XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 517.432.1

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ ТЕЙЛОРА—ДИРИХЛЕ

В. И. Конов

Будем предполагать, что

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

где m_n – натуральные числа или нули, $\lambda_n>0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}=0.$$

Обозначим через M множество предельных точек последовательности $\left\{\frac{\lambda_n}{m_n}\right\}$. Для каждого конечного $\rho\in M$ определим число $k(\rho)=\lim\limits_{\alpha\to 0} k(\rho,\ \alpha)$, где $k(\rho,\ \alpha)=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \frac{\ln|a_{n_k}|}{\lambda_{n_k}}$, а $\{n_k\}$ – последовательность всех натуральных чисел, для которых $\frac{\lambda_{n_k}}{m_{n_k}}\in[\rho-\alpha,\ \rho+\alpha]$. Пусть для любого $p\ (p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ $\{n_k^{(p)}\}$ – последовательность натуральных чисел такая, что

$$\frac{\lambda_{n_k^{(p)}}}{m_{n_k^{(p)}}}\in\left[\rho-\frac{\alpha}{p},\ \rho+\frac{\alpha}{p}\right].$$

Выберем из последовательности $\{n_k^{(p)}\}$ подпоследовательность $\{q_k^{(p)}\}$ так, чтобы

$$k\left(\rho,\ \frac{\alpha}{p}\right)=\lim_{k\to\infty} \frac{\ln|a_{q_k^{(p)}}|}{\lambda_{q_k^{(p)}}}.$$

Тогда для всякого $\varepsilon>0$ существует такой номер $q_{k_p}^{(p)}$, что

$$\left|k\left(\rho,\ \frac{\alpha}{p}\right)-\frac{\ln|a_{q_{k_p}^{(p)}}|}{\lambda_{q_{k_p}^{(p)}}}\right|<\frac{\varepsilon}{p} \qquad (p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

и, следовательно, последовательность $\{q_{k_p}^{(p)}\}$ обладает следующими свойствами:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\lambda_{q_{k_p}^{(p)}}}{m_{q_{k_p}^{(p)}}}=\rho; \quad \lim_{p\to\infty} \frac{\ln|a_{q_{k_p}^{(p)}}|}{\lambda_{q_{k_p}^{(p)}}}=k(\rho). \tag{2}$$

В случае, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n}{m_n} = \infty$, возьмем любое $r>0$ и определим число $k_\infty = \lim\limits_{r\to\infty} k_r$, где $k_r = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{\ln|a_{n_k}|}{\lambda_{n_k}}$, а последовательность $\{n_k\}$ такова, что $\frac{\lambda_{n_k}}{m_{n_k}} \geqslant r$. Легко убедиться, что рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют построить последовательность $\{q^{(p)}_{k_p}\}$ такую, что

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\lambda_{q^{(p)}_{k_p}}}{m_{q^{(p)}_{k_p}}} = \infty, \quad \lim_{p\to\infty} \frac{\ln|a_{q^{(p)}_{k_p}}|}{\lambda_{q^{(p)}_{k_p}}} = k_\infty.$$

Выберем из последовательности $\{\lambda_{q^{(p)}_{k_p}}\}$ такую подпоследовательность $\{\lambda_{n_p}\}$, что

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}} = \infty. \tag{3}$$

Будем предполагать теперь, что

$$\tau = \overline{\lim} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (m_{k+1})}{\lambda_n} < \infty$$

(τ — верхняя плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ с учетом того, что член λ_n имеет кратность m_n+1) и

$$\gamma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L^{(m_n+1)}(\lambda_n)} \right| < \infty,$$

где

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)^{m_n+1}$$

(γ — индекс конденсации последовательности $\{\lambda_n\}$ с учетом кратности ее членов). Построим целую функцию экспоненциального типа $\varphi(z)$ удовлетворяющую условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'(\lambda_n) = \varphi''(\lambda_n) = \ldots = \varphi^{(m_n)}(\lambda_n) = 0, && (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ &\varphi(\lambda_n) = 1, \quad n = n_p; \quad \varphi(\lambda_n) = 0, && n \neq n_p. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из теоремы, доказанной Г. П. Лапиным [1] и равенств (4) следует, что функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую условия (4), можно найти среди функций не выше первого порядка и типа $\pi\tau + \gamma^+$, где $\gamma^+ = \max\{\gamma, 0\}$. Из теоремы Крамера для рядов Тейлора—Дирихле [2] следует, что если G — область голоморфности функции $f(z)$, а $\varphi(z)$ — целая функция, растущая не быстрее, чем функция первого порядка и типа σ, то функция

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[z^{m_n} \varphi(\lambda_n) - \binom{m_n}{1} z^{m_n-1} \varphi'(\lambda_n) + \ldots + (-1)^{m_n} \varphi^{(m_n)}(\lambda_n) \right] e^{-\lambda_n z}$$

голоморфна в области G_σ, которую мы получим, если выбросим из области G все круги радиуса σ с центром в граничных точках области G.

В рассматриваемом случае $\sigma \leqslant \pi\tau + \gamma^+$ и в силу (4)

$$F(z) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{n_p} z^{m_{n_p}} e^{-\lambda_{n_p} z}. \tag{5}$$

Из [4] известно, что множество, на котором ряд (1) сходится абсолютно и во внешних точках которого он расходится, состоит из точек, удовлетворяющих следующему неравенству при любом конечном $\rho \in M$:

$$|z| < e^{\rho [x - k(\rho)]}$$

и кроме того неравенству $x > k_\infty$. Пусть z_0 — граничная точка области сходимости ряда (1). В любой ε-окрестности этой точки имеются точки кривых $|z| < e^{\rho [x-k(\rho)]}$, $\rho \in M$. Предположим, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, среди этих кривых имеется хотя бы одна, для которой $\rho \neq 0$ (**условие А**). Для этого ρ построим: последовательность $\{q_{k_p}^{(p)}\}$, удовлетворяющую условия (2), последовательность $\{\lambda_{n_p}\}$, удовлетворяющую условию (3), функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую условия (4) и ряд (5). Из [3] следует, что в любой ε-окрестности точки z_0 имеется по крайней мере одна граничная точка области сходимости ряда (5). В силу (3), все точки на границе области сходимости ряда (5) — особые для $F(z)$ (см. [4]), поэтому из теоремы Крамера для рядов Тейлора — Дирихле [2] следует, что в замкнутом круге радиуса $\pi\tau + \gamma^+ + \varepsilon$ с центром в точке z_0 имеется по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$. Таким образом, если выполнено условие A и $\tau < \infty$, $\gamma < \infty$, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *В каждом замкнутом круге радиуса $\pi\tau + \gamma^+$ с центром в точке, лежащей на границе области сходимости ряда* (1) *имеется по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$, определяемой рядом* (1).

Замечание. Условие A заведомо выполнено, если $0 \notin M$.

В заключение приведем следующий достаточный признак конечности числа γ.

Лемма. *Пусть последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{m_n\}$ таковы, что:*

1) $$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} (m_k + 1)}{\lambda_n} = \tau < \infty;$$

2) *существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \rho \neq 0;$$

3) *существуют такие $K_2 > 0$, $K_1 > 0$ и $\alpha > 1$, что*

$$K_2 \alpha^n > \lambda_{n+1} - \lambda_n > K_1 \alpha^n \quad \textit{для всех } n.$$

Тогда функция

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)^{m_k+1}$$

удовлетворяет условию:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L^{(m_n+1)}(\lambda_n)} \right| = \gamma < \infty,$$

причем если $\tau = 0$, *то и* $\gamma^+ = 0$.

Доказательство. Из того, что $\tau < \infty$, следует, что функция $L(z)$ — первого порядка и типа $\pi\tau$, поэтому для любых положительных $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ неравенство $|L(z)| > e^{-H(\pi\tau+\varepsilon)2R}$, где $H = H(\eta)$ зависит только от η, имеет место во всем круге $|z| \leqslant R$ при $R > R_1(\varepsilon)$, за исключением, быть может, точек, лежащих в исключительных кружках с суммой радиусов, не превосходящих $4\eta R$ [6]. Можно считать, что все исключительные кружки содержат нули $L(z)$.

Обозначим через c_n — исключительный кружок, содержащий λ_n. Фиксируем $\eta < \frac{K_1}{8d}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$, где $d = \max\{\lambda_1, K_2\}$, тогда сумма диаметров исключительных кружков, попавших в круг $|z| \leqslant \lambda_n$, не превосходит $8\eta\lambda_n$, но

$$8\eta\lambda_n < \frac{K_1\lambda_n}{d}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \leqslant \frac{K_1\left[\lambda_1 + K_2\,\frac{\alpha(\alpha^{n-1}-1)}{\alpha-1}\right]\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)}{d} <$$

$$< \frac{K_1(\alpha^{n-1}-1)}{\alpha} < K_1\alpha^{n-1} < \lambda_n - \lambda_{n-1},$$

и, следовательно, исключительные кружки c_n не пересекаются и сущест вует неограниченно возрастающая последовательнось $\{R_n\}$, обладающая тем свойством, что во всяком кольце $R_{n-1} \leqslant |z| \leqslant R_n$ лежит лишь один исключительный кружок c_n. Окружность исключительного кружка c_n и $|z| = R_n$ не пересекаются, следовательно, $R_n = \lambda_n + \Theta(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$, где $0 < \Theta < 1$, но

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n < K_2\alpha^n = l\cdot\alpha^{n-1}\cdot\left(\frac{K_2\cdot\alpha}{l}\right) < \frac{l(\alpha^n-1)}{\alpha-1}\left(\frac{K_2\alpha}{l}\right) <$$

$$< \left[\lambda_1 + K_1\,\frac{\alpha(\alpha^{n-1}-1)}{\alpha-1}\right]\frac{K_2\alpha}{l} < \lambda_n\cdot\frac{\alpha K_2}{l},$$

где

$$l = \min\{\lambda_1, K_1\},$$

поэтому

$$R_n < \lambda_n\left(1 + \frac{\Theta\alpha K_2}{l}\right) = A\lambda_n.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_n(z) = \frac{(z-\lambda_n)^{m_n+1}}{L(z)}.$$

$\Phi_n(z)$ — аналитическая функция в c_n, т. к. исключительные кружки c_n не пересекаются. Для достаточно больших n, таких что $R_n > R_1(\varepsilon)$, на окружности круга c_n будем иметь

$$|\Phi_n(z)| = \left|\frac{(z-\lambda_n)^{m_n+1}}{L(z)}\right| < \lambda_n^{m_n+1} e^{H(\pi\tau+\varepsilon)\cdot 2R_n} < \lambda_n^{m_n+1} e^{H(\pi\tau+\varepsilon)2A\lambda_n}.$$

Из принципа максимума модуля следует, что неравенство будет иметь место и внутри c_n, в частности, в точке $z=\lambda_n$, следовательно,

$$\gamma_n=\left|\frac{(z-\lambda_n)^{m_n+1}}{L(z)}\right|_{z=\lambda_n}<\lambda_n^{m_n+1}e^{H(\pi\tau+\varepsilon)\cdot B\lambda_n},$$

где $B=2A$, но (см. [5])

$$\gamma=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\frac{\gamma_n}{m_n!}\right|,$$

поэтому

$$\gamma<\lim_{n\to\infty}\left[\frac{m_n\ln\frac{\lambda_n}{m_n}}{\lambda_n}+\frac{m_n}{\lambda_n}+\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}+B(\pi\tau+\varepsilon)\right]=\frac{\ln\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}+B(\pi\tau+\varepsilon).$$

Если $\tau\to 0$, то $\rho\to\infty$, и тогда $\gamma\leqslant B\varepsilon$. Покажем дополнительно, что при некоторых условиях, если $\tau=0$, величина γ не может быть отрицательна. С этой целью, основываясь на лемме 3 из [1], запишем неравенство

$$\left|\frac{L(z)}{(z-\lambda_n)^{m_n+1}}\right|<e^{\varepsilon_1|z|},\qquad |z|>r(\varepsilon_1)$$

при $z=\lambda_n$, $n>n_0$. Отсюда

$$\gamma_n=\left|\frac{(z-\lambda_n)^{m_n+1}}{L(z)}\right|_{z=\lambda_n}>e^{-\varepsilon_1\lambda_n}.$$

Предположим, что

$$\lim\frac{m_n\ln m_n}{\lambda_n}=0,\ \text{тогда}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{m_n!}=0,$$

следовательно $\gamma>-\varepsilon_1$.

Лемма полностью доказана.

Московский институт
химического машиностроения

Поступило в редакцию
21.XI.1969

Литература

1. Г. П. Лапин, Математический сборник, 29 (71), № 3 (1951).
2. Г. Л. Лунц, Изв. АН Арм. ССР, **XIV**, № 5 (1961).
3. Г. Л. Лунц, Изв. АН Арм. ССР, **XIV**, № 2 (1961).
4. Г. Л. Лунц, Изв. АН Арм. ССР, **XV**, № 5 (1962).
5. Г. Л. Лунц, Доклады АН СССР, **154**, № 1 (1964).
6. Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Мейман, Труды Мат. ин-та им. Стеклова, **XXIV** (1949).

TEILORO–DIRICHLE EILUTĖS PAVIENIŲ TAŠKŲ KLAUSIMU

V. Konovas

Reziumė)

Darbe nagrinėjame Teiloro–Dirichle eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{m_n}e^{-\lambda_n z},\qquad (1)$$

kurioje m_n yra neneigiami skaičiai ir

$$\lambda_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0.$$

Randame skaičių R, priklausantį nuo $\{\lambda_n\}$ ir $\{m_n\}$ ir turintį šitokią savybę:

bet kuriame skritulyje, kurio spindulys lygus R ir centras yra (1) eilutės konvergavimo srities ribinis taškas, yra bent vienas (1) eilutės sumos pavienis taškas.

SUR LES POINTS SINGULIERS DES FONCTIONS RÉPRÉSENTÉES PAR LES SÉRIES DE TAYLOR–DIRICHLET

V. Konov

(*Résumé*)

On considère dans cet article les séries de Taylor–Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

où m_n sont des nombres réels ou des zéros

$$\lambda_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0.$$

On trouve un nombre R, dépendant des suites $\{\lambda_n\}$ et $\{m_n\}$ tel que dans tout le disque fermé de rayon R dont le centre est situé sur la frontière du domaine de la convergence de la série (1) il y a au moins un point singulier de la somme de la série considerée.