XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1972

УДК 517.54

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ С ОТЛИЧНОЙ ОТ НУЛЯ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ

Э. Г. Кирьяцкий

В настоящей заметке мы продолжаем изучать функции из класса $K_n(D)$, введенного нами в [2]. Напомним определение этого класса: регулярная и однозначная в области D функция $F(z)$ принадлежит классу $K_n(D)$, если n-я разделенная разность $[F(z);\ z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n]$ функции $F(z)$ не равна нулю при любых $z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n \in D$. В частности, если $n=1$, то класс $K_1(D)$ представляет собой класс однолистных в области D функций. Под $K_0(D)$ будем подразумевать класс аналитических в области D функций $F(z)$, не равных нулю ни в одной точке этой области:

$$F(z_0)=[F(z);\ z_0]\neq 0 \text{ при } z_0\in D.$$

Множество всех функций, принадлежащих классу $K_n(E)$ (E — круг $|z|<1$) и нормированных условиями $F(0)=\ldots=F^{(n-1)}(0)=0;\ F^{(n)}(0)=n!$, обозначим через $\tilde{K}_n(E)$.

Пусть функция $\Phi(z)$ регулярна в E и $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n \in E$. Предположим, что $[\Phi(z);\ 0\ \zeta_1 \ldots \zeta_n]\neq 0$ и введем символ

$$\{\Phi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_n\}\equiv\frac{[\Phi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_n]}{[\Phi(z);\ 0\zeta_1\ \ldots\ \zeta_n]}. \tag{1}$$

В работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Если* $F(z)\in\tilde{K}_n(E)$ и $0\leqslant m\leqslant n-1$, *то*

$$z^m\{z^{-m}F(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_{n-m}\}\in\tilde{K}_m(E)$$

при любых фиксированных $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_{n-m}\in E$.

В частном случае, когда $m=n-1$, эта теорема установлена нами в [5]. Из этой теоремы вытекает, что множество функций $z\{z^{-1}F(z);\ z\zeta_1\ldots\zeta_{n-1}\}$, где $F(z)\in\tilde{K}_n(E)$, образует некоторый подкласс $\tilde{K}_{1,n}(E)$ однолистных в E функций. В работе найдены точные оценки для модуля и второго коэффициента функций этого подкласса $\tilde{K}_{1,n}(E)$. Отметим, что эти оценки такие же, как и для всего класса однолистных функций.

1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $T_n(z)\,\varphi(z)\in K_n(D)$, *где* $T_n(z)$ — *некоторый многочлен n-й степени и* $\varphi(z)$ — *регулярная в области* D *функция. Тогда для любых многочленов* $T_m(z)$ *и* $T_{n-m}(z)$, *для которых* $T_m(z)\,T_{n-m}(z)\equiv T_n(z)$, $0\leqslant m\leqslant n-1$ *и любых* $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_{n-m}\in D$ *справедливо соотношение*

$$T_m(z)\,[T_{n-m}(z)\,\varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_{n-m}]\in K_m(D). \tag{2}$$

Доказательство. По известному представлению разделенной разности контурным интегралом [1] имеем

$$[T_n(z)\varphi(z);\ z_0 z_1 \ldots z_n] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{T_n(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega}{(\omega-z_0)\ldots(\omega-z_n)}, \tag{3}$$

где c — контур, целиком лежащий в области D и охватывающий точки $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D$. Обозначим через $P_{n-m-1}(z)$ многочлен $(n-m-1)$-й степени, интерполирующий функцию $T_n(z)\varphi(z)$ в точках $z_{m+1}, \ldots, z_n \in D$. Тогда многочлен $T_m(z)\cdot P_{n-m-1}(z)$ будет многочленом $(n-1)$-й степени и поэтому

$$[T_m(z)\cdot P_{n-m-1}(z);\ z_0 z_1 \ldots z_n] \equiv 0. \tag{4}$$

Выражая левую часть этого тождества контурным интегралом и пользуясь (3), получим

$$[T_n(z)\varphi(z);\ z_0 z_1 \ldots z_n] =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{T_m(\omega)\,[T_{n-m}(\omega)\varphi(\omega) - P_{n-m-1}(\omega)]\,d\omega}{(\omega-z_0)\ldots(\omega-z_m)\cdot(\omega-z_{m+1})\ldots(\omega-z_n)}. \tag{5}$$

Как известно [1], для любой аналитической в области D функции $\Phi(z)$ справедливо равенство

$$\frac{\Phi(z) - P_{k-1}(z)}{(z-\xi_1)(z-\xi_2)\ldots(z-\xi_k)} \equiv [\Phi(z);\ \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k], \tag{6}$$

где $P_{k-1}(z)$ — многочлен $(k-1)$-й степени, интерполирующий функцию $\Phi(z)$ в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. Полагая в формуле (6) $\Phi(z) = T_{n-m}(z)\varphi(z)$ и используя в качестве точек интерполирования точки $z_{m+1}, \ldots, z_n$, равенство (5) перепишем следующим образом:

$$[T_n(z)\varphi(z);\ z_0 z_1 \ldots z_n] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{T_m(\omega)\,[T_{n-m}(\omega)\varphi(\omega);\ \omega z_{m+1}\ldots z_n]\,d\omega}{(\omega-z_0)\ldots(\omega-z_m)},$$

или

$$[T_n(z)\varphi(z);\ z_0 z_1 \ldots z_n] =$$
$$= \Big[T_m(z)\,[T_{n-m}(z)\varphi(z);\ z\, z_{m+1} \ldots z_n];\ z_0 z_1 \ldots z_m\Big]. \tag{7}$$

Так как $T_n(z)\varphi(z) \in K_n(D)$, то левая часть, а с нею и правая часть равенства (7), не равны нулю. Это означает, что

$$T_m(z)\,[T_{n-m}(z)\varphi(z);\ z z_{m+1} \ldots z_n] \in K_m(D), \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1.$$

Предположив здесь $z_{m+1} = \zeta_1$, $z_{m+2} = \zeta_2$, $\ldots$, $z_n = \zeta_{n-m}$, получим (2).

Следствие 1. *Если $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$, то функция*

$$z^m\{z^{-m}F(z);\ z\zeta_1 \ldots \zeta_{n-m}\} \in \tilde{K}_m(E), \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1, \tag{8}$$

при любых фиксированных $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-m} \in E$. В самом деле, $F(z) = z^n\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — регулярная в E функция. Если предположить $T_k(z) = z^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то $T_{n-m}(z)\varphi(z) = z^{-m}F(z)$ и соотношение (2) примет вид

$$z^m[z^{-m}F(z);\ z\zeta_1 \ldots \zeta_{n-m}] \in K_m(E), \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1,$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-m} \in E$. Отсюда следует [3], что

$$[z^{-m}F(z);\ 0\zeta_1 \ldots \zeta_{n-m}] \neq 0$$

при любых $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-m} \in E$ и $\{z^{-m}F(z);\ 0\ \zeta_1 \ldots \zeta_{n-m}\}=1$. Следовательно, имеет место (8).

Пусть теперь $F(z)=z^{n-1} f(z) \in \tilde{K}_n(E)$ и $\zeta_1=\zeta_2= \ldots =\zeta_{n-m}=0$. Тогда легко убедиться, что

$$[z^{-m}F(z);\ \underbrace{00\ \ldots\ 0}_{n-m+1 \text{ раз}}]=\frac{1}{(n-m)!}\ \frac{d^{n-m}[z^{-m}F(z)]}{dz^{n-m}}\bigg|_{z=0}=1$$

и

$$[z^{-m}F(z);\ z\ \underbrace{00\ \ldots\ 0}_{n-m \text{ раз}}]=\frac{f(z)}{z}. \tag{9}$$

Применяя следствие 1, получим

$$z^{m-1}f(z)\in \tilde{K}_m(E), \quad 0\leqslant m\leqslant n-1. \tag{10}$$

Если же в (8) положим $m=n-1$, то

$$z^{n-1}\{f(z);\ z\zeta_1\}=\frac{\zeta_1 z^{n-1}}{f(\zeta_1)}\cdot\frac{f(z)-f(\zeta_1)}{z-\zeta_1}\in \tilde{K}_{n-1}(E) \tag{11}$$

при любом фиксированном $\zeta_1 \in E$. Соотношения (10) и (11) были получены нами в работах [3], [5].

Возьмем в качестве многочлена $T_n(z)$ такой многочлен n-й степени, у которого все корни лежат в области D. Пусть $T_n(z)\equiv T_m(z)\cdot T_{n-m}(z)$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-m}\in D$ являются корнями многочлена $T_{n-m}(z)$. Тогда из представления разделенной разности контурным интегралом следует, что $[T_{n-m}(z)\varphi(z);\ z\zeta_1 \ldots \zeta_{n-m}]\equiv a\ \varphi(z)$, где a — старший коэффициент многочлена $T_{n-m}(z)$.

Согласно теореме 1 имеем

$$T_m(z)\ \varphi(z)\in K_m(D), \quad 0\leqslant m\leqslant n-1 \tag{12}$$

и приходим к следующему выводу.

Следствие 2. *Если $T_n(z)\varphi(z)\in K_n(D)$ и все корни многочлена $T_n(z)$ лежат в области D, то для любого многочлена $T_m(z)$, являющегося делителем многочлена $T_n(z)$, справедливо соотношение*

$$T_m(z)\ \varphi(z)\in K_m(D), \quad 0\leqslant m\leqslant n.$$

2. Обозначим через $C_n(D)$, $n\geqslant 0$ класс функций $F(z)$, аналитических в выпуклой области D и удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}F^{(n)}(z)>0$, $z\in D$. Этот класс был введен Б. Е. Гопенгаузом в [8]. Этому классу функций соответствует теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. *Если $F(z)=T_n(z)\varphi(z)\in C_n(D)$, то*

$$T_m(z)\,[T_{n-m}(z)\ \varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_{n-m}]\in C_m(D),\ 0\leqslant m\leqslant n-1,$$

где $T_n(z)\equiv T_m(z)\cdot T_{n-m}(z)$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-m}$ — любые фиксированные точки из выпуклой области D.

В самом деле, из равенства (7) получаем

$$\operatorname{Re}[T_n(z)\ \varphi(z);\ z_0 z_1\ \ldots\ z_n]=$$
$$=\operatorname{Re}\Big[T_m(z)\,[T_{n-m}(z)\ \varphi(z);\ zz_{m+1}\ \ldots\ z_n];\ z_0 z_1\ \ldots\ z_m\Big]. \tag{13}$$

По условию теоремы

$$\operatorname{Re}F^{(n)}(z)>0, \quad z\in D, \tag{14}$$

и так как область D выпукла, то неравенство (14) влечет за собой выполнение неравенства (см. [3])

$$\operatorname{Re}[T_n(z)\varphi(z);\ z_0 z_1 \ \dots\ z_n] > 0 \tag{15}$$

при любых $z_0, z_1, \dots, z_n \in D$.

Неравенство (15) показывает, что правая часть (13) больше нуля. В частности, при $z_0 = z_1 = \dots = z_m = z$

$$\operatorname{Re}\frac{d^m T_m(z)[T_{n-m}(z)\varphi(z);\ zz_{m+1}\ \dots\ z_n]}{dz^m} > 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1,$$

т. е.

$$T_m(z)[T_{n-m}(z)\varphi(z);\ zz_{m+1}\ \dots\ z_n] \in C_m(D).$$

Положив $z_{m+1} = \zeta_1$, $z_{m+2} = \zeta_2$, $\dots$, $z_n = \zeta_{n-m}$, убедимся в справедливости теоремы 2.

Если все корни многочлена $T_n(z)$ лежат в области D, то приняв $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-m}$ за корни многочлена $T_{n-m}(z)$, являющегося делителем многочлена $T_n(z)$, получим следствие 3.

Следствие 3. *Если $T_n(z)\varphi(z) \in C_n(D)$ и корни многочлена $T_n(z)$ все лежат в выпуклой области D, то для любого многочлена $T_m(z)$, являющегося делителем многочлена $T_n(z)$, справедливо соотношение $T_m(z)\varphi(z) \in C_m(D)$, $0 \leqslant m \leqslant n$.*

Полагая, в частности $T_n(z) = z^n$ и используя в качестве выпуклой области D единичный круг E, получим следствие 4.

Следствие 4. *Если $z^n\varphi(z) \in C_n E)$, то $z^m\varphi(z) \in C_m(E)$, $0 \leqslant m \leqslant n$.* Последний результат был установлен Б. Е. Гопенгаузом в [8].

3. Функция $f(z)$ принадлежит классу $P(E)$, если при любом натуральном n выполняется условие $z^{n-1}f(z) \in \tilde{K}_n(E)$ (см. [6]). Для функций $f(z) \in P(E)$ справедлива теорема 3.

Теорема 3. *Если $f(z) \in P(E)$, то и функция $z\{z^{k-1}f(z);\ z\zeta_1 \dots \zeta_k\}$ при любом натуральном k и любых фиксированных $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k \in E$ принадлежит классу $P(E)$.*

Доказательство. Пусть m и k — два произвольно фиксированных натуральных числа и $n = m+k$. По условию $z^{n-1}f(z) \in \tilde{K}_n(E)$ при любом $n \geqslant 1$ и согласно следствию 1

$$z^{m-1}z\{z^{k-1}f(z);\ z\zeta_1\ \dots\ \zeta_k\} \in \tilde{K}_m(E) \tag{16}$$

при любых $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k \in E$. В силу произвольности натуральных чисел m и k из (16) следует справедливость теоремы 3.

Сделаем одно замечание, которым воспользуемся в дальнейшем.

Замечание 1. *При любом натуральном k и любых z, ζ_m, $\zeta_m \neq \exp(-i\alpha)$, где α — действительное число и $m = 1, 2, \dots, k$ справедливо равенство*

$$\{z^k(1 - e^{i\alpha}z)^{-1};\ z\zeta_1\ \dots\ \zeta_k\} = (1 - e^{i\alpha}z)^{-1}. \tag{17}$$

В самом деле, равенство (17) следует из того, что

$$\frac{z^k}{1 - e^{i\alpha}z} = \frac{z^k - e^{-ki\alpha}}{1 - e^{i\alpha}z} + \frac{e^{-ki\alpha}}{1 - e^{i\alpha}z},$$

$$\left[\frac{z^k - e^{-ki\alpha}}{1 - e^{i\alpha}z};\ z\zeta_1\ \dots\ \zeta_k\right] \equiv 0,$$

$$\left[\frac{e^{-ki\alpha}}{1 - e^{i\alpha}z};\ z\zeta_1\ \dots\ \zeta_k\right] = \frac{\sqrt{1}}{(1 - e^{i\alpha}z)(1 - e^{i\alpha}\zeta_1)\ \dots\ (1 - e^{i\alpha}\zeta_k)}.$$

4. Рассмотрим класс $L_n(E)$, $n \geqslant 1$ таких функций $F(z)=z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots$, для которых выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^n |a_{n+k}| \leqslant 1. \tag{18}$$

Этот класс функций, являющийся подклассом класса $\tilde{K}_n(E)$, был введен Б. Е. Гопенгаузом в [7]. Им же установлена следующая теорема.

Теорема. *Если* $F(z) \in L_n(E)$, *то функция*

$$F_1(z, \zeta)=z^{n-1}\{z^{1-n}F(z);\ z\zeta\} \in L_{n-1}(E)$$

при любом фиксированном $\zeta \in E$.

Имеет место более общая теорема 4.

Теорема 4. *Если* $F(z) \in L_n(E)$, *то*

$$z^m\{z^{-m}F(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_{n-m}\} \in L_m(E), \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1,$$

при любых фиксированных $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-m} \in E$.

Для доказательства понадобится лемма 1.

Лемма 1. *Для любого натурального* l *справедливо равенство*

$$[z^l\varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_{l+1}]=\Big[z([z^{l-1}\varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_l]);\ z\zeta_{l+1}\Big]. \tag{19}$$

Действительно,

$$[z^l\varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_{l+1}]=\Big[[z^l\varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_l];\ z\zeta_{l+1}\Big]. \tag{20}$$

Далее по формуле для разделенной разности от произведения двух функций z и $z^{l-1}\varphi(z)$ получаем

$$[z^l\varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_l]=[z(z^{l-1}\varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_l]=$$
$$=z[z^{l-1}\varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_l]+[z^{l-1}\varphi(z);\ z\zeta_1\ \ldots\ \zeta_l]. \tag{21}$$

Подставляя в равенство (20) вместо разделенной разности $[z^l\varphi(z);\ z\zeta_1,\ \ldots\ \zeta_l]$ ее выражение по формуле (21) и пользуясь аддитивным свойством разделенной разности, приходим к равенству (19).

Переходим к доказательству теоремы 4. Так как по условию $F(z) \in L_n(E)$, $n \geqslant m+1 \geqslant 1$, то по вышеуказанной теореме Гопенгауза, функция

$$F_1(z, \zeta_1)=z^{n-1}\{z^{1-n}F(z);\ z\zeta_1\} \tag{22}$$

принадлежит классу $L_{n-1}(E)$. Применив снова теорему Гопенгауза к функции $F_1(z, \zeta_1)$, получим

$$F_2(z, \zeta_1, \zeta_2)=z^{n-2}\{z^{2-n}F_1(z_1\zeta_1);\ z\zeta_2\} \in K_{n-2}(E). \tag{23}$$

Пользуясь формулой (22) и леммой 1, преобразуем выражение в фигурных скобках соотношения (23) следующим образом:

$$\{z^{2-n}F_1(z_1\zeta_1);\ z\zeta_2\}=\Big\{z\{z^{1-n}F(z);\ z\zeta_1\};\ z\zeta_2\Big\}=$$
$$=\frac{\Big[z[z^{1-n}F(z);\ z\zeta_1];\ z\zeta_2\Big]}{\Big[z[z^{1-n}F(z);\ z\zeta_1];\ 0\zeta_2\Big]}=\frac{[z^{2-n}F(z);\ z\zeta_1\zeta_2]}{[z^{2-n}F(z);\ 0\zeta_1\zeta_2]}=\{z^{2-n}F(z);\ z\zeta_1\zeta_2\}.$$

Теперь соотношение (23) можно записать так:

$$F_2(z,\ \zeta_1,\ \zeta_2)=z^{n-2}\{z^{2-n}F(z);\ z\zeta_1\zeta_2\}\in K_{n-2}(E).$$

Продолжая указанный процесс, убедимся в справедливости теоремы при любом $0\leqslant m\leqslant n-1$.

5. Классы $K_n(D)$, $C_n(D)$, $P(E)$, $L_n(E)$ обладают тем свойством, что они замкнуты относительно равномерной сходимости.

Теорема 5. *Пределом равномерно сходящейся последовательности функций* $F_m(z)$, $m=1, 2\ldots$ *из класса* $K_n(D)\left(C_n(D)\right)$ *является или функция* $F(z)$ *из класса* $K_n(D)\left(C_n(D)\right)$, *или многочлен* $(n-1)$-*й степени. Пределом равномерно сходящейся последовательности функций* $F_m(z)$, $m=1, 2, \ldots$ *из класса* $L_n(E)\left(P(E)\right)$ *является функция* $F(z)$ *также из класса* $L_n(E)$ $\left(P(E)\right)$.

Доказательство. Для классов $K_n(D)$ и $P(E)$ указанное свойство установлено в работах [2] и [6], поэтому докажем теорему 4 только для классов $C_n(D)$ и $L_n(E)$.

Так как последовательность регулярных функций $F_m(z)\in C_n(D)$, $m=1, 2, \ldots$ равномерно сходится к некоторой функции $F(z)$, то и последовательность гармонических функций $\mathrm{Re}F_m^{(n)}(z)$, $m=1, 2, \ldots$ равномерно сходится к гармонической функции $\mathrm{Re}F^{(n)}(z)$. По условию $\mathrm{Re}F_m^{(n)}(z)>0$, $z\in D$. Следовательно, $\mathrm{Re}F^{(n)}(z)\geqslant 0$, $z\in D$. Если $\mathrm{Re}F^{(n)}(z)>0$, $z\in D$, то $F(z)\in C_n(D)$. Если же $\mathrm{Re}F^{(n)}(z_0)=0$, $z_0\in D$, то по принципу минимума для гармонических функций $F^{(n)}(z)\equiv 0$ и функция $F(z)$ — многочлен $(n-1)$-й степени.

Утверждение теоремы для класса $L_n(E)$ очевидным образом следует из определения этого класса.

6. В качестве дополнения к теореме 1 укажем одно свойство функции $F(z)$ из класса $K_n(D)$, связанное с поведением этой функции в граничных точках области D. Обозначим через $D^+=D^+(F)$ объединение области D и множества тех граничных точек области D, в которых функция $F(z)$ из класса $K_n(D)$ аналитична. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $F(z)$, $T_n(z)$, $T_m(z)$ *те же, что и в теореме* 1. *Если* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-m}\in D^+(F)$, *где* $0\leqslant m\leqslant n$, *то функция*

$$\Phi_m(z,\ \zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_{n-m})=T_m(z)\,[T_m^{-1}(z)\,F(z);\,z\zeta_1\,\ldots\,\zeta_{n-m}],$$

или принадлежит классу $K_m(D)$, *или является многочленом* $(m-1)$-*й степени. Под многочленом* (-1)-*й степени понимаем многочлен, тождественно равный нулю.*

Доказательство. Пусть $z\in D$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-m}\in D^+$. Очевидно, что функция $\Phi_m(z_1,\ \zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_{n-m})$ является регулярной в D^+, а тем более непрерывной по всем переменным z, $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m}$. В области D выберем последовательность точек $\{\xi_1^{(k)}\}, \ldots, \{\xi_{n-m}^{(k)}\}$ такую, чтобы $\xi_1^{(k)}\to\xi_1$, $\xi_2^{(k)}\to\zeta_2, \ldots, \xi_{n-m}^{(k)}\to\zeta_{n-m}$ при $k\to\infty$ и $\xi_i^{(k)}\in D$ для всех $k\geqslant 1$ и $1\leqslant i\leqslant n-m$. Тогда последовательность функций $\Phi_m(z,\ \xi_1^{(k)},\ \ldots,\ \xi_{n-m}^{(k)})$, $k=1, 2, \ldots$ равномерно сходится относительно z внутри области D к функции $\Phi_m(z,\ \zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_{n-m})$.

По теореме 1 функция $\Phi_m(z, \xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_{n-m}^{(k)})$ принадлежит классу $K_m(D)$ и поэтому предельная функция $\Phi_m(z, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$, согласно теореме 4, или принадлежит классу $K_m(D)$, или является многочленом $(m-1)$-й степени.

Замечание 2. Последняя теорема легко распространяется на случай классов $L_n(E)$, $C_n(D)$, $P(E)$, $\tilde{K}_n(E)$, так как для этих классов справедлива теорема 5.

7. Имеет место лемма 2.

Лемма 2. *Пусть* η — *комплексное число и*

$$F(z) = \frac{z^n(1+\eta z)}{(1-z)^2}.$$

Для того чтобы функция $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$ *необходимо и достаточно выполнения для* η *неравенства*

$$\left| \eta + \frac{n}{n+1} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{24}$$

Доказательство. Для любого натурального k справедливо легко проверяемое тождество

$$z^k(1-z)^{-2} \equiv P_{k-2}(z) + k(z-1)^{-1} + (z-1)^{-2}, \tag{25}$$

где $P_{k-2}(z)$ — некоторый многочлен $(k-2)$-й степени.

Кроме того ([3]),

$$[(z-1)^{-1};\ z_0 z_1 \ldots z_n] = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} (z_i - 1)^{-1}, \tag{26}$$

$$[(z-1)^{-2};\ z_0 z_1 \ldots z_n] = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} (z_i - 1)^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{n} (z_i - 1)^{-1}. \tag{27}$$

С учетом (25), (26) и (27) получаем

$$(-1)^n \prod_{i=0}^{n} (z_i - 1)[F(z);\ z_0 z_1 \ldots z_n] =$$

$$= \left[n+1 + \sum_{i=0}^{n} (z_i - 1)^{-1} \right](1+\eta) - 1. \tag{28}$$

Функция $\tau = (1+\eta)^{-1}$ отображает круг (24) на полуплоскость

$$\operatorname{Re} \tau \geqslant \frac{n+1}{2}. \tag{29}$$

В то же время при $|z_i| < 1$, $i=0, 1, \ldots, n$

$$\operatorname{Re} \left[n+1 + \sum_{i=0}^{n} (z_i - 1)^{-1} \right] < \frac{n+1}{2}. \tag{30}$$

Таким образом, при любом выборе чисел $|z_i| < 1$, $i=0, \ldots, n$ выражение (28) не равно нулю, если η лежит в круге (24). Если же η находится вне этого круга, то можно подобрать числа $|z_i| < 1$, $i=0, 1, \ldots, n$ так, чтобы правая часть (28) была равна нулю. Этим лемма 2 доказана.

Замечание 3. Если положить $\eta=\beta-1$ и разложить функцию $F(z)=z^n[1+(\beta-1)z]^{-2}$ по степеням z, то получим следующее утверждение.

Для того чтобы функция

$$F(z)=z^n+(1+\beta)z^{n+1}+(1+2\beta)z^{n+2}+\ldots,$$

коэффициенты которой образуют арифметическую прогрессию, принадлежала классу $\tilde{K}_n(E)$, необходимо и достаточно выполнение для β неравенства $|\beta-(n+1)^{-1}|\leqslant(n+1)^{-1}$.

8. Пусть $R(E)$ — некоторый класс функций, регулярных в единичном круге E и $|\zeta_i|\leqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, s$. Условимся через $R(E, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s)$ обозначать класс, состоящий из всех функций класса $R(E)$, регулярных в точках $|\zeta_i|=1$, $i=1, 2, \ldots, s$. Таким образом, $R(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_s)\subset R(E)$ и $R(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_s)\equiv R(E)$, если все $|\zeta_1|<1$, $i=1, \ldots, s$.

Из леммы 2 легко следует, что функция

$$\varphi_m(z)=\frac{z^m\left(1+\frac{1-m}{1+m}z\right)}{(1-z)^2} \tag{31}$$

принадлежит классу $\tilde{K}_m(E)$.

Рассмотрим функциональное уравнение

$$z^m\{z^{-m}F(z);\ z\zeta_1\ldots\zeta_{n-m}\}=\varphi_m(z),\ 0\leqslant m\leqslant n-1, \tag{32}$$

где

$$|\zeta_i|\leqslant 1,\ i=1, 2, \ldots, n-m. \tag{33}$$

Неизвестную функцию $F(z)$ ищем в классе $\tilde{K}_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$, предполагая, что она удовлетворяет условию

$$[z^{-m}F(z); 0\zeta_1\ldots\zeta_{n-m}]\neq 0.$$

Если $|\zeta_i|<1$, $i=1, \ldots, n-m$, то это условие выполнено для любой функции $F(z)\in\tilde{K}_n(E)$ (см. (9).

Теорема 7. *Пусть выполнено условие* (33) *и* $\zeta_i\neq 1$, $i=1, \ldots, n-m$. *Для того чтобы уравнение* (32) *имело решение* $F(z)$ *в классе* $\tilde{K}_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$ *необходимо и достаточно, чтобы все точки* ζ_i *лежали на единичной окружности. Для произвольно фиксированных на окружности* $|z|=1$ *точек* ζ_1, $\zeta_i\neq 1$, $i=1, 2, \ldots, n-m$ *уравнение* (32) *имеет в классе* $\tilde{K}_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$ *единственное решение*:

$$F(z)=\frac{z^n\left[1+\frac{1-m+e^{i\alpha}(2n-m-1)}{1+m-e^{i\alpha}(2n-m+1)}z\right]}{(1-z)^2}, \tag{34}$$

где α — *действительное число, определяемое из уравнения*

$$\Theta=\sum_{k=1}^{n-m}(\zeta_k-1)^{-1}=\frac{n-m}{e^{i\alpha}-1}. \tag{35}$$

Заметим, что при любом действительном α, $\exp(i\alpha)\neq 1$ на единичной окружности всегда найдутся точки ζ_i, $\zeta_i\neq 1$, $i=1, \ldots, n-m$, для которых имеет место (35).

Доказательство. Пусть некоторая функция $F(z)$ из класса $\tilde{K}_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$ удовлетворяет уравнению (32). Решая (32) относительно $F_n(z)$ с применением формул (1) и (6), получим

$$F(z)=\frac{(-1)^{n-m-1}P_{n-m-1}(0)\,z^m\left(1+\frac{1-m}{1+m}z\right)(z-\zeta_1)\ldots(z-\zeta_{n-m})+P_{n-m-1}(z)\,(1-z^2)\,z^m}{\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_{n-m}(1-z)^2}. \quad (36)$$

Так как $F(z)\in\tilde{K}_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$, то левая и правая части (36) должны содержать множитель z^m. Кроме того, числитель в правой части [36] есть многочлен $(n+1)$-й степени относительно z. Следовательно,

$$F(z)=\frac{z^n(1+\eta z)}{(1-z)^2}, \quad (37)$$

где η — некоторое число, зависящее от $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-m}$. Для определения η подставим в уравнение (32) функцию (37). Тогда, учитывая (31) и применяя формулы (1) и (28), после небольших преобразований получим

$$\frac{z^m\left[1-\frac{\Theta+n-m+\eta}{\Theta+n-m+1+\eta}\,\frac{(\Theta+n-m+1)}{(n-m+\Theta)}z\right]}{(1-z)^2}\equiv\frac{z^m\left(1+\frac{1-m}{1+m}z\right)}{(1-z)^2}, \quad (38)$$

где

$$\Theta=\sum_{i=1}^{n-m}\frac{1}{\zeta_i-1}, \quad |\zeta_i|\leqslant 1. \quad (39)$$

Теперь можно найти η из тождества (36):

$$\eta=-1+\frac{2}{2\Theta+2n-m+1}. \quad (40)$$

Как следует из (39) и (40), точка Θ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z\leqslant 0{,}5\,(m-n)$ O, а точка η лежит вне круга O,

$$0:\left|\,\eta+\frac{n}{n+1}\,\right|<\frac{1}{n+1}. \quad (41)$$

С другой стороны, так как функция (37), по предположению, принадлежит классу $\tilde{K}_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$ (и тем самым классу $\tilde{K}_n(E)$), то по лемме 2 точка η должна лежать в замкнутом круге O. Это вместе с (39), (40) и (41) показывает, что точка η лежит на окружности круга O, точка Θ лежит на прямой $\operatorname{Re} z=0{,}5\,(m-n)$ и все точки ζ_i лежат на единичной окружности. Следовательно, всегда найдется действительное число α, $\exp i\alpha\neq 1$, для которого справедливо равенство (35).

Пользуясь этим равенством, а также равенствами (40) и (37), выразим функцию $F(z)$ в виде (34).

Итак, мы доказали, что для любых фиксированных ζ_i, $|\zeta_i|=1$, $\zeta_i\neq 1$, $i=1, 2, \ldots, n-m$ в классе $\tilde{K}_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$ только функция (34) может быть решением уравнения (32). То, что эта функция действительно является решением уравнения (32), проверяется непосредственно.

Замечание 4. Легко установить, что если правая часть (32) имеет вид

$$\varphi_m(z)=\frac{z^m\left(1+\frac{1-m}{1+m}e^{i\gamma}z\right)}{(1-z)^2}, \quad \operatorname{Im}\gamma=0,$$

и $\zeta_l \neq e^{-i\gamma}$, то утверждение теоремы остается в силе с той лишь разницей, что в качестве функции (34) берется функция

$$F(z)=\frac{z^n\left[1+\dfrac{1-m+e^{i\alpha}(2n-m-1)}{1+m-e^{i\alpha}(2n-m+1)}\,e^{i\gamma}z\right]}{(1-z)^2},$$

где α — действительное число, определяемое из уравнения

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{1}{e^{i\gamma}\zeta_k-1}=\frac{n-m}{e^{i\alpha}-1}.$$

Обозначим через $\tilde{K}_{1,n}(E)$ класс всех функций $\Phi(z)$, представимых в виде

$$\Phi(z)=z\{z^{-1}F(z);\ z\zeta_1\ \dots\ \zeta_{n-1}\},$$

где

$$|\zeta_i|\leqslant 1,\ i=1,\ \dots,\ n-1,\ F(z)\in\tilde{K}_n(E,\ \zeta_1,\ \dots,\ \zeta_{n-1})$$

и

$$[z^{-1}F(z);\ 0\zeta_1\ \dots\ \zeta_{n-1}]\neq 0.$$

По следствию 1 и замечанию 2 любая такая функция $\Phi(z)$ является однолистной и нормированной условиями $\Phi(0)=0$, $\Phi'(0)=1$. Следовательно, модуль и второй коэффициент a_2 функции $\Phi(z)$ подчинены неравенствам

$$\frac{z}{(1+|z|)^2}\leqslant|\Phi(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{42}$$

$$|a_2|\leqslant 2. \tag{43}$$

Из теоремы 7 и замечания 4 к ней вытекает следствие 5.

Следствие 5. *При любом натуральном n оценки* (42) *и* (43) *для функции из класса* $\tilde{K}_{1,n}(E)$ *являются точными. Знаки равенства в* (42) *и* (43) *достигаются только для функции* $F(z)$ *из класса* $\tilde{K}_n(E,\zeta_1,\dots,\zeta_{n-m})$, *удовлетворяющей уравнению* (32) *при* $m=1$.

9. Как известно [7], для функции $F(z)$ из класса $L_n(E)$ справедливы неравенства

$$|z|^m\left(1-\frac{|z|}{m+1}\right)\leqslant|F(z)|\leqslant|z|^m\left(1+\frac{|z|}{m+1}\right),$$

причем знаки равенства реализуются функцией

$$\psi_m(z)=z^m\left(1+\frac{e^{i\alpha}z}{m+1}\right)$$

(α — действительное число), также принадлежащей классу $L_m(E)$. Такую функцию $\psi_m(z)$ назовем экстремальной по модулю функцией в классе $L_m(E)$. Заметим, что при любых $|\zeta_i|\leqslant 1$, $i=1,2,\dots,s$ функция $\psi_m(z)\in L_m(E,\zeta_1,\dots,\zeta_s)$ (см. 8).

Связь между экстремальными функциями $\psi_n(z)$ и $\psi_m(z)$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть n и m натуральные числа и* $|\zeta_i|\leqslant 1$, $i=1,\ \dots,\ n-m$. *Для того чтобы функциональное уравнение*

$$z^m\{z^{-m}F(z);\ z\zeta_1\ \dots\ \zeta_{n-m}\}=\psi_m(z), \tag{44}$$

где $\psi_m(z)=z^m\left(1+\frac{e^{i\alpha}z}{m+1}\right)$ *имело в классе* $L_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$ *решение* $F(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы все точки* ζ_i, $i=1, \ldots, n-m$ *совпадали и лежали на единичной окружности. Если* $\zeta_1=\zeta_2=\ldots=\zeta_{n-m}=-e^{-i\alpha}$, *то в классе* $L_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$ *единственным решением уравнения* (44) *является экстремальная в классе* $L_n(E)$ *функция*

$$\psi_n(z)=z^n\left(1+\frac{e^{i\alpha}z}{n+1}\right).$$

Доказательство. Пусть $F(z)$ есть решение уравнения (44) и $F(z)\in L_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$. Повторяя выкладки, приведенные при доказательстве теоремы 7, убедимся, что

$$F(z)=z^n(1+\eta z), \tag{45}$$

где η — некоторое комплексное число. Подставив функцию (45) в уравнение (44), найдем, что

$$\eta=\frac{e^{i\alpha}}{m+1-e^{i\alpha}(\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{n-m})}.$$

Так как по предположению $F(z)\in L_n(E)$, то непосредственно из определения класса $L_n(E)$ получаем

$$\left|\frac{e^{i\alpha}}{m+1-e^{i\alpha}(\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{n-m})}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

Последнее неравенство при $n>m$ и $|\zeta_i|<1$, $i=1, 2, \ldots, n-m$ возможно лишь в том случае, если

$$\zeta_1=\zeta_2=\ldots=\zeta_{n-m}=-e^{-i\alpha}, \tag{46}$$

и поэтому

$$F(z)=z^n\left(1+\frac{e^{i\alpha}z}{n+1}\right).$$

Нетрудно убедиться, что при условии (46) последняя функция принадлежит классу $L_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$ и удовлетворяет уравнению (44).

Обозначим через $L_{m,n}(E)$ класс всех функций $\Phi(z)$, представимых в виде

$$\Phi(z)=z^m\{z^{-m}F(z);\ z\zeta_1, \ \ldots, \ \zeta_{n-m}\},$$

где $|\zeta_i|\leqslant 1$, $F(z)\in L_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$.

По теореме 4 $L_{m,n}(E)\subset L_m(E)$, поэтому модуль функции $\Phi(z)\in L_{m,n}(E)$ и ее коэффициент a_{m+1} при z^{m+1} удовлетворяют неравенствам:

$$|z|^m\left(1-\frac{|z|}{m+1}\right)\leqslant\Phi(z)\leqslant|z|^m\left(1+\frac{|z|}{m+1}\right). \tag{47}$$

$$|a_{m+1}|\leqslant\frac{1}{m+1}. \tag{48}$$

Из теоремы 8 вытекает следствие 6.

Следствие 6. *Оценки* (47) *и* (48) *для функции из класса* $L_{m,n}(E)$ *являются точными. Знаки равенства в* (47) *и* (48) *достигаются для функции* $F(z)\in L_n(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m})$, *удовлетворяющей уравнению* (44).

10. В классе $P(E)$ многими экстремальными свойствами обладает функция $u(z)=z(1-e^{i\alpha}z)^{-1}$. Как следует из замечания 1, эта экстремальная функция

$u(z)$ при любом натуральном l и любых $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l$, не равных $\exp(-i\alpha)$, удовлетворяет уравнению

$$z\{z^{e-1}f(z);\ z\zeta_1 \ldots \zeta_e\} = u(z). \tag{49}$$

Предположим, что $\zeta_k \neq \exp(-i\alpha)$; $|\zeta_k| \leqslant 1$, $k=1, 2, \ldots, l$ и $f(z) \in P(E, \zeta_1, \ldots, \zeta_l)$. Тогда, если хотя бы в одной точке $z_0 \in E$ выполняется равенство (49), $f(z) \equiv u(z)$.

Действительно, по теореме 3 и дополнению к ней, левая часть (49) представляет собой функцию $H(z)$, принадлежащую классу $P(E)$. Так как $H(z_0) = u(z_0)$, то имеет место тождество (см. [4])

$$H(z) \equiv u(z).$$

Пользуясь тем же методом доказательства, что и в теоремах 7 или 8, получим $f(z) \equiv u(z) = z(1-e^{i\alpha}z)^{-1}$.

Вильнюсский инженерно-строительный институт

Поступило в редакцию 28.II.1971

Литература

1. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М.—Л., Гостехиздат, 1952.
2. Э. Г. Кирьяцкий, О функциях, n-я разделенная разность которых не равна нулю, Liet. matem. rink., I, № 1—2 (1961).
3. Э. Г. Кирьяцкий, Некоторые свойства функций, разделенная разность которых не равна нулю, Liet. matem. rink., II, № 1 (1962).
4. Э. Г. Кирьяцкий, Некоторые экстремальные задачи в классах $K_n(E)$ и $P(E)$, Liet. matem. rink., III, № 2 (1963).
5. Э. Г. Кирьяцкий, О функциях с разделенной разностью, отличной от нуля, Liet. matem. rink., III (1963).
6. Э. Г. Кирьяцкий, Некоторые экстремальные свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью, Liet. matem. rink., X, № 4 (1970).
7. Б. Е. Гопенгауз, О некоторых классах аналитических функций, Труды Томского университета, 189 (1966).
8. Б. Е. Гопенгауз, Несколько замечаний о функциях, имеющих положительную вещественную часть n-й производной, Труды Томского университета, 1969.

FUNKCIJŲ, KURIŲ PADALYTAS SKIRTUMAS NĖRA LYGUS NULIUI, KAI KURIOS SAVYBĖS

E. Kirjackis

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjamos analizinės vienetiniame skritulyje E funkcijos

$$F(z) = z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots,$$

kurių n-os eilės padalytas skirtumas $[F(z);\ z_0 z_1 \ldots z_n]$ nelygus nuliui, esant bet kuriems $z_0, z_1, \ldots, z_n \in E$. Tokių funkcijų klasę žymime $\tilde{K}_n(E)$ ($\tilde{K}_1(E)$ sutampa su normuotų ir vienalapių skritulyje E funkcijų klase).

Laisvai parinkę $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k \in E$, $1 \leqslant k < n$, pažymime

$$\{F(z);\ z\zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_k\} = \frac{[F(z);\ z\zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_k]}{[F(z);\ 0\zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_k]}$$

ir įrodome, kad

$$F(z;\ \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k) = z^{n-k}\{z^{-(n-k)}F(z);\ z\zeta_1 \ldots \zeta_k\} \in \tilde{K}_{n-k}(E),$$

jei $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$. Be to, nagrinėjame normuotų ir vienalapių funkcijų $F(z;\ \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ ekstremalines savybes.

EINIGE EIGENSCHAFTEN DER FUNKTIONEN, DIE KEINE NULLGLEICHE DIVIDIERTE DIFFERENZ BESITZEN

E. Kirjacky

(*Zusammenfassung*)

Es werden die im Einheitskreise E analytische Funktionen

$$F(z)=z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ \dots$$

betrachtet, wobei angenommen wird, daß ihre dividierte Differenz n-ter Ordnung $[F(z);\ z_0 z_1\ \dots\ z_n]$ für beliebige $z_0,\ z_1, \dots, z_n \in E$ nicht gleich Null ist. Die Klasse solcher Funktionen bezeichnen wir mit $\tilde{K}_n(E)$ ($\tilde{K}_1(E)$ ist offensichtlich mit der Klasse der im Bereiche E schlichten und normierten Funktionen identisch).

Für beliebige $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \dots,\ \zeta_k \in E,\ 1 \leqslant k < n$, bezeichnen wir

$$\{F(z);\ z\zeta_1\zeta_2\dots\zeta_k\}=\frac{[F(z);\ z\zeta_1\zeta_2\dots\zeta_k]}{[F(z);\ 0\zeta_1\zeta_2\dots\zeta_k]}$$

und beweisen daß

$$F(z;\ \zeta_1\ \dots\ \zeta_k)=z^{n-k}\{z^{-(n-k)}F(z);\ z\zeta_1\ \dots\ \zeta_k\} \in \tilde{K}_{n-k}(E),$$

wenn $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$. Außerdem untersuchen wir die Extremaleigenschaften der schlichten und normierten Funktionen $F(z;\ \zeta_1,\ \dots,\ \zeta_{n-1})$.