

УДК 519.214

**ОДНО МНОГОМЕРНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ БОЛЬШИХ
УКЛОНЕНИЙ**

В. И. Паулаускас

В тематике больших уклонений для сумм независимых случайных величин немалую роль играет неравенство С. Н. Бернштейна, которому приписывается большая область применимости и сравнительная простота. Поэтому вполне понятно стремление многих авторов получить многомерный аналог неравенства Бернштейна. По этому вопросу вышел целый ряд работ Ю. В. Прохорова [3], А. В. Прохорова [4], [5], [6], В. М. Золотарева [7], но в этих работах в основном рассматриваются одинаково распределенные и ограниченные случайные векторы. Исключение составляет одна теорема В. М. Золотарева из [7], но в ней вместо ограниченности накладываются довольно сильные условия: слагаемые X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, должны иметь сферические распределения и, кроме того, $M|X_i|^{2k} \leq M|Z_i|^{2k}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$, где Z_i — случайные векторы, имеющие такие нормальные сферические распределения, что $M|Z_i|^2 = M|X_i|^2$.

Мы здесь приведем одно многомерное неравенство, которое не является таким точным, как неравенство Бернштейна в одномерном случае, но зато применимо в гораздо более общей обстановке. В случае одинаково распределенных и ограниченных слагаемых из (3) видно, что неточность возникает в основном из-за плохой зависимости от размерности векторов. Отметим, что и в одномерном случае оценка (2), по сравнению с неравенством Бернштейна, применима к большему классу случайных величин, так как на рост моментов слагаемых не накладывается никаких ограничений.

Пусть $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, n$, — независимые одинаково распределенные случайные векторы (о. с. в.), для которых

$$M\xi_{ij} = 0, \quad M\xi_{ij}^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Будем рассматривать сумму

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j \xi_j, \quad \text{где} \quad a_j \xi_j = (a_{j1} \xi_{j1}, \dots, a_{jk} \xi_{jk}).$$

Обозначим

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^n a_{ji}^2, \quad M\xi_{ij}^m = \lambda_{j,m}.$$

Теорема 1. Пусть ξ_i таковы, что выполняются условия

$$P\{S_{nj} < 0\} \leq 1-p, \quad P\{S_{nj} > 0\} \leq 1-p, \quad j=1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

тогда для всех целых $m \geq 1$ таких, что $\lambda_{j, 2m} < \infty$, $j=1, 2, \dots, k$,

$$P\{|S_n| > 4k \sqrt{m} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_{j, 2m} \cdot \sigma_j^{2m} \right)^{\frac{1}{2m}}\} \leq \frac{\sqrt{2e}}{p} e^{-m}. \quad (2)$$

Следствие 1. Пусть ξ_i , $i=1, 2, \dots, n$, — независимые о. с. в.,

$$M\xi_{ij} = 0, \quad M\xi_{ij}^2 = 1, \quad |\xi_{ij}| < \alpha$$

с вероятностью 1, а

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Тогда для всех $t > 0$

$$P\{|S_n| > t\alpha \sqrt{n}\} \leq \frac{k \sqrt{2e^3}}{p} e^{-\frac{t^2}{16k^2}}. \quad (3)$$

Легко видеть, что (3) нетривиально, когда

$$\sqrt{kn} \geq t \geq 2k \sqrt{2(3 + \ln 2 - 2 \ln p + 2 \ln k)},$$

т. е. когда

$$n > 8k(3 + \ln 2 - 2 \ln p + 2 \ln k).$$

Отметим, что условие (1) будет выполняться для достаточно больших n , если S_n удовлетворяет условиям центральной предельной теоремы, а для этого достаточно весьма слабых ограничений на a_i . Например, в оценке (3) всегда $p \rightarrow \frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

В одномерном случае получаем следующую оценку, дополняющую работу [1], идеи которой используются в доказательствах настоящей заметки.

Следствие 2. Пусть ξ_i , $i=1, 2, \dots, n$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с

$$M\xi_i = 0, \quad M\xi_i^2 = 1, \quad M\xi_i^k = \lambda_k, \quad S_n = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Если

$$P\{S_n < 0\} \leq 1-p, \quad P\{S_n > 0\} \leq 1-p,$$

то для всех целых $m \geq 1$, таких что $\lambda_{2m} < \infty$

$$P\{|S_n| > 4 \sqrt{m} \lambda_{2m}^{\frac{1}{2m}} \sigma\} \leq \frac{\sqrt{2e}}{p} e^{-m}.$$

Оценка (4) является не такой точной, как неравенство Бернштейна, но она применима в более общем случае, так как не требуется, чтобы у слагаемых существовали моменты всех порядков. Предположение об одинаковом распределении ξ_i , как и в [1], не является существенным, так как для разнораспределенных ξ_i достаточно в (4) положить $\lambda_{2m} = \max_{j \leq n} M\xi_j^{2m}$.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую теорему.

Теорема 2. Пусть распределение случайных векторов ξ_i таково, что при некотором $m \geq 1$ для всех $j=1, 2, \dots, k$, $\lambda_{j, 2m} < \infty$, а

$$\lambda_{ji}=0, \quad i=1, 3, 5, \dots, 2m-1.$$

Тогда для всех таких m

$$P \left\{ \max_{r \leq n} S_r > \sqrt[2]{2km} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_{j, 2m} \cdot \sigma_j^{2m} \right)^{\frac{1}{2m}} \right\} \leq \frac{\sqrt[2]{2e}}{k} \cdot e^{-m}. \quad (5)$$

Следствие 3. Пусть выполнены условия следствия 1 и, кроме того,

$$\lambda_{ji}=0, \quad j=1, 2, \dots, k, \quad i=1, 3, 5, \dots \quad (6)$$

Тогда для всех $t > 0$

$$P \left\{ \max_{r \leq n} S_r > t \alpha \sqrt[2]{n} \right\} \leq \sqrt[2]{2e^3} e^{-\frac{t^2}{2k}}. \quad (7)$$

Теперь уже (7) нетривиально, если

$$\sqrt[2]{kn} \geq t \geq \sqrt[2]{k(3 + \ln 2)},$$

т. е. оценку можно применять, если только $n \geq 4$.

Замечание. В (2), (3) и (4) вместо S_n мы можем тоже поставить $\max_{r \leq n} S_r$, но тогда нужно потребовать, чтобы условия (1) выполнялись для всех S_{ij} , $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, k$.

Теорема 2 и следствие 3 усиливают и обобщают работу [1] для многомерного случая. Как сообщил автору Даниелс, недавно им тоже получены некоторые неравенства в многомерном случае.

Доказательство теоремы 2 и следствия 3. Пусть A — некоторая область k -мерного евклидова пространства R_k , $f(x) \geq 0$, $x \in R_k$ — некоторая функция, для которой

$$\int_{R_k} f(x) F_{S_n}(dx) < \infty.$$

Тогда

$$P \{ S_n \in A \} \leq \frac{1}{\min_{x \in A} f(x)} \int_{R_k} f(x) F_{S_n}(dx).$$

Положим

$$A = \{ x : |x| > r \}, \quad f(x) = |x|^{2m} = (x_1^2 + \dots + x_k^2)^m, \quad r > 0,$$

$m \geq 1$ — целое. Тогда

$$\begin{aligned} P \{ |S_n| > r \} &\leq r^{-2m} \int_{R_k} (x_1^2 + \dots + x_k^2)^m F_{S_n}(dx) \leq \\ &\leq k^{m-1} r^{-2m} \sum_{i=1}^k \int_{R_k} x_i^{2m} F_{S_n}(dx) = k^{m-1} r^{-2m} \sum_{i=1}^k MS_{ni}^{2m}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для MS_{ni}^{2m} , применяя оценку из [1], получаем

$$MS_{ni}^{2m} \leq \sqrt[2]{2e} \left(\frac{2m\sigma_i^2}{e} \right)^m \lambda_{i, 2m}$$

Из (8) имеем

$$P\{|S_n| > r\} \leq r^{-2m} k^{m-1} \left(\frac{2m}{e}\right)^m \sum_{i=1}^k \lambda_{i,2m} \sigma_i^{2m}. \quad (9)$$

Положив в (9)

$$r = \sqrt{2km} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_{i,2m} \sigma_i^{2m} \right)^{\frac{1}{2m}},$$

получаем (5).

Если $|\xi_{ij}| < \alpha$ с вероятностью 1, то $\lambda_{i,2m} \leq \alpha^{2m}$, а при всех $a_{ij} = 1$ имеем $\sigma_i^2 = n$. Поэтому вместо (9) будем иметь для всех целых $m \geq 1$

$$P\{|S_n| > r\} \leq r^{-2m} \left(\frac{2mk\alpha^2 n}{e} \right)^m. \quad (10)$$

Рассуждения, аналогичные [1], позволяют из (10) получить (7).

Доказательство теоремы 1. Будем говорить, что k -мерный случайный вектор симметрический, если все маргинальные распределения его компонент являются симметрическими. Очевидно, что если ξ_i являются симметрическими с. в., то условие (6) выполняется (но симметричность не является необходимым условием для выполнения (6) — это показывает пример из [2], стр. 282). Поэтому теорему 1 докажем с помощью хорошо известного приема симметризации. Для этой цели нам понадобится следующий аналог одномерной леммы из [2], стр. 188.

Лемма. Пусть $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik})$, $i = 1, 2$, — независимые одинаково распределенные с. в. и

$$P\{\xi_{1j} < 0\} \leq 1-p, \quad P\{\xi_{1j} > 0\} \leq 1-p$$

для всех $j = 1, 2, \dots, k$. Тогда с. в. $\xi^* = \xi_1 - \xi_2$ — симметрический, и для всех $t > 0$ имеют место неравенства

$$P\{|\xi^*| > t\} \geq \frac{1}{k} p P\{|\xi_1| > \sqrt{kt}\}, \quad (11)$$

$$P\{\xi^* \in D_t\} \geq \frac{1}{k} p P\{\xi_1 \in D_t\}, \quad (12)$$

где $D_t = \{x: |x_i| < t, i = 1, \dots, k\}$ — k -мерный куб со стороной t .

Так как всегда $P\{|\xi| > t\} \geq P\{\xi \in D_t\} \geq P\{|\xi| > \sqrt{kt}\}$, то нам достаточно доказать (12). Для простоты записи положим $k = 2$. Имеем

$$\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}), \quad \xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}), \quad \xi^* = \xi_1 - \xi_2,$$

$$P\{\xi_1 - \xi_2 \in D_t\} \geq P\{|\xi_{11} - \xi_{21}| > t\},$$

$$P\{\xi_1 - \xi_2 \in D_t\} \geq P\{|\xi_{12} - \xi_{22}| > t\}.$$

Используя условия леммы и одномерные неравенства из [2], стр. 188, получаем

$$P\{\xi_1 - \xi_2 \in D_t\} \geq p P\{|\xi_{11}| > t\},$$

$$P\{\xi_1 - \xi_2 \in D_t\} \geq p P\{|\xi_{12}| > t\} \geq p P\{|\xi_{12}| > t, |\xi_{11}| \leq t\}. \quad (13)$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$2P\{\xi_1 - \xi_2 \in D_t\} \geq P\{\xi_1 \in D_t\},$$

что совпадает с (12). Лемма доказана.

В дальнейшем везде с. в. или моменты со звездочкой будут обозначать симметризованный с. в. или его моменты. Рассмотрим

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i^*.$$

Так как для ξ_i^* выполняются условия (6), то мы воспользуемся теоремой 2, которая дает

$$P\{|S_n^*| > \sqrt{2km} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_{j, 2m}^* \sigma_j^{*2m} \right)^{\frac{1}{2m}}\} \leq \frac{\sqrt{2e}}{k} e^{-m}. \quad (14)$$

Из условий теоремы, применяя лемму, получаем

$$kP\{|S_n^*| > t\} \geq P\{|S_n| > \sqrt{kt}\}. \quad (15)$$

Объединяя (14), (15) и очевидные неравенства $\lambda_{j, 2m}^* < 2^{2m} \lambda_{j, 2m}$, $\sigma_j^{*2} = 2\sigma_j^2$, получаем (2). Следствие 1 доказывается так же, как и следствие 3.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
25.XII.1970

Л и т е р а т у р а

1. J. E. A. Dunnage, Khintchine's lemma on sums of random variables, J. London Math. Soc., 2, 2 (1970), 563—566.
2. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей, II, М., 1967.
3. Ю. В. Прохоров, Распространение неравенства С. Н. Бернштейна на многомерный случай, Теория вероят. и ее примен., XIII, вып. 2, 1 (1968).
4. А. В. Прохоров, О многомерных аналогах неравенства С. Н. Бернштейна, Теория вероят. и ее примен., XIII, вып. 2 (1968).
5. А. В. Прохоров, Об одном вероятностном неравенстве, Матем. заметки, 3, 6 (1968).
6. А. В. Прохоров, Неравенства С. Н. Бернштейна в многомерном случае, Теория вероят. и ее примен., XIII, вып. 3 (1968).
7. В. М. Золотарев, Несколько замечаний о многомерных неравенствах типа неравенств Бернштейна—Колмогорова, Теория вероят. и ее примен., XIII, вып. 2 (1968).

APIE VIENĄ DIDELIŲ ATSILENKIMŲ NELYGYBĘ

V. Paulauskas

(Reziumė)

Darbe įrodytos dvi teoremos, kurios papildo ir apibendrina daugiamačiam atvejui Daneidžo vienmatį rezultatą apie nepriklausomų dydžių sumų didelių atsilenkimų tikimybes.

AN INEQUALITY OF LARGE DEVIATIONS

V. Paulauskas

(Summary)

Let $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik}), i = 1, \dots, n$ be independent identically distributed random vectors with $M\xi_{ij} = 0, M\xi_{ij}^2 = 1$. We deal with the sum

$$S_n = (S_{n1}, \dots, S_{nk}) = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \text{ where } a_i \xi_i = (a_{i1} \xi_{i1}, \dots, a_{ik} \xi_{ik}), a_{ij}$$

are real numbers. Let us denote

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^n a_{ji}^2, \quad M\tilde{\varepsilon}_{ij}^m = \lambda_{jm}.$$

Theorem 1. Let $P\{S_{nj} < 0\} \leq 1-p$, $P\{S_{nj} > 0\} \leq 1-p$, $j=1, 2, \dots, k$. If m is any positive integer such, that $\lambda_{j, 2m} < \infty$, $j=1, 2, \dots, k$, then

$$P\left\{S_n > 4k\sqrt{m} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_{j, 2m} \sigma_j^{2m}\right)^{\frac{1}{2m}}\right\} \leq \frac{\sqrt{2e}}{p} e^{-m}.$$

Theorem 2. Let random vectors $\tilde{\varepsilon}_i$ satisfy the following conditions with some integer $m \geq 1$ and all $j=1, 2, \dots, k$

$$\lambda_{ji} = 0, \quad i=1, 3, 5, \dots, 2m-1, \quad \lambda_{j, 2m} < \infty.$$

Then for all such m

$$P\left\{\max_{r \leq n} S_r > \sqrt{2km} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_{j, 2m} \sigma_j^{2m}\right)^{\frac{1}{2m}}\right\} \leq \frac{\sqrt{2e}}{k} e^{-m}.$$

When the random vectors $\tilde{\varepsilon}_i$ are bounded we obtain as corollaries inequalities of Bernstein – Kolmogorov type.

The paper supplements and generalizes the result of J. E. A. Dunnage [1].