1972

УДК 519.21

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРА КВАНТОВАННОГО ПО УРОВНЮ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В. Г. Алексеев

Влияние квантования случайного процесса по уровню на его статистические свойства исследовалось с различных точек зрения в работах [1–6] (см. также Корн [7], гл. 6; Левин [8], § 7.4; Дёч [9], § 8.4). В настоящей заметке мы исследуем смещение оценок спектральной плотности случайного процесса с учетом ошибок, возникающих из-за квантования по уровню его значений. Предположим, что рассматриваемый случайный процесс x_k, $k=1, 2, \ldots$, является гауссовским стационарным случайным процессом со средним 0 и спектральной плотностью $f(\lambda)$, являющейся функцией из класса $\operatorname{Lip}\alpha$, где $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$. Пусть далее

$$r_j=\mathbf{M}\,x_k x_{k+j}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos j\lambda f(\lambda)\,d\lambda,\qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

$\sigma^2=r_0$, $w(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ – произвольная неотрицательная функция такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx=1,\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}[\,|x|^{\alpha}w(x)+w^2(x)]\,dx<\infty, \tag{2}$$

и b_n – последовательность положительных чисел такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}+\frac{b_n}{n}\right)=0.$$

В качестве оценки величины $f(\lambda_0)$, где $|\lambda_0|<\pi$, по значениям $x_k, k=1$, $2, \ldots, n$, исследуемого случайного процесса, рассмотрим квадратичную форму

$$f_n(\lambda_0)=\frac{1}{n}\sum_{j,\,k=1}^{n} h_{jk}(\varphi_n)\,x_j x_k, \tag{3}$$

где

$$h_{jk}(\varphi_n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)\lambda}\varphi_n(\lambda;\lambda_0)\,d\lambda, \tag{4}$$

а функция $\varphi_n(\lambda;\ \lambda_0)$, называемая весовой функцией оценки, определяется соотношением

$$\varphi_n(\lambda;\ \lambda_0)=\frac{b_n}{2}\Big\{w\,[b_n(\lambda_0-\lambda)]+w\,[b_n(\lambda_0+\lambda)]\Big\}. \tag{5}$$

Оценки вида (3) многократно изучались в статистической литературе (см., например, работы [10—13], в которых исследуются статистические свойства таких оценок). Предположим теперь, что процесс x_k подвергается квантованию по уровню с интервалом группировки q, так что

$$x_k^0 = mq, \text{ если } \left(m - \frac{1}{2}\right) q \leqslant x_k < \left(m + \frac{1}{2}\right) q,$$

где $m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$ Пусть

$$r_j^0 = \mathbf{M}\, x_k^0 x_{k+j}^0, \qquad j = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \tag{6}$$

и

$$f_n^0(\lambda_0) = \frac{1}{n} \sum_{j,\,k=1}^{n} h_{jk}(\varphi_n)\, x_j^0 x_k^0. \tag{7}$$

Нас интересует разность $\mathbf{M} f_n^0(\lambda_0) - f(\lambda_0)$, которую представим в виде

$$\mathbf{M} f_n^0(\lambda_0) - f(\lambda_0) = \mathbf{M}\,[f_n(\lambda_0) - f(\lambda_0)] + \mathbf{M}\,[f_n^0(\lambda_0) - f_n(\lambda_0)]. \tag{8}$$

Предположим, что величина $(q/\sigma)^2$, называемая глубиной квантования, много меньше единицы. Первое слагаемое в правой части (8), которое мы обозначим через ε_n, согласно [13]:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} O(b_n^{-\alpha}), & \dfrac{1}{2} < \alpha < 1, \\[2mm] O\left(\dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{1}{b_n}\right), & \alpha = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Перейдем к вычислению второго слагаемого в правой части (8). В соответствии с (1), (3), (6) и (7)

$$\mathbf{M}\,[f_n^0(\lambda_0) - f_n(\lambda_0)] = h_{11}(\varphi_n)(r_0^0 - r_0) + \varepsilon(n, \ q), \tag{10}$$

где

$$\varepsilon(n, \ q) = 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{n} h_{1,\,1+j}(\varphi_n)(r_j^0 - r_j). \tag{11}$$

Согласно (4) и известным результатам, относящимся к группировке гауссовских случайных величин (см., например, Корн [7], § 6.11; Крамер [14], § 27.9),

$$h_{11}(\varphi_n)(r_0^0 - r_0) = \frac{q^2}{24\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda; \ \lambda_0)\, d\lambda + o(q^p), \tag{12}$$

где p — любое натуральное число.

Пользуясь соотношениями (2) и (5), нетрудно показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda; \ \lambda_0)\, d\lambda = 1 + O(b_n^{-\alpha}).$$

Поэтому из (12) следует

$$h_{11}(\varphi_n)(r_0^0 - r_0) = \frac{q^2}{24\pi} + O(b_n^{-\alpha}) + o(q^p). \tag{13}$$

Далее в соответствии с (2), (4), (5) и (11)

$$|\varepsilon(n, q)| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} |r_j^0 - r_j|. \tag{14}$$

Пользуясь теперь формулой (1) работы [6], можно показать, что

$$|r_j^0 - r_j| < c_j |r_j|, \tag{15}$$

где $c_j = o(q^p)$ при любом натуральном p равномерно по j при $|r_j| \leqslant r < \sigma^2$. В качестве r может быть принята, например, величина $\sup\limits_{j \geqslant 1} |r_j|$. Из предположения $f(\lambda) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, где $\alpha > \frac{1}{2}$, следует (см., например, Бари [15], гл. II, § 3), что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |r_j| < \infty.$$

Поэтому из (14) и (15) вытекает

$$\varepsilon(n, q) = o(q^p) \tag{16}$$

равномерно по n при любом натуральном p.

Сопоставляя теперь (8), (9), (10), (13) и (16), приходим к следующему результату:

$$\mathbf{M} f_n^0(\lambda_0) - f(\lambda_0) = \frac{q^2}{24\pi} + \varepsilon_n + o(q^p), \tag{17}$$

где p — любое натуральное число, а величина ε_n определяется соотношением (9).

Перейдем к рассмотрению смещенного (нецентрированного) квантования, определяемого соотношением

$$x_k^0 = (m+\theta) q, \quad \text{если} \ \left(m+\theta-\frac{1}{2}\right) q \leqslant x_k < \left(m+\theta+\frac{1}{2}\right) q,$$

где $0 < |\theta| < \frac{1}{2}$. В этом случае

$$r_j^0 = \mathbf{M}\, x_k^0 x_{k+j}^0 = \mathrm{Cov}\,(x_k^0, x_{k+j}^0) + (\mathbf{M}\, x_k^0)^2$$

и из соотношений (10)—(11) вместо (17) последует

$$\mathbf{M} f_n^0(\lambda_0) - f(\lambda_0) = \frac{q^2}{24\pi} + \varepsilon_n + o(q^p) + (\mathbf{M} x_k^0)^2 \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} \varphi_n(\lambda; \lambda_0)\, d\lambda, \tag{18}$$

где, как и ранее, p — любое натуральное число, а величина ε_n определяется соотношением (9). Из формулы (3) работы [5] легко следует (см. также Крамер [14], § 27.9), что $(\mathbf{M} x_k^0)^2 = o(q^p)$ при любом натуральном p, но при фиксированном q последнее слагаемое в правой части (18) может в некоторых случаях неограниченно возрастать с ростом n.

Такое явление может иметь место, прежде всего, при $\lambda_0 = 0$. Можно, однако, с помощью очень простых оценок показать, что, если следовать рекомендациям работы [15] относительно выбора последовательности b_n и, кроме того, выбрать фунцию $w(x)$ так, чтобы она обращалась в нуль при $|x|<c$, где $c>0$, то множитель

$$\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}\,\varphi_n(\lambda;\ 0)\,d\lambda$$

в последнем слагаемом правой части (18) будет стремиться к нулю при $n\to\infty$. При этом для смещения оценки $f_n^0(0)$, как и в случае несмещенного квантования, будет справедлива формула (17).

Автор искренне благодарен А. М. Яглому за внимание к настоящей работе.

Институт физики атмосферы
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
16.XII.1969

Литература

1. А. А. Косякин, Статистическая теория квантования по уровню, Автоматика и телемеханика, XXII, № 6 (1961), 722–729.
2. С. Ф. Козубовьский, Загальна теорія квантування за рівнем та її застосування до визначення кореляції, Автоматика, 8, № 1 (1963), 73–89.
3. А. И. Величкин, Корреляционная функция и спектральная плотность квантованного процесса, Радиотехника, 17, № 7 (1962), 70–77.
4. D. R. McNeil, Estimating the covariance and spectral density functions from a clipped stationary time series, J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 29, No 1 (1967), 180–195.
5. G. Bonnet, Syr la statistique du second ordre des signaux aleafoires quantifie's, Compt. Rend. Acad. Sci., 255, № 5, (1962), 825–287.
6. G. Bonnet, Sur certaines propriétés des fonctions de correlation des signaux laplaciens quantifiés, Compt. Rend. Acad. Sci., 255, n° 6, (1962), 1064–1066.
7. Г. Корн, Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах, М., „Мир", 1968.
8. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. I, М., „Советское радио", 1966.
9. Р. Дёч, Нелинейные преобразования случайных процессов, М., „Советское радио", 1965.
10. M. Rosenblatt, Statistical analysis of stochastic processes with stationary residuals, Probability and Statistics, The Harald Cramér volume (ed. by U. Grenander), N.–Y.–Stockholm, 1959, 246–275.
11. Э. Хеннан, Анализ временных рядов, М., „Наука", 1964.
12. R. H. Jones, Spectral estimates and their distributions, p. I, Skand. Aktuarietidskr., No 1–2, (1962), 39–69; p. II, ibid. No 3–4 (1962), 135–153.
13. В. Г. Алексеев, Об оценке спектра гауссовского стационарного случайного процесса, Liet. matem. rink., IX, № 1 (1969), 5–14.
14. Г. Крамер, Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948.
15. Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.

APIE ATSITIKTINIO GAUSO PROCESO SPEKTRO, KVANTUOTO PAGAL LYGMENĮ, ĮVERTINIMĄ

A. Aleksejevas

(*Reziumė*)

Nagrinėjami stacionaraus Gauso proceso x_k, $k=1, 2, \ldots$, kurio vidurkis 0 ir dispersija σ^2, spektrinio tankio įvertinimai. Tiriamas įvertinimų poslinkis, kvantuojant procesą x_k pagal lygmenį.

Esant prielaidai, kad kvantavimo žingsnis q yra mažas, lyginant su σ, o proceso x_k spektrinis tankis yra klasės Lip α funkcija, kur $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, įrodoma, kad dideliam prabos tūriui poslinkis apytiksliai lygus $q^2/24\pi$.

ON SPECTRUM ESTIMATION OF A CLIPPED GAUSSIAN RANDOM PROCESS

V. G. Alekseyev

(*Summary*)

The spectral density function estimates of a Gaussian stationary random process x_k, $k = 1, 2, \ldots$, with zero mean value and variance σ^2 are considered. The additional bias of these estimates arising due to clipping, i. e. amplitude quantization, of the process x_k, is investigated. It is assumed that the step width q of the quantization is small as compared to σ and the spectral density function is a function of the Lip α class, where $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$. By these assumptions we demonstrate that for large sample size the additional bias to be determined is approximately equal to $q^2/24\pi$.