XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1972

УДК 519.21

СХОДИМОСТЬ К ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

А. Бакштис

Общая теорема сходимости произведений независимых случайных величин к логарифмическим законам распределения (з. р.), доказанная в ([1], теорема 2), позволяет строить критерии сходимости к данным законам. Рассмотрим сходимость к двустороннему логарифмически нормальному закону с функцией распределения (ф. р.)

$$L(\alpha_0,\ \alpha_1,\ x)=\begin{cases}\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2}\,[1-G(\ln|x)], & \text{если } x<0,\\ 1-\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\,[1-G(\ln x)], & \text{если } x>0,\end{cases}$$

где

$$G(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{u}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

и параметры распределения α_0 и α_1 удовлетворяют условиям: $0<\alpha_0\leqslant 1$, $|\alpha_1|\leqslant\alpha_0$. В частности, при $\alpha_0=\alpha_1=1$ получаем классический логнормальный з. р.

Характеристическим преобразованием (х. п.) ф. р. $F(x)$ называется диагональная матрица с элементами на главной диагонали:

$$w_j(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^{it}\operatorname{sgn}^j x\,dF(x),\qquad j=0,\ 1,$$

где черточка посредине знака интеграла означает, что из промежутка интегрирования исключена точка $x=0$.

Поскольку упомянутая теорема получена с помощью х. п., то сходимость ф. р. в ней имеет следующий смысл [2]: ф. р. $F_n(x)$ при $n\to\infty$ сходятся к предельной ф. р. $F(x)$ тогда и только тогда, когда $F_n(x)\to F(x)$ в каждой точке непрерывности ф. р. $F(x)$ и $F_n(0)\to F(0)$, $F_n(+0)\to F(+0)$. Такую сходимость назовем М-сходимостью.

1. Пусть $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ – последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин, удовлетворяющих условию М-предельной пренебрегаемости: для любого $\varepsilon>0$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\mathbf{P}\left((|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\right)\to 0\qquad(n\to\infty).$$

Рассмотрим произведение

$$\zeta_n = a_n \xi_{n1} \xi_{n2}, \ \ldots, \ \xi_{nk_n}, \tag{1}$$

где $\{a_n\}$ – некоторая последовательность положительных чисел. Положим

$$\mathbf{P}(\xi_{nk} < 0) = c_{nk}^-, \qquad \mathbf{P}(\xi_{nk} > 0) = c_{nk}^+,$$

$$\xi'_{nk} = \begin{cases} \xi_{nk}, & \text{если } c_{nk}^+ \geqslant c_{nk}^-, \\ -\xi_{nk}, & \text{если } c_{nk}^+ < c_{nk}^-. \end{cases}$$

Ф. р. случайных величин ξ_{nk} и ξ'_{nk} обозначим $F_{nk}(x)$ и $F'_{nk}(x)$.

Теорема 1. *Ф. р. произведений независимых М-предельно пренебрегаемых случайных величин* (1) *при надлежащем выборе* a_n *М-сходятся к ф.р.* $L(\alpha_0, \alpha_1, x)$ *тогда и только тогда, когда для любых* $t>1$ *и* $c>1$ *при* $n\to\infty$

$$1) \ \prod_{k=1}^{k_n} \left(c_{nk}^+ + (-1)^j c_{nk}^-\right) \to \alpha_j, \qquad j=0, \ 1;$$

$$2) \ \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_{0<|x|\leqslant\frac{1}{t}} dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x|\geqslant t} dF_{nk}(x) \right\} \to 0;$$

$$3) \ \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c} \ln^2|x|\, dF_{nk}(x) - \Bigl(\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c} \ln|x|\, dF_{nk}(x) \Bigr)^2 \right\} \to 1;$$

$$4) \ \alpha_1 \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{-c<x<-\frac{1}{c}} \ln|x|\, dF'_{nk}(x) \to 0;$$

$$5) \ \alpha_1 \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{-c<x<-\frac{1}{c}} \ln^2|x|\, dF'_{nk}(x) \to 0.$$

Все допустимые значения a_n *имеют вид*

$$a_n = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)} \int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c} \ln|x|\, dF_{nk}(x) + o(1) \right\}.$$

Доказательство. Элементы х. п. закона $L(\alpha_0, \alpha_1, x)$ имеют вид

$$w_0(t) = \alpha_0 f^{(1)}(t) f^{(2)}(t), \qquad w_1(t) = \alpha_1 \frac{f^{(1)}(t)}{f^{(2)}(t)},$$

где $f^{(1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $f^{(2)}(t)\equiv 1$. Поэтому, согласно теореме 2 из [1], ф. р. произведений (1) М-сходятся к $L(\alpha_0, \alpha_1, x)$ тогда и только тогда, когда при $n\to\infty$ для произвольных фиксированных $\varepsilon>0$ и $\tau>0$ ($\varepsilon<\tau$) выполнены следующие условия: в случае $\alpha_1\neq 0$

$$\mathrm{I}) \ \prod_{k=1}^{k_n} \left(c_{nk}^+ + (-1)^j c_{nk}^-\right) \to \alpha_j, \qquad j=0, \ 1;$$

II) ф. р. сумм $\tilde{\xi}_{n1} + \tilde{\xi}_{n2} + \ \ldots \ + \tilde{\xi}_{nk_n} + \ln a_n$, где независимые случайные величины $\tilde{\xi}_{nk}$ имеют ф. р.

$$\Lambda_{nk}(x)=\mathbf{P}(\ln|\xi_{nk}|<x\mid\xi_{nk}\neq 0),$$

сходятся к нормальному закону $G(x)$;

$$\text{III)}\ \sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} dF'_{nk}(-e^x)\to 0;$$

$$\text{IV)}\ \sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\tau} x\,dF'_{nk}(-e^x)\to 0;$$

$$\text{V)}\ \sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\tau} x^2\,dF'_{nk}(-e^x)\to 0.$$

В случае $\alpha_1=0$ сохраняются только условия I) и II), а остальные являются излишними.

Поскольку случайные величины $\tilde{\xi}_{nk}$ предельно бесконечно малы [3], согласно критерию нормальной сходимости ([4], стр. 329), условие II) имеет место тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon>0$ и $\tau>0$ при $n\to\infty$

$$C_1)\ \sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} d\Lambda_{nk}(x)=\sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}\left\{\int_{0<|x|\leqslant e^{-\varepsilon}} dF_{nk}(x)+\right.$$

$$\left.+\int_{|x|\geqslant e^{\varepsilon}} dF_{nk}(x)\right\}\to 0;$$

$$C_2)\ \sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\tau} x^2 d\Lambda_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\tau} x\,d\Lambda_{nk}(x)\right)^2\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}\int_{e^{-\tau}<|x|<e^{\tau}}\ln^2|x|\,dF_{nk}(x)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}\int_{e^{-\tau}<|x|<e^{\tau}}\ln|x|\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\}\to 1.$$

Все допустимые значения a_n определяются из соотношения

$$-\ln a_n=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\tau} x\,d\Lambda_{nk}(x)+o(1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}\int_{e^{-\tau}<|x|<e^{\tau}}\ln|x|\,dF_{nk}(x)+o(1).$$

Освободимся в этих условиях от множителей перед интегралами. Так как для любого $0<\varepsilon<1$

$$\min_{1\leqslant k\leqslant k_n}\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)\geqslant 1-\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\mathbf{P}\left((|\xi_{nk}|-1)^2>\varepsilon\right),$$

то из М-предельной пренебрегаемости случайных величин ξ_{nk} следует, что

$$\min_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)\to 1 \qquad (n\to\infty). \tag{2}$$

Следовательно, для всех достаточно больших n и всех k $(1\leqslant k\leqslant k_n)$ верны неравенства $\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)\geqslant \frac{1}{2}$, в силу которых

$$0\leqslant \sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{0<|x|\leqslant e^{-\varepsilon}} dF_{nk}(x)+\int\limits_{|x|\geqslant e^{\varepsilon}} dF_{nk}(x)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}\left\{\int\limits_{0<|x|\leqslant e^{-\varepsilon}} dF_{nk}(x)+\int\limits_{|x|\geqslant e^{\varepsilon}} dF_{nk}(x)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{0<|x|\leqslant e^{-\varepsilon}} dF_{nk}(x)+\int\limits_{|x|\geqslant e^{\varepsilon}} dF_{nk}(x)\right\}.$$

Отсюда, если положить $e^{\varepsilon}=t$, вытекает эквивалентность C_1) условию II).

Рассмотрим далее условие C_2). Положим $e^{\tau}=c$,

$$A_n(c)=\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c}\ln^2|x|\,dF_{nk}(x)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c}\ln|x|\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\},$$

$$B_n(c)=\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c}\ln^2|x|\,dF_{nk}(x)-\right.$$

$$\left.-\left(\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c}\ln|x|\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\}.$$

Из неравенств

$$|A_n(c)-B_n(c)|\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\left(\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}-1\right)\left\{\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c}\ln^2|x|\,dF_{nk}(x)-\right.$$

$$\left.-\left(\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c}\ln|x|\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\}\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\left(\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}-1\right)B_n(c);$$

$$|A_n(c)-B_n(c)|\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\left(1-\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)\right)\left\{\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c}\ln^2|x|\,dF_{nk}(x)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)}\int\limits_{\frac{1}{c}<|x|<c}\ln|x|\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\}\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\left(1-\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)\right)A_n(c),$$

согласно (2), вытекает эквивалентность C_2) условию III).

Кроме того, условия IV) и V) с учетом того, что в случае $\alpha_1=0$ они должны быть излишними, можно переписать в виде условий IV) и V). Условие же III) является следствием условия II). Действительно, поскольку

$$\Lambda_{nk}(x)=\mathbf{P}(\ln|\xi_{nk}|<x\,|\,\xi_{nk}\neq 0)=\mathbf{P}(\ln|\xi'_{nk}|<x\,|\,\xi'_{nk}\neq 0),$$

то из условия

$$\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{0<|x|\leqslant\frac{1}{t}}dF_{nk}(x)+\int\limits_{|x|\geqslant t}dF_{nk}(x)\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{0<x\leqslant\frac{1}{t}}dF'_{nk}(x)+\int\limits_{x\geqslant t}dF'_{nk}(x)\right\}-\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|\geqslant\ln t}dF'_{nk}(-e^x)\to 0$$

вытекает III).

Теорема доказана.

2. Рассмотрим схему нарастающих произведений, когда случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ с ф. р. $F_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, имеют конечные М-математические ожидания

$$m_k=\mathbf{M}(\ln|\xi_k|\,|\,\xi_k\neq 0)$$

и М-дисперсии

$$d_k^2=\mathbf{D}(\ln|\xi_k|\,|\,\xi_k\neq 0).$$

Положим

$$\mathbf{P}(\xi_k<0)=c_k^-,\qquad \mathbf{P}(\xi_k>0)=c_k^+,$$

$$\xi'_k=\begin{cases}\xi_k, & \text{если } c_k^+\geqslant c_k^-,\\ -\xi_k, & \text{если } c_k^+<c_k^-,\end{cases}$$

$$F'_{nk}(x)=\mathbf{P}(\xi'_k<x),$$

$$D_n=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}d_k^2}.$$

Теорема 2. *Ф. р. произведений*

$$\zeta_n=\prod_{k=1}^{n}|\xi_k e^{-m_k}|^{\frac{1}{D_n}}\operatorname{sgn}\xi_k \tag{3}$$

независимых случайных величин ξ_k, $k=1, 2, \ldots$, *при* $n\to\infty$ М-*сходятся к ф. р.* $L(\alpha_0, \alpha_1, x)$ *и* $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} d_k/D_n\to 0$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

в случае $\alpha_1\neq 0$ *для любого* $\varepsilon>0$ *при* $n\to\infty$

$$1)\ \prod_{k=1}^{n}\left(c_k^{+}+(-1)^j c_k^{-}\right)\to\alpha_j,\qquad j=0,\ 1;$$

$$2)\ h_n(\varepsilon)=\frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\ \int\limits_{|x-m_k|\geqslant\varepsilon D_n}(x-m_k)^2\,d[F_k(e^x)-F_k(-e^x)]\to 0;$$

$$3)\ \frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_k)\,dF_k'(-e^x)\to 0;$$

$$4)\ \frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_k)^2\,dF_k'(-e^x)\to 0.$$

В случае $\alpha_1=0$ *сохраняются только условия* 1) *и* 2).

Доказательство. Произведение (3) перепишем в виде (1), полагая

$$a_n=1,\qquad \xi_{nk}=|\xi_k e^{-m_k}|^{\frac{1}{D_n}}\operatorname{sgn}\xi_k.$$

Ф. р. случа йной величины ξ_{nk} обозначим $F_{nk}(x)$, а элементы х. п. ${}_{nk}w_j(t)$ $j=0,1$. Условную ф. р. случайной величины ξ при условии $\xi\neq 0$ обозначим $F(x\mid\xi\neq 0)$ с такими же индексами, как и у случайной величины. Элементы х. п. произведения ζ_n обозначим ${}_nw_j(t)$, $j=0,1$. Тогда

$${}_nw_j(t)=\prod_{k=1}^{n}{}_{nk}w_j(t),\qquad j=0,\ 1.$$

Если ф. р. произведений (3) при $n\to\infty$ М-сходятся к $L(\alpha_0, \alpha_1, x)$ и

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{d_k}{D_k}\to 0,\tag{4}$$

то из этого следует, что

$${}_nw_0(0)=\prod_{k=1}^{n}(c_{nk}^{+}+c_{nk}^{-})\to\alpha_0>0.$$

Кроме того, очевидно,

$$c_{nk}^{+}=\mathbf{P}(\xi_{nk}>0)=\mathbf{P}(\xi_k>0)=c_k^{+},$$

$$c_{nk}^{-}=\mathbf{P}(\xi_{nk}<0)=\mathbf{P}(\xi_k<0)=c_k^{-}.$$

Следовательно, для любого k $c_{nk}^{+}+c_{nk}^{-}=c_k^{+}+c_k^{-}>0$ и

$$\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)=\mathbf{P}(\xi_k\neq 0)\to 1\ (k\to\infty).\tag{5}$$

Поэтому существует наименьшее положительное значение вероятностей неравенства $\xi_k\neq 0$:

$$\min_{k\geqslant 1}\mathbf{P}(\xi_k\neq 0)=p>0.\tag{6}$$

И наоборот, если выполнены условия теоремы 1) и 2), то имеют место (4) и, очевидно, (5) и (6). Действительно,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{d_k^2}{D_n^2}=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{D_n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_k)^2\,d[F_k(e^x\mid\xi_k\neq 0)-$$

$$-F_k(-e^x\mid\xi_k\neq 0)]\leqslant\varepsilon^2+\frac{1}{p}h_n(\varepsilon)\to 0,$$

когда $n\to\infty$, а затем $\varepsilon\to 0$.

Таким образом, как в случае доказательства необходимости, так и в случае доказательства достаточности условий теоремы, в каждом случае имеют место (4), (5), (6). Отсюда следует, что случайные величины ξ_{nk} удовлетворяют условию М-предельной пренебрегаемости ([5], лемма 6): при $n\to\infty$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|{}_{nk}w_0(t)-1|\to 0 \tag{7}$$

равномерно в каждом конечном t-интервале. В самом деле, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\,dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0)=\mathbf{M}(\ln|\xi_{nk}|\mid\xi_{nk}\neq 0)=$$

$$=\mathbf{M}\left(\frac{1}{D_n}\ln|\xi_k|-\frac{m_k}{D_n}\mid\xi_k\neq 0\right)=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ln^2|x|\,dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0)=\mathbf{D}(\ln|\xi_{nk}|\mid\xi_{nk}\neq 0)=\frac{d_k^2}{D_n^2},$$

то

$$|{}_{nk}w_0(t)-1|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|^{it}-1)\,dF_{nk}(x)\right|=$$

$$=\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|^{it}-1)\,dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0)\right|=$$

$$=\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0)\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|^{it}-1-it\ln|x|)\,dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{t^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln^2|x|\,dF_{nk}(x\mid\xi_{nk}\neq 0)=\frac{t^2}{2}\left(\frac{d_k}{D_n}\right)^2,$$

откуда, согласно (4), вытекает (7).

Поэтому к произведению (3) применима теорема 2 из [1], которой мы уже воспользовались в п. 1. Условия III) — V) этой теоремы, поскольку

$$F_{nk}(x)=F_k(|x|^{D_n}e^{m_k}\operatorname{sgn}x),$$

можно переписать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|\geqslant \varepsilon D_n} dF'_k(-e^x) \to 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|<\tau D_n} (x-m_k)\, dF'_k(-e^x) \to 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|<\tau D_n} (x-m_k)^2 dF'_k(-e^x) \to 0. \tag{10}$$

Из неравенств (для $0<\varepsilon<\tau$)

$$\left|\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|<\tau D_n} (x-m_k)\, dF'_k(-e^x)\right| \geqslant \left|\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_k)\right.$$

$$\left. dF'_k(-e^x)\right| - \left|\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|\geqslant \tau D_n} (x-m_k)\, dF'_k(-e^x)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_k)\, dF'_k(-e^x)\right| + \tau \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|\geqslant \varepsilon D_n} dF'_k(-e^x);$$

$$\left|\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_k)\, dF'_k(-e^x)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|<\tau D_n} (x-m_k)\, dF'_k(-e^x)\right| +$$

$$+\tau \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|\geqslant \varepsilon D_n} dF'_k(-e^x)$$

вытекает, что (8) и (9) эквивалентны условию теоремы 3). Из аналогичных неравенств находим, что и условия (8), (10) эквивалентны условию 4).

Случайные величины $\tilde{\xi}_{nk}$ в условии II) имеют математические ожидания и дисперсии, равные

$$\mathbf{M}\tilde{\xi}_{nk} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, d\Lambda_{nk}(x) = \frac{1}{D_n}\int_{-\infty}^{+\infty} (\ln|x| - m_k)\, dF_k(x \mid \xi_k \neq 0) = 0;$$

$$\mathbf{D}\tilde{\xi}_{nk} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\Lambda_{nk}(x) = \frac{1}{D_n^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\ln|x| - m_k)^2\, dF_k(x \mid \xi_k \neq 0) = \frac{d_k^2}{D_n^2}.$$

Поэтому условие II) при дополнительном условии Феллера

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{D}\tilde{\xi}_{nk} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{d_k^2}{D_n^2} \to 0 \quad (n\to\infty) \tag{11}$$

эквивалентно условию Линдеберга ([4], стр. 309): для любого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$

$$g_n(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} x^2\,d\Lambda_{nk}(x)=$$

$$=\frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-m_k|\geqslant\varepsilon D_n}(x-m_k)^2\,d[F_k(e^x\mid\xi_k\neq0)-F_k(-e^x\mid\xi_k\neq0)]\to0.$$

Поскольку

$$h_n(\varepsilon)\leqslant g_n(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{p}\,h_n(\varepsilon),$$

то условие II) при выполнении (11) эквивалентно 2). Вследствие равенства $|\xi_k|=|\xi_k'|$ имеем оценку суммы (8)

$$0\leqslant-\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-m_k|\geqslant\varepsilon D_n}dF_k'(-e^x)\leqslant-\frac{1}{\varepsilon^2D_n^2}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-m_k|\geqslant\varepsilon D_n}(x-m_k)^2\,dF_k'(-e^x)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\,h_n(\varepsilon),$$

в силу которой условие 2) влечет за собой (8).

Тем самым теорема доказана полностью.

3. Пусть $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ — случайные величины с одной и той же ф. р. $F(x)$ и существуют

$$\mathbf{M}(\ln|\xi_k|\mid\xi_k\neq0)=m,$$

$$\mathbf{D}(\ln|\xi_k|\mid\xi_k\neq0)=d^2>0.$$

Положим

$$\mathbf{P}(\xi_k>0)=c^+,\qquad \mathbf{P}(\xi_k<0)=c^-.$$

Теорема 3. *Ф. р. произведений*

$$\zeta_n=\prod_{k=1}^{n}|\xi_k e^{-m}|^{\frac{1}{d\sqrt{n}}}\operatorname{sgn}\xi_k,$$

независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_k, $k=1,2,\ldots$, *при* $n\to\infty$ М-*сходятся к ф. р. только двух типов*:

а) *к ф. р.* $L(1,\alpha_1,x)$ *тогда и только тогда, когда* $F(0)=F(+0)<1$, *причем*

$$\alpha_1=\begin{cases}1, & \text{если } F(0)=0,\\ 0, & \text{если } 0<F(0)<1;\end{cases}$$

б) *к несобственной ф. р. со скачком в точке* $x=0$ *тогда и только тогда, когда* $F(0)<F(+0)$.

Если $F(0)=1$, *то предельная ф. р. не существует.*

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 2 для одинаково распределенных случайных величин. Условие Феллера

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{d_k}{D_n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\to0\qquad(n\to\infty)$$

и 2), очевидно, всегда выполнены. Параметры α_0 и α_1 могут принять только два значения:

$$\alpha_0=\lim_{n\to\infty}(c^+ + c^-)^n=\begin{cases}1, & \text{если } F(0)=F(+0),\\ 0, & \text{если } F(0)<F(+0),\end{cases}$$

$$\alpha_1=\lim_{n\to\infty}(c^+ - c^-)^n=\begin{cases}1, & \text{если } F(0)=F(+0)=0,\\ 0, & \text{если } 0<F(0)+F(+0)<2.\end{cases}$$

Кроме того, предел, который определяет α_1, не существует, когда $F(0)=1$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) Если $F(0)=F(+0)=0$, то $\alpha_0=\alpha_1=1$. Тогда случайные величины ξ_k принимают только положительные значения, и условия 3), 4) теоремы 2, очевидно, выполнены.

Если $0<F(0)=F(+0)<1$, то $\alpha_0=1$, $\alpha_1=0$ и условия 3), 4) являются излишними.

б) Если $F(0)<F(+0)$, то $\alpha_0=\alpha_1=0$ и предельная ф. р., как легко видеть, несобственная со скачком в точке $x=0$.

Теорема доказана.

Каунасский политехнический институт. Шяуляй

Поступило в редакцию 25.VI.1971

Литература

1. А. Бакштис, Сходимость к логарифмическим законам распределения, Liet. matem. rink. XII, № 1 (1972), 23–39.
2. А. Бакштис, Предельные законы распределения мультипликативных арифметических функций, Канд. диссертация, 1968.
3. А. Бакштис, Сходимость законов распределения произведений независимых случайных величин, Liet. matem. rink., XI, № 4 (1971), 727–744.
4. М. Лоэв, Теория вероятностей, М., 1962.
5. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций (III). Liet. matem. rink., VIII, № 4 (1968), 643–680.

KONVERGAVIMAS PRIE LOGARITMIŠKAI NORMALINIO DĖSNIO

A. Bakštys

(*Reziumė*)

Straipsnyje yra įrodyti kriterijai, kuriuos išpildžius nepriklausomų atsitiktinių dydžių sandaugų pasiskirstymo funkcijos konverguoja prie dvipusio logaritmiškai normalinio dėsnio su pasiskirstymo funkcija

$$L(\alpha_0,\ \alpha_1\ x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha_0-\alpha_1}{2}\,[1-G(\ln|x|)], & \text{jei} \quad x<0,\\[2ex] 1-\dfrac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\,[1-G(\ln x)], & \text{jei} \quad x>0,\end{cases}$$

$$G(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \qquad 0<\alpha_0\leqslant 1, \qquad |\alpha_1|\leqslant\alpha_0.$$

DIE KONVERGENZ GEGEN LOGARIHMISCH-NORMALE VERTEILUNG

A. Bakštys

(*Zusammenfassung*)

Im Artikel sind die Konvergenzkriterien der Verteilungsfunktionen der Produkte von unabhängigen zufälligen Veränderlichen gegen zweiseitige logaritmisch-normale Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$L(\alpha_0, \alpha_1, x) = \begin{cases} \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}\,[1 - G(\ln|x|)] & \text{für} \quad x < 0, \\ 1 - \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\,[1 - G(\ln x)] & \text{für} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \qquad 0 < \alpha_0 \leqslant 1, \qquad |\alpha_1| \leqslant \alpha_0$$

bewiesen.