УДК 517.54

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Э. Г. Кирьяцкий

При изучении аналитических в единичном круге функций часто встречается оператор

$$L_t f(z)=\frac{f\left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z}\right)-f(t)}{(1-|t|^2)f'(t)}, \qquad |t|<1,\ |z|<1.$$

При любом t, $|t|<1$, для которого $f'(t)\neq 0$, он переводит аналитическую функцию $f(z)$, нормированную условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$, в аналитическую функцию $\Phi(z, t)$, нормированную условиями, $\Phi(0, t)=0$, $\Phi'(0, t)=1$.

В нашей работе будем рассматривать этот оператор при действительных значениях t, $-1<t<1$. В этом случае он принимает вид:

$$L_t f(z)=\frac{f\left(\frac{z+t}{1+tz}\right)-f(t)}{(1-t^2)f'(t)}.$$

Мы находим вид функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, инвариантных относительно оператора L_t:

$$L_t f=f, \qquad -1<t<1.$$

Очевидно, все тейлоровские коэффициенты таких функций тоже инвариантны относительно L_t.

В работе приводится также вид функций, у которых какой-нибудь один тейлоровский коэффициент остается инвариантным при преобразовании L_t.

Вопрос о виде функций с инвариантным коэффициентом был поставлен Ш. И. Стрелицем.

На протяжении всей работы используются следующие обозначения.

1. A – класс аналитических в единичном круге функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

2. Пусть a – произвольное комплексное число и k – натуральное число. $A_k(a)$ – класс функций $f(z)\in A$, у которых k-й коэффициент равен a. Таким образом, $f(z)\in A_k(a)$, если

$$f(z)=z+\sum_{l=2}^{\infty} a_l z^l \text{ и } a_k=a.$$

3. $I_k(a)$ — семейство функций $f(z) \in A_k(a)$, у которых k-й тейлоровский коэффициент инвариантен относительно преобразования L_t. Другими словами, $f(z) \in I_k(a)$, если $L_t f(z) \in A_k(a)$ при любом $-1 < t < 1$, для которого $f'(t) \neq 0$.

4. I — семейство функций $f(z) \in A$, инвариантное относительно преобразования L_t.

5. Для любого комплексного α через $\varphi_\alpha(z)$ обозначим однозначную в единичном круге ветвь функции

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right], \tag{1}$$

определенную условием $\varphi_\alpha(0) = 0$. Кроме того, при $\alpha = 0$ полагаем

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

Легко убедиться в том, что функция $\varphi_\alpha(z)$ при любом α принадлежит классу A и ее k-й коэффициент в разложении по степеням z является многочленом $k-1$-й степени от α. Этот многочлен обозначим через $P_k(\alpha)$. Таким образом,

$$\varphi_\alpha(z) = z + P_2(\alpha) z^2 + \ \ldots \ + P_k(\alpha) z^k + \ \ldots \tag{2}$$

П.1. В следующих двух теоремах приводится вид функций из классов I и $I_k(a)$.

Теорема 1. *Все функции $\varphi_\alpha(z)$ и только они принадлежат классу I.*

Теорема 2. *Если $f(z) \in I_k(a)$, то функцию $f(z)$ можно представить как сложную функцию*

$$f(z) = g(u), \qquad u = \ln\frac{1+z}{1-z},$$

где функция $\omega = g(u)$ нормирована условиями $g(0) = 0$, $g'(0) = \frac{1}{2}$ и является решением дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$D[P_k(D) - a]\,\omega = 0, \qquad D\omega = \frac{d\omega}{du}.$$

Обратно, любая функция $f(z)$ указанного вида принадлежит семейству $I_k(a)$.

П.2. Доказательство теоремы 1. Пусть некоторая функция

$$f(z) = z + az^2 + \ \ldots$$

принадлежит семейству I. Тогда все ее тейлоровские коэффициенты инвариантны относительно преобразования L_t и, в частности, ее второй коэффициент a. Поэтому при $z = 0$ и любом $-1 < t < 1$, для которого $f'(t) \neq 0$, выполнено равенство

$$\frac{1}{2(1-t^2)f'(t)}\;\frac{\partial^2 f\left(\frac{z+t}{1+tz}\right)}{\partial z^2} = a,$$

или

$$\frac{(1-t^2)f''(t)}{2f'(t)} - t = a. \tag{3}$$

Из аналитичности левой части равенства (3) в окрестности нуля функции $f'(t)$ следует, что оно выполнено и в точках, где $f'(t)=0$, т. е. равенство (3) выполнено во всем круге $|t|<1$. Следовательно, функция $f(z)$ должна быть решением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$(1-z^2)f''(z)-2(z+a)f'(z)=0.$$

Это уравнение, как легко убедиться, имеет только одно решение

$$f(z)=\varphi_\alpha(z),$$

удовлетворяющее начальные данные $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Значит, если функция $f(z)\in I$, то она необходимо имеет вид (1). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при любом α функции вида (1) удовлетворяют при $-1<t<1$ тождеству $L_tf=f$.

П.3. Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *При $z=0$ справедливо равенство*

$$\frac{\partial^k f\left(\frac{z+t}{1+tz}\right)}{\partial z^k}=\sum_{m=1}^{k} T_m(t)f^m(t), \qquad -1<t<1,$$

где $T_m(t)$ — многочлены от t, причем $T_k(t)\neq 0$.

Доказательство. Пусть $u=\psi(z)$ и $\omega=f(u)$ — аналитические функции. Тогда k-ая производная от сложной функции $\omega=f\left(\psi(z)\right)$ имеет вид

$$\omega_z^{(k)}=\sum_{m=1}^{k} R_m(u',\ u'',\ \ldots,\ u^{(k)})\,\omega_u^{(m)}, \tag{4}$$

где R_m — многочлены от u', u'', $\ldots$, $u^{(k)}$ и

$$R_k(u',\ u'',\ \ldots,\ u^{(k)})=(u')^k. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) докажем методом индукции. При $k=1$ эти равенства выполнены, так как

$$\omega'=u'\cdot\omega_u'.$$

Предположим теперь, что равенства (4) и (5) имеют место при некотором $k\geqslant 1$ и продифференцируем (4) по z. Тогда получим

$$\omega_z^{(k+1)}=\sum_{m=1}^{k}\left[\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial R_m}{\partial u^{(l)}}u^{(l+1)}\right)\omega_u^{(m)}+R_mu'\omega_u^{(m+1)}\right]. \tag{6}$$

По предложению R_m, $m=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ представляют собой многочлены от переменных u', u'', $\ldots$, $u^{(k)}$. Поэтому правая часть (6) является линейной формой от ω_u', ω_u'', $\ldots$, $\omega_u^{(k)}$, $\omega_u^{(k+1)}$, коэффициенты которой суть многочлены от переменных u', u'', $\ldots$, $u^{(k+1)}$, причем старший $R_{k+1}=R_ku'=(u')^{k+1}$. Пусть теперь

$$u=\frac{z+t}{1+tz} \text{ и } \omega=f(u), \tag{7}$$

где $|z|<1$, $-1<t<1$. Легко убедиться в том, что при $z=0$

$$\omega_u^{(m)}=f^{(m)}(t) \tag{8}$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial z^m}=(-1)^{m-1}\, m!\,(1-t^2)\, t^{m-1}. \tag{9}$$

Применив (4) и (5) к функциям (7) и воспользовавшись (8) и (9), убедимся в справедливости леммы 1.

П.4. Доказательство теоремы 2. Как следует из определения класса $I_k(a)$, для того, чтобы функция $f(z)$ из класса A принадлежала семейству $I_k(a)$, необходимо и достаточно, чтобы при $z=0$ и любом $-1<t<1$, для которого $f'(t)\neq 0$ выполнялось равенство

$$\frac{1}{k!\,(1-t^2)f'(t)}\;\frac{\partial^k f\left(\frac{z+t}{1+tz}\right)}{\partial z^k}=a. \tag{10}$$

На основании леммы 1 равенство (10) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{k} T_m(t)\, f^{(m)}(t)}{k!\,(1-t^2)\, f'(t)}=a.$$

Это равенство, как и равенство (3), выполнено для всех $|t|<1$. Значит, функция $\omega=f(z)$ из A принадлежнт классу $I_k(a)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению k-го порядка

$$\frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{k} T_m(z)\,\omega^{(m)}-a(1-z^2)\,\omega'=0. \tag{11}$$

Это уравнение, очевидно, имеет решение $\omega=1$. Кроме того, решением последнего уравнения будет и функция

$$f(z)=\varphi_\alpha(z)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right],$$

если только α является корнем многочлена $P_k(\alpha)=a$. В самом деле, по теореме 1 функция $\varphi_\alpha(z)$ принадлежит семейству I и ее k-й коэффициент [см. (2)] $P_k(\alpha)$ равен a. Следовательно,

$$\varphi_\alpha(z)\in I_k(a).$$

Заметим, что для любого комплексного a, за исключением конечного числа его значений, многочлен $P_k(\alpha)-a$ имеет $k-1$ попарно различных и неравных нулю корней $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{k-1}$. Значит, функции

$$1,\ \varphi_{\alpha_1}(z),\ \varphi_{\alpha_2}(z),\ \ldots,\ \varphi_{\alpha_{k-1}}(z)$$

являются решениями уравнения (11). Выполним в уравнении (11) замену свободного переменного

$$u=\ln\frac{1+z}{1-z}. \tag{12}$$

Тогда функции

$$\omega = 1,\ \omega = \varphi_{\alpha_1}(z),\ \ldots,\ \omega = \varphi_{\alpha_{k-1}}(z)$$

перейдут в функции

$$\omega = 1, \qquad \omega_i(u) = \frac{1}{2\alpha_i}(l^{\alpha_i u} - 1), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{13}$$

являющиеся решениями полученного после замены линейного дифференциального уравнения. Из вида функций (13) заключаем, что уравнение (11) в итоге замены (12) с точностью до множителя должно перейти в однородное дифференциальное уравнение k-го порядка с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого будет:

$$\lambda\left(P_k(\lambda) - a\right) = 0.$$

Таким образом, уравнение (11) после замены (12) перейдет в уравнение

$$h(u)\, D\,[P_k(D) - a]\, \omega = 0, \tag{14}$$

где $D = \frac{d\omega}{du}$ и $h(u)$ — некоторая функция от u.

Докажем теперь, что $h(u) \equiv 2$. Действительно, сумма, стоящая в левой части уравнения (11), не зависит от a, и поэтому при замене (12) она переходит в некоторый линейный дифференциальный оператор

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^{k} b_m(u)\, D^m \omega,$$

также не зависящий от a. В то же время член $a(1 - z^2)\,\omega'_z$ из левой части уравнения (11), как легко подсчитать, переходит при той же замене (12) в $2a\omega'_u$. Таким образом, левая часть уравнения (11) при любом a заменой (12) сводится к выражению

$$\left(\sum_{m=1}^{k} b_m(u)\, D^m - 2aD\right)\omega.$$

Но раньше мы установили, что для бесконечного множества значений a левая часть уравнения (11) переходит в левую часть уравнения (14). Значит, для бесконечного множества значений a

$$\left(\sum_{m=1}^{k} b_m(u)\, D^m - 2aD\right)\omega = h(u)\, D\left(P_k(D) - a\right)\omega.$$

Последнее возможно лишь в том случае, когда $h(u) \equiv 2$. Таким образом, при всех a уравнение (11) переходит при замене (12) в уравнение

$$D\left(P_k(D) - a\right)\omega = 0.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы, заметим, что из равенства (12) следует $f(0) = 0$ и $f'(0) = 2g'(0)$, и так как $f(z) \in A$, то $g(0) = 0$, $g'(0) = \frac{1}{2}$.

Замечание. В ходе доказательства теоремы мы установили и такой факт. *Пусть*

$$\frac{f\left(\frac{z+t}{1+tz}\right)-f(t)}{(1-t^2)f'(t)}=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,z^k.$$

Тогда

$$c_k(t)=\frac{D\,P_k(D)\,g(u)}{Dg(u)}, \qquad D=\frac{d}{du},$$

где

$$g(u)=f\left(\frac{e^u-1}{e^u+1}\right), \qquad u=\ln\frac{1+t}{1-t}.$$

Следствие 1. *Пусть уравнение*

$$P_k(\alpha)=a$$

имеет $k-1$ попарно различных корней a_1, a_2, ..., α_{k-1}. Для того, чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $I_k(a)$ необходимо и достаточно, чтобы она была представлена в виде

$$f(z)=\sum_{i=1}^{k-1} c_i\varphi_{\alpha_i}(z), \qquad \sum_{i=1}^{k-1} c_i=1.$$

Следствие 2. *Пусть $Q(z)$ — заданный многочлен k-й степени со старшим коэффициентом, равным a, т. е.*

$$Q(z)=z+a_2z^2+\ \dots\ +a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k, \qquad a_k=a.$$

Тогда существует единственная функция $f(z)\in I_k(a)$, разложение которой в ряд Тейлора начинается с тногочлена $Q(z)$.

П.5. Пусть j_2, j_3, ..., j_k — заданные комплексные числа и $I(j,\ c)$ — класс функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\ \dots\ +a_kz^k+\ \dots$$

из A, для которых линейный функционал

$$F(a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_k)=j_2a_2+\ \dots\ +j_ka_k$$

инвариантен относительно оператора L_t и равен c. Другими словами, если $f(z)\in I(j,\ c)$ и

$$L_tf=z+a_2(t)\,z^2+\ \dots\ +a_k(t)\,z^k+\ \dots,$$

то

$$j_2a_2(t)+j_3a_3(t)+\ \dots\ +j_ka_k(t)=c \tag{15}$$

при всех $-1<t<1$, для которых $f'(t)\neq 0$.

Теорема 2 может быть обобщена следующим образом.

Теорема 3. *Если $f(z)\in I(j,\ c)$, то функция $f(z)$ может быть представлена как сложная функция*

$$f(z)=g(u), \qquad u=\ln\frac{1+z}{1-z}$$

причем функция $\omega = g(u)$ *удовлетворяет условиям* $g(0)=0$ *и* $g'(0)=\frac{1}{2}$, *и является решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами*

$$D\left[\sum_{l=2}^{k} j_l P_l(D) - c\right]\omega = 0, \qquad D = \frac{d\omega}{du}.$$

Обратно, любая функция указанного вида принадлежит классу $I(j, c)$.

Доказательство. Условие (15) для функции $\omega = f(z)$ можно переписать в виде равенства

$$\sum_{l=2}^{k} \frac{j_l}{l!} \frac{\partial^l f\left(\frac{z+t}{1+tz}\right)}{\partial z^l} = c(1-t^2)f'(t),$$

выполняющегося при $z=0$ и $-1<t<1$, $f'(t)\neq 0$. По замечанию 1 заменой

$$u = \ln\frac{1+t}{1-t}$$

это уравнение сводится к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$D\left[\sum_{l=2}^{k} j_l P_l(D) - c\right]\omega = 0, \qquad D = \frac{d\omega}{du},$$

откуда и следует справедливость теоремы 3.

П.6. Рассмотрим нечетные функции $f(z)\in I_k(a)$. Очевидно, что k-я частичная сумма

$$Q_k(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k, \qquad a_k = a,$$

разложения такой функции $f(z)$ в ряд Тейлора, является нечетным многочленом.

Теорема 4. *Если* $f(z)\in I_k(a)$ *и* k*-я частичная сумма* $Q_k(z)$ *разложения в ряд Тейлора является нечетным многочленом, то и сама функция* $f(z)$ *будет нечетной.*

Доказательство. Установим сначала одно свойство многочленов $P_k(\alpha)$: при четном k полином $P_k(\alpha)$ является нечетной, а при нечетном k — четной функцией от α. Действительно, из (2) следует, что

$$\varphi_\alpha(z) = z + P_2(\alpha)z^2 + P_3(\alpha)z^3 + \dots,$$

$$-\varphi_{-\alpha}(-z) = z - P_2(-\alpha)z^2 + P_3(-\alpha)z^3 - \dots$$

Однако, легко проверить, что

$$\varphi_\alpha(z) = -\varphi_{-\alpha}(-z).$$

Следовательно,

$$P_2(\alpha) = -P_2(-\alpha), \qquad P_3(\alpha) = P_3(-\alpha), \dots$$

Перейдем к доказательству теоремы. Так как, по условию, функция $f(z)\in I_k(a)$, то по теореме 2 ее можно представить как сложную функцию

$$f(z) = g(u), \qquad u = \ln\frac{1+z}{1-z},$$

где функция $\omega=g(u)$ удовлетворяет линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$D[P_k(D)-a]\,\omega=0, \qquad D\omega=\frac{d\omega}{du}. \tag{16}$$

Пусть k — нечетное число. Тогда многочлен $P_k(\alpha)$ является четной функцией α, и, поэтому, левая часть уравнения (16) представляет собой линейную комбинацию производных нечетного порядка от функции $\omega(u)$. Следовательно если функция $g(u)$ является решением уравнения (16), то функция $g(-u)$ и нечетная функция

$$\Phi(u)=\frac{g(u)-g(-u)}{2}$$

также является решением того же уравнения. Далее, так как функция $u=\ln\frac{1+z}{1-z}$ является нечетной, то и функция

$$\psi(z)=\Phi\left(\ln\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{1}{2}[f(z)-f(-z)]$$

будет нечетной. При этом легко убедиться, что $\psi(z)\in I_k(a)$ и ее k-я частичная сумма начинается с многочлена $Q_k(z)$. По следствию 2 отсюда получаем, что $\psi(z)\equiv f(z)$, т. е. функция $f(z)$ является нечетной.

Пусть теперь k — четное число. Тогда $a=0$, и мы приходим к уравнению

$$D[P_k(D)]\,\omega=0,$$

левая часть которого является линейной комбинацией производных четного порядка от функции $\omega(u)$. Рассуждая также, как и в случае нечетного k, мы убедимся в справедливости теоремы при четном k.

Вильнюсский Инженерно-строительный институт

Поступило в редакцию 28.III.1971

VIENO OPERATORIAUS, APIBRĖŽTO ANALIZINIŲ VIENETINIAME SKRITULYJE FUNKCIJŲ ERDVĖJE, TYRIMAS

E. Kirjackis

(*Reziumė*)

Skaičiui $-1<t<1$ nusakome operatorių L_t, kuriuo kiekvienai analizinei skritulyje $|z|<1$ funkcijai $f(z)$ $f(0)=0, f'(0)=1, f'(t)\neq 0$ priskiriama funkcija

$$L_t[f]=\frac{f\left(\frac{z+t}{1+tz}\right)-f(t)}{(1-t^2)f'(t)},$$

kuri yra vėl analizinė ir normuota.

Darbe randame funkcijas, invariantiškas operatorių šeimos L_t atžvilgiu, ir funkcijas, turinčias vieną invariantišką koeficientą.

UNTERSUCHUNG EINES GEWISSEN OPERATORS IM RAUME DER IM EINHEITSKREISE ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

E. Kirjackis

(*Zusammenfassung*)

Für $-1<t<1$ sei L_t der Operator, der jeder im Kreise $|z|<1$ analytischen Funktion $f(z)$ $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f'(t)\neq 0$, die Funktion

$$L_t[f]=\frac{f\left(\frac{z+t}{1+tz}\right)-f(t)}{(1-t^2)f'(t)}$$

zuordnet, die wieder analytisch und normiert ist.

Wir finden die Funktionen, die im Bezug auf die Operatorfamilie L_t sich invariant verhalten, wie auch die Funktionen, die einen invarianten Koeffizienten besitzen.