1972

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ СУММЫ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ В НЕОДНОРОДНУЮ ЦЕПЬ МАРКОВА

Р. Лапинскас

1. Определения и обозначения

Пусть $\xi(t)$, $t=1, 2, \ldots,$ – неоднородная цепь Маркова со значениями из измеримого пространства $(\Omega_t, \mathscr{F}_t)$, с переходной функцией $P_m(w, A)$, $w\in\Omega_{m-1}$, $A\in\mathscr{F}_m$, начальным распределением $P(A)$, $A\in\mathscr{F}_1$, коэффициентом эргодичности функции P_{ml}:

$$\alpha_{ml}=1-\sup_{\substack{w,\ \tilde{w}\in\Omega_m\\ A\in\mathscr{F}_l}}|P_{ml}(w, A)-P_{ml}(\tilde{w}, A)|$$

и пусть $\tilde{\mathscr{F}}_m=\sigma\{\xi(m)\}$ – наименьшая σ-алгебра, порожденная указанной в скобках случайной величиной (сл. в.).

Введем случайные величины $\mathbf{X}_m=(X_{m1}, \ldots, X_{mk})$ с $M\mathbf{X}_m\equiv 0$, где $\mathbf{X}_m=g(\xi(m))$, $m=1, 2, \ldots$ Будем полагать, что функция $g(\cdot)$ измерима по отношению всех $\mathscr{F}_m$, а $\mathbf{X}_m$, $m=\overline{1, n}$ будем называть сл. в., связанными в цепь Маркова с n моментами времени.

Через F_ξ, p_ξ, f_ξ будем обозначать функцию распределения (ф. р.), плотность и характеристическую фукнцию (х. ф.) сл. в. ξ.

Пусть, далее

$$\mathbf{B}_n=(B_{n1}, \ldots, B_{nk})=(MS_{n1}^2, \ldots, MS_{nk}^2),$$

а

$$\mathbf{S}_n=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j;$$

$\mathbf{Z}_n=\mathbf{S}_nD_n$, где матрица $D_n=(d_{ij})_{i,\,j=\overline{1,k}}$, $d_{ii}=B_{ni}^{-1}$, $d_{ij}=0$, $i\neq j$; $\bar{\mathbf{Z}}_n=\mathbf{S}_n\bar{D}_n$, и где матрица $\bar{D}_n$ такова, что $\bar{D}_n\Lambda_n\bar{D}_n'=I$ (здесь $'$ – знак транспонирования, Λ_n – матрица ковариации $\mathbf{S}_n$, а I – единичная матрица), $\Gamma_r\{\xi\}$ – r-й семиинвариант сл. в. ξ,

$$\mathbf{L}_{rn}=\frac{1}{\alpha^{r-1}}\sum_{j=1}^{n}M(\mathbf{X}_j\Lambda_n^{-1}\mathbf{X}_j')^{r/2}=\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{1}{\alpha^{r-1}}\sum_{j=1}^{n}\frac{M(|(\mathbf{X}_j, \mathbf{t})|^r)}{(M(\mathbf{S}_n, \mathbf{t})^2)^{r/2}}\ -$$

„дробь Ляпунова“ r-го порядка (здесь $\alpha(=\alpha^{(n)})=\min\limits_{1\leq m\leq n}\alpha_m$, $\alpha_m=\alpha_{m-1,\,m}$),

$$\tilde{\mathbf{L}}_{rn}=\frac{1}{\alpha^{r-1}}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ess\,sup}M[(\mathbf{X}_j\Lambda_n^{-1}\mathbf{X}_j')^{r/2}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{j-1}]=$$

$$=\sup_{|\mathbf{t}|=1}\frac{1}{\alpha^{r-1}}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ess\,sup}\frac{M(|(\mathbf{X}_j, \mathbf{t})|^r\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{j-1})}{(M(\mathbf{S}_n, \mathbf{t})^2)^{r/2}}$$

условная „дробь Ляпунова", $Q_n(\mathbf{t}) = M(\mathbf{S}_n, \mathbf{t})^2$ (через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ мы обозначаем скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$), $\tilde{Q}_n(\mathbf{t}) = M(\mathbf{Z}_n, \mathbf{t})^2$, $\bar{\tilde{Q}}_n(\mathbf{t}) = M(\bar{\mathbf{Z}}_n, \mathbf{t})^2$. Наконец, Θ будет обозначать действительную или комплексную величину, $|\Theta| \leqslant 1$, а $\Theta_.$ – ограниченную величину, зависящую лишь от указанных параметров.

2. Краткая история вопроса

Основной метод, используемый в оригинальной работе ([1] – [3]) – метод переходных х. ф., разработанный В. Статулявичусом (основные результаты в [4]) и усовершенствованный им же (см. [1] – [3]). Нашей целью было обобщить теоремы 5 и 9 из [1] на многомерный случай. Это здесь и сделано, во всяком случае достигнут уровень независимых сл. в. (ср. работу автора [6]). Следует отметить, что многомерные асимптотические разложения (ас. разл.) при более ограничительных условиях уже были получены А. Рауделюнасом (теорема 7 из [5]).

Существенную роль при доказательстве наших теорем будут играть разного рода оценки х. ф., а также ас. разл. для них. Все они могут быть получены путем передоказывания аналогичных одномерных теорем, однако мы укажем способ, как получать требуемые факты непосредственно из одномерных.

3. Основные леммы

Лемма 1.

Если

$$\alpha\,|\mathbf{B}_n| \geqslant \delta \ln \frac{1}{\alpha} \tag{3.1}$$

при некотором $\delta > 0$,

$$M\,|\mathbf{X}_1|^s < \infty,$$

$$\operatorname{ess\,sup} M\{\,|\mathbf{X}_m|^s\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{m-1}\} < \infty, \quad m = \overline{2,\ n}, \tag{3.2}$$

для какого-нибудь целого $s \geqslant 3$, *то при любом* $0 < a < \infty$, *выбранном из условия*

$$a \sqrt{\ln\left(1 + \tilde{\mathbf{L}}_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}\right)} \leqslant \tilde{\mathbf{L}}_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}$$

в области

$$\tilde{Q}^*(\mathbf{t}) \leqslant a^2 \ln\left(1 + \tilde{\mathbf{L}}_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}\right) \tag{3.3}$$

имеет место ас. разл.

$$f_{\mathbf{Z}_n^*}(\mathbf{t}) = \exp\left\{-\frac{\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})}{2}\right\}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu n}^*(i\mathbf{t}) + \right.$$

$$\left. + \Theta_{s,\,a,\,\delta}\left([\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})]^{s/2} + [\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})]^{\frac{3(s-2)}{2}}\right)\tilde{\mathbf{L}}_{sn}\right). \tag{3.4}$$

Здесь и в дальнейшем $\tilde{Q}^*_n(\mathbf{t})$ *— либо* $\tilde{Q}_n(\mathbf{t})$, *либо* $\tilde{\bar{Q}}_n(\mathbf{t})$, *и, соответственно,* $\mathbf{Z}^*_n$ *— либо* $\mathbf{Z}_n$, *либо* $\bar{\mathbf{Z}}_n$, *а*

$$P^*_{\nu n}(i\mathbf{t})=P_{\nu n}\left(i\,[\bar{Q}^*_n(\mathbf{t})]^{1/2}\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\nu}\frac{1}{m!}\sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_m\geqslant 3\\ \nu_1+\ldots+\nu_m=\nu+2m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\nu_i!}\,\Gamma_{\nu_i}\{(\mathbf{Z}^*_n,\ i\mathbf{t})\},\tag{3.5}$$

причем

$$P^*_{\nu n}(i\mathbf{t})=\Theta_\nu \mathbf{L}_{sn}^{\frac{\nu}{s-2}}\ [\tilde{Q}^*(\mathbf{t})]^{\frac{3\nu}{2}}.\tag{3.6}$$

Доказательство. В. Статулявичусом [2] доказана лемма (лемма 10), вариант записи которой выглядит следующим образом.

Пусть (речь пойдет об одномерных сл. в.)

$$\alpha B_n\geqslant\delta\ln\frac{1}{\alpha},\quad M\,|\,X_1\,|^s<\infty,$$

$$\delta>0,\qquad M\{\,|\,X_m\,|^s\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{m-1}\}<\infty,\quad m=\overline{2,\ n},\tag{3.7}$$

с вероятностью 1 для какого-нибудь $s\geqslant 3$. Тогда при любом $0<a<\infty$, выбранном из условия

$$a\ln^{1/2}\left(1+\tilde{L}_{sn}^{\frac{1}{s-2}}\right)\leqslant\tilde{L}_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)}}$$

в интервале

$$|\,tB_n\,|\leqslant a\ln^{1/2}\left(1+\tilde{L}_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}\right)\tag{3.8}$$

имеет место соотношение

$$f_{S_n}(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\,t^2B_n^2\right\}\left(1+\sum_{\nu-1}^{s-3}P_{\nu n}(itB_n)+\right.$$

$$\left.+\,\Theta_{s,\,a,\,\delta}(\,|\,tB_n\,|^s+|\,tB_n\,|^{3(s-2)})\,\tilde{L}_{sn}\right).$$

Здесь

$$P_{\nu n}(itB_n)=\sum_{m=1}^{\nu}\left(\frac{1}{m!}\sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_m\geqslant 3\\ \nu_1+\ldots+\nu_m=\nu+2m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\nu_i!}\,\Gamma_{\nu_i}(iS_nt)\right),\tag{3.9}$$

причем

$$P_{\nu n}(itB_n)=\Theta_\nu L_{sn}^{\frac{\nu}{s-2}}\ |\,tB_n\,|^{3\nu}.\tag{3.10}$$

Для доказательства нашей леммы введем одномерные величины

$$X_{m,\,\mathbf{t}}=(\mathbf{X}_m,\ \mathbf{t}),\quad m=\overline{1,\ n},\quad S_{n,\,\mathbf{t}}=(\mathbf{S}_n,\ \mathbf{t})=\sum_{m=1}^{n}(\mathbf{X}_m,\ \mathbf{t})$$

и применим для х. ф.

$$f_{S_{n,\,\mathbf{t}}}(\lambda)=Me^{i\lambda S_{n,\,\mathbf{t}}}$$

предыдущий результат. Ясно, что из (3.1) и (3.2) следует (3.7) для сл. в. $X_{m,\,t}$. Таким образом, в области

$$|\lambda (DS_{n,\,t})^{1/2}| = |\lambda \left(Q_n(\mathbf{t})\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant a \ln^{1/2}\left(1+\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} M\left(|(\mathbf{X}_j,\,\mathbf{t})|^s \,|\, \tilde{\mathscr{F}}_{j-1}\right)}{\alpha^{s-1}\left(Q_n(\mathbf{t})\right)^{s/2}}\right]^{-\frac{1}{s-2}}\right),$$

$$f_{S_{n,\,t}}(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2 Q_n(\mathbf{t})\right\}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-3} P_{\nu n}\left(i\lambda Q_n^{1/2}(\mathbf{t})\right)+\right.$$

$$\left.+\Theta_{s,\,a,\,\delta}\left(|\lambda Q_n^{1/2}(\mathbf{t})|^s+|\lambda Q_n^{1/2}(\mathbf{t})|^{3(s-2)}\right)\frac{\sum_{j=1}^{n} M\left(|(\mathbf{X}_j,\,\mathbf{t})|^s \,|\, \tilde{\mathscr{F}}_{j-1}\right)}{\alpha^{s-1}\left(Q_n(\mathbf{t})\right)^{s/2}}\right).$$

Так как

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} M\left(|(\mathbf{X}_j,\,\mathbf{t})|^s \,|\, \tilde{\mathscr{F}}_{j-1}\right)}{\alpha^{s-1}\left(Q_n(\mathbf{t})\right)^{s/2}} \leqslant \tilde{\mathbf{L}}_{sn},$$

а $f_{S_{n,\,t}}(1) = f_{\mathbf{S}_n}(\mathbf{t})$, то очевидным образом получаем (3.3) и (3.4). Так как из (3.10) следует (3.6), то этим доказательство и заканчивается.

Точно также получаем еще три леммы (аналоги лемм 9, 11 и 12).

Лемма 2. *Пусть* $|(\mathbf{X}_m,\,\mathbf{t})| \leqslant C_{\mathbf{t}}$, $m=\overline{1,\,n}$ *для некоторой функции* $0 < C_{\mathbf{t}} (= C_{\mathbf{t}}^{(n)}) < \infty$ *с вероятностью* 1 *и пусть* $\alpha > 0$. *Тогда для любого* $s \geqslant 3$ *существует абсолютная постоянная* $A > 0$ *такая, что в области*

$$\left(\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})\right)^{1/2} \leqslant A \bar{\mathbf{L}}_{3n}^{-1}$$

имеет место ас. разл. (3.4) *с той лишь разницей, что вместо* $\tilde{\mathbf{L}}_{sn}$ *стоит*

$$\bar{\mathbf{L}}_{sn} = \sup_{|\mathbf{t}|=1}\left(\frac{C_{\mathbf{t}}}{\alpha\left(Q_n(\mathbf{t})\right)^{1/2}}\right)^{s-2}.$$

Замечание. Если $|\mathbf{X}_m| \leqslant C$, $m=\overline{1,\,n}$, то вместо $\bar{\mathbf{L}}_{sn}$ можно брать

$$\left(\frac{C}{\alpha\sqrt{\lambda_n}}\right)^{s-2},$$

где λ_n – минимальное собственное значение матрицы Λ_n, так как $|(\mathbf{X}_m,\,\mathbf{t})| \leqslant$ $\leqslant C|\mathbf{t}|$, а

$$\bar{\mathbf{L}}_{sn} \leqslant \sup_{|\mathbf{t}|=1}\left(\frac{C|\mathbf{t}|}{\alpha(\lambda_n|\mathbf{t}|^2)^{1/2}}\right)^{s-2} = \left(\frac{C}{\alpha\sqrt{\lambda_n}}\right)^{s-2}.$$

Лемма 3. *Если* $\alpha > 0$ *и для какого-нибудь целого* $s \geqslant 3$ *существуют моменты* $M|\mathbf{X}_m|^s < \infty$, $m=\overline{1,\,n}$, *то при любом* $0 < b < \infty$ *в области*

$$\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t}) \leqslant b \ln\left(1+\mathbf{L}_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}\right)$$

имеет место ас. разл. (3.4) *с той лишь разницей, что остаточный член имеет вид*

$$\Theta_{s,b} \exp\left\{-\frac{\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})}{2}\right\}\left([\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})]^{s/2}+[\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})]^{\frac{3(s-2)}{2}}\right)\mathbf{L}_{sn}+$$

$$+\vartheta_{s,b}[\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})]^{1/2}\mathbf{L}_{sn}\ln^{\frac{s-1}{2}}\left(1+\mathbf{L}_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}\right).$$

Лемма 4. *Если для какого-нибудь целого* $s\geqslant 3$ $M|\mathbf{X}_m|^s<\infty$, $m=\overline{1,\ n}$, *то существует константа* $c>0$ *такая, что в области*

$$\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})\leqslant c\,\mathbf{L}_{sn}^{-\frac{2}{s-2}}$$

имеет место неравенство

$$|f_{\mathbf{Z}_n^*}(\mathbf{t})|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{12\pi^2}\ \tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})\right\}.$$

Для того, чтобы получить ас. разл. для $p_{\mathbf{Z}_n^*}(\mathbf{x})$, надо уметь оценивать $f_{\mathbf{Z}_n^*}(\mathbf{t})$ в области $\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t})\geqslant c\mathbf{L}_{sn}^{-\frac{2}{s-2}}$. Но нетрудно показать (ср. [3], стр. 164), что

$$|f_{S_n}(\mathbf{t})|\leqslant\prod_{i=1}^{2}\operatorname{ess\,sup}|f_{\mathbf{X}_{2i-1}}(\mathbf{t}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{2i-2}\times\tilde{\mathscr{F}}_{2i})|\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{4}\ \tilde{I}_n\left(\frac{\mathbf{t}}{2\pi}\right)\right\},$$

где

$$\tilde{I}_n(\mathbf{t})=\operatorname{ess\,sup}\sum_{m=5}^{n}\int_{R^k}\sin^2(\pi\mathbf{t},\ \mathbf{x})\tilde{p}_{\mathbf{X}_m}(\mathbf{x}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{m-1})\,d\mathbf{x}$$

отличается от $I_n(\mathbf{t})$, введенного в [6], лишь тем, что вместо симметризованной плотности $\tilde{p}_{\mathbf{X}_m}(\mathbf{x})$ здесь берем плотность

$$\tilde{p}_{\mathbf{X}_m}(\mathbf{x}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{m-1})=\int_{R^k}p_{\mathbf{X}_m}(\mathbf{x}+y\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{m-1})p_{\mathbf{X}_m}(y\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{m-1})\,dy,$$

т. е. дело фактически свелось к независимым сл. в.

4. Асимптотические разложения для плотностей

Нам потребуется еще некоторые обозначения.

Через $\bar{\Lambda}_n^*$ обозначим ковариационную матрицу $\mathbf{Z}_n^*$ и положим $Q^*=\lim\limits_{n\to\infty}\bar{\Lambda}_n^*$. Аналогично [6], введем $\mathfrak{M}_m=\{\Delta_{mi},\ C_{mi},\ i=1,\ 2,\ \ldots\}$ – совокупность непересекающихся прямоугольных параллелепипедов Δ_{mi}, с гранями длины $l_{mi}=(l_{mi,1},\ \ldots,\ l_{mi,k})$, и положительных констант $C_{mi}\leqslant\infty$, $i=1,2,\ldots$ Положим для $N>0$

$$\alpha(\mathfrak{M}_m,\ N)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_{mi}^3}{|l_{mi}|^{k-1}(|l_{mi}|+2N)^2C_{mi}^2},$$

где

$$Q_{mi}=\int_{\Delta_{mi}}\min\left(\tilde{p}_m(\mathbf{x}),\ C_{mi}\right)d\mathbf{x}.$$

Через $\tilde{\alpha}(\mathfrak{M}_m, N)$ будем обозначать $\operatorname{ess\,inf} \alpha(\mathfrak{M}_m, N)$, когда вместо $\tilde{p}_m(\mathbf{x})$ стоит $\tilde{p}_m(\mathbf{x} \mid \tilde{\mathscr{F}}_{m-1})$. Кроме того,

$$\tilde{B}_n^0 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{n} M(X_{mj}^2 \mid \tilde{\mathscr{F}}_{m-1}),$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{sn}^0 = \sup_{|\mathbf{t}|=1} \frac{\sum_{m=1}^{n} M\left\{\left|\left((\mathbf{X}_m, \mathbf{t}) - M\left((\mathbf{X}_m, \mathbf{t}) \mid \tilde{\mathscr{F}}_{m-1}\right)\right)\right|^s \mid \tilde{\mathscr{F}}_{m-1}\right\}}{\left(\sum_{m=1}^{n} M\left((\mathbf{X}_m, \mathbf{t})^2 \mid \tilde{\mathscr{F}}_{m-1}\right)\right)^{s/2}},$$

$$\widetilde{B_n^0 \mathbf{L}_{2n}^0} = \operatorname{ess\,sup} \tilde{B}_n^0 \tilde{\mathbf{L}}_{3n}^0 .$$

То же, но при безусловных математических ожиданиях, будем обозначать соответственно B_n^0 и $\mathbf{L}_{sn}^0$. Наконец, $\tilde{\lambda}^*$ — минимальное собственное значение квадратичной формы

$$\operatorname{ess\,inf} \sum_{m=1}^{n} M\{(\mathbf{X}_m, \mathbf{t} D_n^*)^2 \mid \tilde{\mathscr{F}}_{m-1}\},$$

где D_n^* — либо D_n, либо $\bar{D}_n$.

Теорема 1. *Пусть для какого-нибудь* $n \geqslant 4$ *и целого* $s \geqslant 3$ *сл. в.* $\mathbf{X}_m$, $m = \overline{1, n}$ *имеют конечные моменты*

$$\operatorname{ess\,sup} M(|\mathbf{X}_m|^s \mid \tilde{\mathscr{F}}_{m-1}) < \infty,$$

существуют условные плотности $p_m(\mathbf{x} \mid \tilde{\mathscr{F}}_{m-1})$, $m = \overline{1, n}$, *причем*

$$\operatorname{ess\,sup} p_{n_j}(\mathbf{x} \mid \tilde{\mathscr{F}}_{n_j-1} \times \tilde{\mathscr{F}}_{n_j+1}) \leqslant C_{n_j} < \infty, \quad 1 \leqslant n_j \leqslant n, \quad j = \overline{1, n_0}, \quad n_0 \geqslant 2.$$

Если при этом $\alpha |\mathbf{B}_n| \geqslant \delta \ln \frac{1}{\alpha}$, *то*

$$p_{\mathbf{Z}_n^*}(\mathbf{x}) = \varphi^*(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{s-3} Q_{jn}^*(-\varphi^*)(\mathbf{x}) + R_{n1}(\mathbf{x}).$$

Здесь

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |Q^*|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}(Q^*)^{-1}\mathbf{x}'\right)\right\},$$

а полиномы

$$Q_{jn}^*(-\varphi^*)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{R^k} P_{jn}^*(i\mathbf{t}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{Q}_n^*(\mathbf{t}) - i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} d\mathbf{t}$$

можно получить из $P_{jn}^*(i\mathbf{t})$, *подставляя в* (3.5) *вместо произведений* $t_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot t_k^{\alpha_k}$ *выражения*

$$(-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k} \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k} \varphi^*(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_k^{\alpha_k}}.$$

Для остаточного члена $R^*_{n1}(\mathbf{x}) = R^*_{n1,1} + R^*_{n1,2}$ *верна оценка*

$$|R^*_{n1,1}| \leqslant \Theta_s \frac{\tilde{\mathbf{L}}_{sn}}{|\tilde{\Lambda}^*_n|^{1/2}},$$

$$|R^*_{n1,2}| \leqslant \prod_{j=1}^{k} B_{n,j} (C_{n_1} C_{n_2})^{1/2} \exp\left\{-\frac{\alpha}{12} \sum_{m=1}^{n}{}' \alpha\left(\mathfrak{M}_m, \widetilde{8B^0_n \mathbf{L}^0_{3n}}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{k}{2c} \mathbf{L}_{sn}^{\frac{1}{s-2}} \frac{4\pi^2}{\alpha\tilde{\lambda}^*} \exp\left\{-\frac{\alpha\tilde{\lambda}^* c^2}{4\pi^2 k^2} \mathbf{L}_{sn}^{-\frac{2}{s-2}}\right\},$$

где c *— из леммы* 4, *а суммирование в* $\sum\limits_{m=1}^{n}{}'$ *ведется по всем* $m = \overline{1, n}$, *за исключением* n_1 *и* n_2.

Доказательство проводить мы не станем, так как располагая доказательствами теоремы 5 из [3] и теоремы 2 из [6], его получить совсем просто.

Теорема 2. *Пусть для какого-нибудь целого* $s \geqslant 3$ $M|\mathbf{X}_m|^s < \infty$, $m = \overline{1, n}$ *и* $\alpha > 0$. *Пусть, кроме того,*

$$p_{n_i}(\mathbf{x} \mid \tilde{\mathscr{F}}_{n_i-1} \times \tilde{\mathscr{F}}_{n_i+1}) \leqslant C_{n_i} < \infty, \quad i = 1,\ 2, \quad n_i \leqslant n$$

и пусть существуют плотности $p_m(\mathbf{x})$, $m = \overline{1, n}$, $m \neq n_i$. *Тогда*

$$p_{\mathbf{Z}^*_n}(\mathbf{x}) = \varphi^*(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{s-3} \tilde{Q}^*_{jn}(-\varphi^*)(\mathbf{x}) + R^*_{n2}(\mathbf{x}).$$

Здесь $Q^*_{jn}(-\varphi^*)(\mathbf{x})$ *и* $\varphi^*(\mathbf{x})$ *— из теоремы* 1, *а*

$$R^*_{n2}(\mathbf{x}) = R^*_{n2,1} + R^*_{n2,2},$$

где

$$|R^*_{n2,1}| \leqslant \Theta_{s,b} \frac{\mathbf{L}_{sn}}{|\tilde{\Lambda}^*_n|^{1/2}} + \vartheta_{s,b} \mathbf{L}_{sn} \ln^{\frac{s+1}{2}} \left(1 + \mathbf{L}_{sn}^{-\frac{1}{s-2}}\right),$$

$$|R^*_{n2,2}| \leqslant e \cdot \prod_{j=1}^{n} B_{n,j} \sqrt{C_{n_1} C_{n_2}} \exp\left\{-\frac{\alpha^3}{196(1+\ln n)} \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{m=1}^{n}{}' \alpha\left(\mathfrak{M}_m, 8B^0_n \mathbf{L}^{0\,\frac{1}{s-2}}_{sn}\right)\right\} + \frac{\pi e}{B^0_n \mathbf{L}^{0\,\frac{1}{s-2}}_{sn}} \prod_{j=1}^{n} B_{n,j} \times$$

$$\times \exp\left\{-c' \alpha^{3+\frac{4}{s-2}} \frac{1}{1+\ln n} \mathbf{L}^{0\,-\frac{2}{s-2}}_{sn}\right\},$$

причем в теореме 1 $R^*_{n1,2}$ *можно заменить на* $R^*_{n2,2}$.

Примечание. Если $|(\mathbf{X}_m, \mathbf{t})| \leqslant C_t$, $m = \overline{1, n}$ (см. лемму 2), то в предыдущем разложении можно положить

$$R^*_{n2,1} \leqslant \Theta_s \frac{\bar{\mathbf{L}}_{sn}}{|\tilde{\Lambda}^*_n|^{1/2}},$$

а $R^*_{n2,2}$ оставить тем же, причем здесь $s \geqslant 3$ — любое целое число.

Сформулированные нами теоремы выглядят довольно сложно, и поэтому мы примем сейчас некоторые условия, при которых остаточные члены $R^*_{n1,2}$ и $R^*_{n2,2}$ станут более простыми.

Начнем с теоремы 2. Пусть сл. в. $\mathbf{X}_m$ имеют ограниченные плотности, т. е.

$$p_m(\mathbf{x}) \leqslant C_m \leqslant \infty, \quad m=\overline{1, n}.$$

Тогда, согласно (6.1) из [6],

$$\alpha(\mathfrak{M}_m, N) \geqslant \frac{1}{96(4k)^k} \cdot \frac{1}{|\sigma_m|^{2(k-1)}(|\sigma_m|^2+N^2)C_m^2}.$$

Если $B_n^{0^2}=O(n)$, $\mathbf{L}_{sn}^{0\,\frac{1}{s-2}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ и $\alpha \geqslant \alpha_1 > 0$, то

$$\sum_{m=1}^{n} \alpha\left(\mathfrak{M}_m, 8B_n^0 \mathbf{L}_{sn}^{0\,\frac{1}{s-2}}\right) \geqslant C_1(k) \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{|\sigma_m|^{2(k-1)}(|\sigma_m|^2+1)C_m^2}$$

и скорость сходимости определяется величинами

$$R^*_{n2,1} \leqslant \Theta_{s,b} \frac{1}{|\Lambda_n^*|^{1/2}} \frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} + \vartheta_{s,b} \frac{1}{(\sqrt{n})^{s-2}} \ln^{\frac{s+1}{2}}(1+n)$$

и

$$R^*_{n2,2} \leqslant \Theta_k n^{k/2}\left(\exp\left\{-C_2(k)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{|\sigma_m|^{2(k-1)}(|\sigma_m|^2+1)C_m^2}\right\}+\right.$$
$$\left.+\exp\left\{-C_3\frac{n}{1+\ln n}\right\}\right).$$

Аналогичные соображения позволяют установить, что при

$$p_m(\mathbf{x}\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{m-1}) \leqslant C_m \leqslant \infty, \quad m=\overline{1, n},$$
$$\widetilde{B_n^0 \mathbf{L}_{3n}^0}=O(1),$$
$$\mathbf{L}_{sn}^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \tilde{\mathbf{L}}_{sn}^{\frac{1}{s-2}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$
$$\tilde{\lambda}^* \geqslant \lambda_1 > 0, \quad \alpha \geqslant \alpha_1 > 0,$$

скорость сходимости в теореме 1 определяется величинами $\frac{1}{|\tilde{\Lambda}_n^*|^{1/2}} \frac{1}{n^{\frac{s-2}{2}}}$ и

$$\prod_{j=1}^{k} B_{n,j}(C_{n_1}C_{n_2})^{1/2}\exp\left\{-C_4(k)\sum_{m=1}^{n}{}'\frac{1}{|\tilde{\sigma}_m|^{2(k-1)}(|\tilde{\sigma}_m|^2+1)C_m^2}\right\}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\exp\{-C_5(k)n\},$$

где

$$|\tilde{\sigma}_m|^2=\sum_{j=1}^{k} M(X_{mj}^2\,|\,\tilde{\mathscr{F}}_{m-1}).$$

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить В. Статулявичуса за постоянное внимание к данной работе.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
3.VI.1971

Литература

1 В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, I, Liet. matem. rink., **IX**, 2 (1969), 345–361.
2. В. А. Статулявичус, То же, II, Liet. matem. rink., **IX**, 3 (1969), 635–672.
3. В. А. Статулявичус, То же, III, Liet. matem. rink., **X**, 1 (1970), 161–169.
4. В. А. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для неоднородных цепей Маркова, Liet. matem. rink., **I**, 1–2 (1961), 231–314.
5. А. Рауделюнас, Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в неоднородную цепь Маркова, II, Liet. matem. rink., **II**, 1 (1962), 115–124.
6. Р. Лапинскас, О локальной предельной теореме и асимптотических разложениях в многомерном случае, Liet. matem. rink., **XI**, 4 (1971), 817–831.

APIE DAUGIAMAČIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ, SURIŠTŲ Į NEHOMOGENINĘ MARKOVO GRANDINĘ, SUMOS TANKIO ASIMPTOTINIUS DĖSTINIUS

R. Lapinskas

Reziumė)

Darbe įrodomos dvi teoremos apie asimptotinius dėstinius, kai egzistuoja s-ji sąlyginiai momentai (1 teorema) arba s-ji besąlyginiai momentai (2 teorema). Be to, nurodytas būdas, kuriuo remiantis daugiamatės charakteringos funkcijos asimptotinį dėstinį galima gauti tiesiog iš vienmačio.

THE ASYMPTOTICAL EXPANSIONS FOR THE DENSITY OF THE SUM OF MULTIDIMENSIONAL RANDOM VARIABLES COMBINED INTO NONHOMOGENEOUS MARKOV CHAIN

R. Lapinskas

(*Summary*)

Two theorems on asymptotical expansions of random variables mentioned above are proved: theorem 1 – when the s-th conditional moments exist and theorem 2 – when unconditional s-th moments exist. A simple method for getting multidimensional asymptotical expansions for characteristic functions directly from one dimensional ones is offered too.