+\lambda_2\tilde{P}_0(u)+\left(1-\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\times\right.\right.$$
$$\times\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\Big)^{-1}\left(\left(\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_2)+\right.\right.$$
$$+\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\left(\lambda_1\tilde{P}_0(u)+\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u)\right)\Big)\left(1-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)-$$
$$-\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1)\left(\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\left(1+\tilde{h}_2(u)\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)+$$
$$\left.\left.+\lambda_2\tilde{P}_0(u)\left(\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\right)\right],$$

$$\tilde{P}_{12}(u)=\frac{1}{u}\left[\lambda_2\tilde{P}_1(u)+P_{12}^{(0)}-\left(1-\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\times\right.\right.$$
$$\times\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\Big)^{-1}\left(\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_2)+\right.$$
$$+\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\left(\lambda_1\tilde{P}_0(u)+\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1)+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\lambda_2\tilde{P}_0(u)\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\right)\right)\right],$$

$$\tilde{P}_{21}(u)=\frac{1}{u}\left[\lambda_1\tilde{P}_2(u)+P_{21}^{(0)}-\left(1-\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\times\right.\right.$$
$$\times\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\Big)^{-1}\left(\tilde{\varphi}_{21}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_2^{(0)}(u+\lambda_1)+\right.$$
$$+\left(\tilde{h}_2(u)-\tilde{h}_2(u+\lambda_1)\right)\left(\lambda_2\tilde{P}_0(u)+\tilde{\varphi}_{12}^{(0)}(u)+\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u)-\tilde{\varphi}_1^{(0)}(u+\lambda_2)+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\lambda_1\tilde{P}_0(u)\left(\tilde{h}_1(u)-\tilde{h}_1(u+\lambda_2)\right)\right)\right)\right]. \qquad (16)$$

4. Частный случай

В частном случае, когда в состояние ν можно попасть только из одного состояния μ с $|\mu|=|\nu|+1$ для $\tilde{P}_\nu(u)$ существуют рекуррентные формулы, причем здесь множество $\{\nu\}$ не обязательно конечно. Действительно, (6) в этом случае имеет вид

$$\alpha_\mu \frac{\partial \tilde{\varphi}_\mu(0, u)}{\partial x} P_{\mu\nu} = (u+\lambda_\nu)\tilde{P}_\nu(u) + \alpha_\nu \frac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x} \sum_{\mu \in A_\nu} \lambda_{\mu\nu}\tilde{P}_\mu(u) - P_\nu^{(0)}. \quad (17)$$

(4) в этом случае имеет следующий вид:

$$\alpha_\mu \frac{\partial \tilde{\varphi}_\mu(0, u)}{\partial x} P_{\mu\nu}\tilde{h}_\nu\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right) = \alpha_\nu \frac{\partial \varphi_\nu(0, u)}{\partial x} -$$

$$- \sum_{\mu \in A_\nu} \lambda_{\mu\nu} \tilde{\tilde{\varphi}}_\mu \left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}, u\right) - \tilde{\varphi}_\nu^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right). \quad (18)$$

Подставив (18) в (17), получим

$$\tilde{P}_\nu(u) = \left[(u+\lambda_\nu)\tilde{h}_\nu\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right)\right]^{-1} \left[\alpha_\nu \frac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x}\left(1 - \tilde{h}_\nu\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right)\right) -\right.$$

$$- \tilde{\varphi}_\nu^{(0)}\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right) + \sum_{\mu \in A_\nu} \lambda_{\mu\nu}\left(\tilde{P}_\mu(u)\tilde{h}_\nu\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right) - \tilde{\varphi}_\mu\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}, u\right)\right) +$$

$$\left. + P_\nu^{(0)}\tilde{h}_\nu\left(\frac{u+\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\right)\right]. \quad (19)$$

Второе уравнение (3) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\tilde{\varphi}_\nu(s, u) = \frac{1}{u - \alpha_\nu s + \lambda_\nu}\left[-\alpha_\nu \frac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x}\left(1 - \tilde{h}_\nu(s)\right) + \sum_{\mu \in A_\nu} \lambda_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_\mu(s, u) +\right.$$

$$\left. + \tilde{\varphi}_\nu^{(0)}(s) + \tilde{h}_\nu(s)\left((u+\lambda_\nu)\tilde{P}_\nu(u) - P_\nu^{(0)} - \sum_{\mu \in A_\nu} \lambda_{\mu\nu}\tilde{P}_\mu(u)\right)\right]. \quad (20)$$

В силу (17) $\alpha_\nu \frac{\partial \tilde{\varphi}_\nu(0, u)}{\partial x}$ выражается через $\alpha_{\nu'} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{\nu'}(0, u)}{\partial x}$ и $P_{\nu'}(u)$, $|\nu'|<|\nu|$, следовательно, искомые рекуррентные формулы получены. $\tilde{P}_0(u)$ находится из условия $\sum_\nu \tilde{P}_\nu(u) = \frac{1}{u}$.

В эту схему укладывается ряд схем массового обслуживания, для которых получены в нестационарном случае явные или рекуррентные формулы, например, система $M|G|1$ (символика Кендалла [4]), исследованная в [5], система $M|G|1$ с ординарным входящим потоком, с учетом возможности выхода прибора из строя и восстановления [6], с зависимостью параметров системы от длины очереди [7].

Таким образом, в работе показано, что преобразования Лапласа основных характеристик рассматриваемой системы, как-то нестационарных (а также стационарных) вероятностей состояний $P_\nu(t)$, распределения времени пребывания в фиксированном множестве состояний A $P_A(t)$, распределения периода занятости, распределения времени ожидания, являются дробно-рациональными функциями от преобразований Лапласа – Стилтьеса распределений количества работы по обслуживанию требований, их производных и параметров $\lambda_{\nu\mu}$, α_ν, $P_{\nu\mu}$. Предложен также эффективный алгоритм для их фактического нахождения.

Москва

Поступило в редакцию
21.IV.1969

Литература

1. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Введение в теорию массового обслуживания, „Наука", М., 1966.
2. В. А. Ивницкий, Алгоритмический подход к нахождению стационарного распределения вероятностей состояний одного класса однолинейных систем массового обслуживания (без памяти), Сб. трудов семинара „Сложные системы и моделирование" Института кибернетики АН УССР, вып. 1, Киев, 1968.
3. Ю. К. Беляев, Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности, Труды V Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике (1960), Гос. изд-во полит. и научн. литературы Литовской ССР, Вильнюс, 1962.
4. Д. Кендалл, О некоторых последних работах и дальнейших проблемах в теории очередей, Теория вероятностей и ее применения, вып. 1 (1964).
5. В. А. Ивницкий, О нестационарном распределении длины очереди однолинейной системы массового обслуживания, Liet. matem. rink., **IX**, 2 (1969), 281–290.
6. В. А. Ивницкий, О нестационарном распределении длины очереди и времени ожидания ненадежной однолинейной системы массового обслуживания, Украинский математический журнал, № 4 (1970).
7. В. А. Ивницкий, Исследование нестационарных характеристик однолинейной системы с параметрами, зависящими от длины очереди, сб. „Вычислительная и прикладная математика", изд-во КГУ, Киев, вып. 14 (1971).

VIENOS KLASĖS VIENATIESINIŲ APTARNAVIMO SISTEMŲ NESTACIONARINIŲ CHARAKTERISTIKŲ TYRIMAS

V. Ivnickis

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjama klasė vienatiesinių aptarnavimo sistemų su įeinančiu Markovo srautu, neatsimenant atlikto darbo pareikalavimui, kurio aptarnavimas nutrūksta. Parodoma, kad pagrindinių šios sistemos charakteristikų: būsenų nestacionarių tikimybių, sistemos buvimo fiksuotoje būsenų aibėje laiko pasiskirstymo, užimtumo periodo ir laukimo laiko pasiskirstymo Laplaso transformacijos yra darbo kiekio pareikalavimo aptarnavimui pasiskirstymo, jo išvestinių, įeinančio srauto konstantų-parametrų ir aptarnavimo greičio pasiskirstymo Laplaso – Stiltjeso transformacijų trupmeninės-racionalinės funkcijos.

INVESTIGATION OF NON-STATIONARY CHARACTERISTICS OF ONE CLASS OF SINGLE-SERVER SERVICE SYSTEMS

V. Ivnitzky

(Summary)

The paper deals with a class of single-server service systems with Markow input without memory on the work performed if the service is cut off. It is proved that the Laplace transforms of the main characteristics of the system such as non-stationary probabilities, distribution of the staying time on a fixed set of states, distributions of the busy period and of waiting time are fractionary rational functions of the Laplace – Stieltjes transforms of the work performed while serving, its derivatives, speed of service and constant parameters of input as well.