XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 511

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Э. Манставичюс

I. Рассмотрим вещественные мультипликативные арифметические функции $g(m)$. Через $\nu_n\{\ldots\}$ обозначим частоту натуральных чисел $m \leqslant n$, удовлетворяющих условиям, указанным в скобках вместо многоточия. Нас будет интересовать асимптотическое поведение функции распределения

$$\nu_n\{e^{-A_n}|g(m)|^{B_n}\operatorname{sgn} g(m) < x\}$$

при $n \to \infty$ с некоторыми нормирующими показателями A_n и B_n. В настоящей работе мы ограничимся двумя классами действительных мультипликативных функций. Для простых чисел p при $g(p) \neq 0$ положим $d_p = |\ln|g(p)| - a\ln p - \lambda|$. Будем считать, что $g(m)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_0^s(c, a, \lambda)$, если существуют действительные числа a, $c > 0$, $\lambda \neq 0$ и натуральное число $s \geqslant 1$ такое, что ряды

$$\sum_{g(p)\leqslant 0} \frac{\ln p}{p}, \qquad \sum_{\substack{g(p)>0 \\ d_p<c}} \frac{d_p \ln p}{p}, \qquad \sum_{\substack{g(p)>0 \\ d_p\geqslant c}} \frac{\ln p}{p}, \tag{1}$$

$$\sum_{g(p)\neq 0} \frac{d_p^s}{p}, \qquad \sum_{\substack{p \\ g(p^\alpha)\neq 0}} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|\ln|g(p^\alpha)||^s}{p^\alpha} \tag{2}$$

сходятся. Если для мультипликативной функции $g(m)$ вместо (1) сходятся ряды

$$\sum_{g(p)\geqslant 0} \frac{\ln p}{p}, \qquad \sum_{\substack{g(p)<0 \\ d_p<c}} \frac{d_p \ln p}{p}, \qquad \sum_{\substack{g(p)<0 \\ d_p\geqslant c}} \frac{\ln p}{p} \tag{3}$$

совместно с (2), тогда будем считать, что она является функцией класса $\mathfrak{M}_1^s(c, a, \lambda)$.

Как показано в статье [1], арифметические функции классов $\mathfrak{M}_k^1(c, a, \lambda)$ $(k=0, 1)$ удовлетворяют оценке

$$\nu_n(x) = \nu_n\left\{e^{-\frac{a\ln n + \lambda \ln\ln n}{|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}}} |g(m)|^{\frac{1}{|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}}} \operatorname{sgn} g(m) < x\right\} = \Phi(x) + \frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}},$$

где величина B ограничена константой, не зависящей от x и n, а

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\omega_0+\omega_1}{2} G(-\ln x), & \text{если } x > 0, \\ \dfrac{\omega_0-\omega_1}{2} G\Big(-\ln(-x)\Big), & \text{если } x < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь

$$\omega_k=\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) \qquad (k=0,\ 1) \tag{5}$$

и

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{6}$$

Заметим, что $\omega_1=0$, если $g(m)\in\mathfrak{M}_1^1(c,\ a,\ \lambda)$.

При некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на функции классов $\mathfrak{M}_k^s(c,\ a,\ \lambda)$ $(k=0,\ 1)$, получим дальнейшие члены асимптотического разложения функции распределения $\nu_n(x)$. Для весьма широкого класса вещественных аддитивных арифметических функций аналогичный результат был получен Й. Кубилюсом в работе [2], идеями которой мы неоднократно воспользуемся.

2. Условимся о некоторых обозначениях. Пусть $F(x)$ – любая функция распределения, а

$$\omega_{kF}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}{}' \,|x|^{it} \operatorname{sgn}^k x\, dF(x) \qquad (k=0,\ 1),$$

где штрих указывает, что точка $x=0$ при интегрировании исключается, – соответствующие ей характеристические преобразования. Положим

$$\beta_{0F}=1-F(+0)=\frac{1}{2}[\omega_{0F}(0)+\omega_{1F}(0)],$$

$$\beta_{1F}=F(0)=\frac{1}{2}[\omega_{0F}(0)-\omega_{1F}(0)].$$

Наша работа опирается на следующий аналог неравенства Эссеена.

Лемма 1. *Пусть* $F(x)$ *и* $H(x)$ *– функции распределения,* $I_0=(0,\ \infty)$, $I_1=(-\infty,\ 0)$,

$$L_0=\sup_{x\in I_0}|F(x)-H(x)|, \qquad L_1=\sup_{x\in I_1}|F(x)-H(x)|.$$

Тогда для любых $T>0$, $b>\frac{1}{2\pi}$ *и* $k=0,\ 1$

$$L_k\leqslant|\beta_{kF}-\beta_{kH}|+R_{kFH},$$

где $R_{kFH}=0$, *если* $\beta_{kF}\,\beta_{kH}=0$, *и*

$$R_{kFH}=\frac{\beta_{kF}bTA_k}{\beta_{kH}}+\frac{1}{2}\beta_{kF}b\int_{-T}^{T}|\Delta_{kFH}(t)|\frac{dt}{|t|},$$

$$A_k=\sup_{x\in I_k}\int_{|u|\leqslant\frac{c(b)}{T}}|H(xe^u)-H(x)|\,du,$$

$$\Delta_{kFH}(t)=\frac{\omega_{0F}(t)+(-1)^k\omega_{1F}(t)}{B_{kF}}-\frac{\omega_{0H}(t)+(-1)^k\omega_{1H}(t)}{\beta_{kH}}$$

в случае $\beta_{kF}\beta_{kH}\neq 0$. *Константа* $c(b)$ *связана с* b *равенством*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}c(b)} \frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8b}.$$

Доказательство см. в [3].

Приведенная лемма дает возможность по близости характеристических преобразований судить о близости функций распределения. Поэтому сначала рассмотрим функции $\omega_{k\nu_n}(t)$. Здесь и в дальнейшем, где этого не указывается, k принимает оба значения 0 и 1.

Положим для краткости $a_n=a\ln n+\lambda\ln\ln n$ и $\sigma=|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}$. Обозначим $g_1(m)=g(m)\,m^{-a}$. Через $c_0, c_1, c_2, \ldots$ обозначим положительные константы, B – величина, не всегда одна и та же, но всегда ограниченная. Тогда

$$\omega_{k\nu_n}(t)=\exp\left\{-it\,\frac{a_n}{\sigma}\right\}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}|g(m)|^{\frac{it}{\sigma}}\operatorname{sgn}^k g(m). \tag{7}$$

Положим

$$h_{kn}(t)=\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}|g(m)|^{it}\operatorname{sgn}^k g(m).$$

В дальнейшем используем следующую аналитическую лемму, доказанную в работе [1].

Лемма 2. *Пусть* $f(m)$ *– комплексная мультипликативная функция,* $|f(m)|\leqslant 1$. *Предположим, что существуют действительные числа* $\mathfrak{a}$ *и* $c_1>0$, *комплексное число* $\varkappa$, *не зависящие от* p, *такие, что*

$$\sum_p |f(p)p^{-i\mathfrak{a}}-\varkappa|\,\frac{\ln p}{p}<c_1.$$

Тогда при $n\geqslant 3$

$$\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} f(m)=\frac{n^{i\mathfrak{a}}(\ln n)^{\varkappa-1}}{(1+i\mathfrak{A})\,\Gamma(\varkappa)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varkappa}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha(1+i\mathfrak{a})}}\right)+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}.$$

Бесконечное произведение сходится абсолютно. B *ограничена константой, зависящей лишь от* c_1. *Здесь* $\Gamma(\varkappa)$ *– гамма-функция Эйлера.*

Если $g(m)\in\mathfrak{M}_0^s(c, a, \lambda)$, то функции $h_{kn}(t)$ удовлетворяют условию леммы 2 с $\mathfrak{a}=at$ и $\varkappa=e^{i\lambda t}$ равномерно для каждой окрестности $|t|\leqslant T$. Поэтому

$$h_{kn}(t)=\frac{n^{iat}(\ln n)^{e^{it\lambda}-1}}{(1+iat)\,\Gamma(e^{it\lambda})}\psi_k(it)+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}, \tag{8}$$

где

$$\psi_k(it)=\prod_p\psi_{kp}(it)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{e^{it\lambda}}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\frac{|g_1(p^\alpha)|^{it}\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)\right),$$

причем B в (8) ограничена равномерно для каждого $|t|\leqslant T$. Из (7) и (8) получаем, что

$$\omega_{k\nu_n}(t)=\frac{\exp\left\{-it\,\frac{\sigma}{\lambda}+\frac{\sigma^2}{\lambda^2}\left(e^{\frac{it\sigma}{\lambda}}-1\right)\right\}}{\left(1+\frac{iat}{\sigma}\right)\Gamma\left(e^{\frac{it\lambda}{\sigma}}\right)}\,\psi_k\left(\frac{it}{\sigma}\right)+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}. \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть* $g(m)\in\mathfrak{M}_0^s(c, a, \lambda)$, *тогда для* $k=0, 1$, *при достаточно малой константе* c_2 и $|t|\leqslant c_2\sigma$

$$\omega_{k\nu_n}(t)=\omega_{k\nu_n}(0)e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{P_{kr}(it)}{\sigma^r}+B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^s(1+t^2)^s e^{-\frac{t^2}{4}}+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}, \tag{10}$$

$$\omega_{k\nu_n}(0)=\omega_k+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}, \tag{11}$$

где ω_k *определены* в (5), $P_{k0}(z)\equiv 1$, а $P_{kr}(z)$ $(r=1, 2, \ldots, s-1)$ — *полиномы степени* $3r$ *с коэффициентами, зависящими от функции* $g(m)$.

Доказательство. Сначала в формуле (9) разложим

$$\psi_k(it)=\prod_{p\leqslant c_0}\psi_{kp}(it)\exp\left\{\sum_{p>c_0}\ln\psi_{kp}(it)\right\},$$

где константа c_0 достаточно большая. Тогда, очевидно, $\psi_{kp}(it)\neq 0$ $(p>c_0)$. Опираясь на равенство

$$e^{iu}=\sum_{r=0}^{s-1}\frac{(iu)^r}{r!}+\Theta\frac{|u|^s}{s!},$$

где u — действительная переменная и $|\Theta|\leqslant 1$, нетрудно получить разложение конечного произведения функций

$$\prod_{p\leqslant c_0}\psi_{kp}(it)=\prod_{p\leqslant c_0}\psi_{kp}(0)+\sum_{r=1}^{s-1}\mu_{kr}(it)^r+\mu_{ks}t^s \tag{12}$$

при $|t|\leqslant c_3$. Условия (1) и (2) гарантируют $|\mu_{kr}|<c_4$ $(r=1, \ldots, s)$.

В дальнейшем используем метод работы [2]. При $p>c_0$ рассмотрим три случая.

1) $g(p)<0$. После очевидных преобразований получаем

$$\ln\psi_{kp}(it)=(e^{it\lambda}-1)\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\ln\left[\psi_{kp}(0)+\left(1-\frac{1}{p}\right)\times\right.$$

$$\times\left[\frac{(-1)^k e^{it\lambda}(e^{it\ln|g_1(p)|-\lambda}-1)}{p}+\frac{(-1)^k(e^{it\lambda}-1)}{p}\right]+$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{(e^{it\ln|g_1(p^\alpha)|}-1)\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right]=$$

$$=\ln\psi_{kp}(0)+\sum_{r=1}^{s-1}\delta_{kpr}(it)^r+\delta_{kps}t^s. \tag{13}$$

Коэффициенты δ_{kpr} $(r=1, 2, \ldots, s)$ оценим в дальнейшем.

Положим

$$A_p = \max(a_p,\ a_p^s),\qquad C_p = \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1+|\ln|g_1(p^\alpha)||^s}{p^\alpha},$$

$$A = \sum_p \frac{A_p}{p},\qquad C = \sum_p C_p,\qquad \eta = 20\max(|\lambda|,\ A,\ C).$$

Введем функции

$$\ln\tilde{\psi}_{kp}(z) = -(e^z-1)\ln\left(1-\frac{1}{p}\right) - \ln\left[1 - \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)(e^z-1)A_p e^z}{p\psi_{kp}(0)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)(e^z-1)}{p\psi_{kp}(0)} - \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)C_p(e^z-1)}{\psi_{kp}(0)}\right].$$

При c_0 достаточно большом, воспользовавшись неравенствами

$$|e^z-1|\leqslant 2|z|,\quad \text{если}\quad |z|\leqslant\frac{1}{2},$$

$$-\ln(1-x)\leqslant 2x,$$

где действительное число $x\leqslant\frac{1}{2}$, получим

$$|\ln\tilde{\psi}_{kp}(z)|\leqslant\frac{1}{p}+\frac{A_p}{p}+C_p,$$

если $|z|\leqslant\eta^{-1}$.

2) $g(p)=0$. Как и в первом случае,

$$\ln\psi_{kp}(it) = (e^{it\lambda}-1)\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\ln\psi_{kp}(0)+$$

$$+\ln\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\psi_{kp}(0)}\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{(e^{it\ln|g_1(p^\alpha)|}-1)\,\mathrm{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right]=$$

$$=\ln\psi_{kp}(0)+\sum_{r=1}^{s-1}\delta_{kpr}(it)^r+\delta_{kps}t^s. \tag{14}$$

Аналогично для тех же p, если

$$\ln\tilde{\psi}_{kp}(z) = -(e^z-1)\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\ln\left[1-\frac{1-\frac{1}{p}}{\psi_{kp}(0)}C_p(e^z-1)\right],$$

то при $|z|\leqslant\eta^{-1}$ оценивается

$$|\ln\tilde{\psi}_{kp}(z)|\leqslant\frac{1}{p}+C_p.$$

3) $g(p)>0$. После более сложных преобразований получаем

$$\ln\psi_{kp}(it)=(e^{it\lambda}-1)\left[\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right]+\left[\ln\left(1+\frac{e^{it\lambda}-1}{p}\right)-\frac{e^{it\lambda}-1}{p}\right]+$$

$$+\ln\frac{1}{1+\dfrac{e^{it\lambda}-1}{p}}\left[\psi_{kp}(0)+\frac{e^{it\lambda}-1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{e^{it\lambda}(e^{it(\ln g_1(p)-\lambda)}-1)}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{(e^{it\ln|g_1(p^\alpha)|}-1)\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right]=(e^{it\lambda}-1)\left[\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right]+$$

$$+\left[\ln\left(1-\frac{e^{it\lambda}-1}{p}\right)-\frac{e^{it\lambda}-1}{p}\right]+\ln\left[\psi_{kp}(0)-\frac{\left(\psi_{kp}(0)-1\right)(e^{it\lambda}-1)}{p\left(1+\dfrac{e^{it\lambda}-1}{p}\right)}-\right.$$

$$-\frac{e^{it\lambda}-1}{p^2\left(1+\dfrac{e^{it\lambda}-1}{p}\right)}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{e^{it\lambda}(e^{it(\ln g_1(p)-\lambda)}-1)}{p\left(1+\dfrac{e^{it\lambda}-1}{p}\right)}+$$

$$\left.+\frac{\left(1-\dfrac{1}{p}\right)}{1+\left(\dfrac{e^{it\lambda}-1}{p}\right)}\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{(e^{it\ln|g_1(p^\alpha)|}-1)\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right]=\ln\psi_{kp}(0)+$$

$$+\sum_{r=1}^{s-1}\delta_{kpr}(it)^r+\delta_{kps}t^s. \tag{15}$$

Так как в этом случае

$$\psi_{kp}(0)-1=\frac{1}{p^2}\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)-\operatorname{sgn}^k g(p^{\alpha-1})}{p^{\alpha-2}}\leqslant\frac{4}{p^2},$$

то вспомогательную функцию введем следующим образом:

$$\ln\tilde{\psi}_{kp}(z)=-(e^z-1)\left[\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right]-\left[\ln\left(1-\frac{e^z-1}{p}\right)+\frac{e^z-1}{p}\right]-$$

$$-\ln\left[1-\frac{4(e^z-1)}{p^3\left(1-\dfrac{e^z-1}{p}\right)\psi_{kp}(0)}-\frac{\left(1-\dfrac{1}{p}\right)e^z(e^z-1)A_p}{\psi_{kp}(0)p\left(1-\dfrac{e^z-1}{p}\right)}-\frac{e^z-1}{p^2\psi_{kp}(0)\left(1-\dfrac{e^z-1}{p}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(1-\dfrac{1}{p}\right)(e^z-1)C_p}{\psi_{kp}(0)\left(1-\dfrac{e^z-1}{p}\right)}\right].$$

При $|z|\leqslant\eta^{-1}$ получаем оценку

$$|\ln\psi_{kp}(z)\leqslant\frac{1}{p^2}+\frac{A_p}{p}+C_p.$$

Пусть

$$\ln\tilde{\psi}_k(z)=\sum_{p>c_0}\ln\tilde{\psi}_{kp}(z)=\sum_{r=1}^{s-1}\tilde{\delta}_{kr}z^r+\delta_{ks}z^s.$$

и

$$\delta_{kr}=\sum_{p>c_0}\delta_{kpr}\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Из определения функций $\tilde\psi_k(z)$ видно, что

$$|\delta_{kr}|\leqslant\sum_{p>c_0}|\delta_{kpr}|\leqslant\tilde\delta_{kr}\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Так как

$$|\ln\tilde\psi_k(z)|\leqslant\sum_{g(p)\leqslant 0}\frac{1}{p}+\sum_p\frac{1}{p^2}+\sum_{g(p)\neq 0}\frac{A_p}{p}+\sum_p C_p<c_6$$

при $|z|\leqslant\eta^{-1}$, то, воспользовавшись интегральной теоремой Коши, легко получить

$$\begin{aligned}&\delta_{kr}\leqslant c_7\eta^r\\&\delta_{ks}\leqslant 2c_7\eta^s,\end{aligned}\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1),$$

когда $|z|\leqslant\frac{1}{2\eta}$.

Учитывая эти оценки, из (13), (14) и (15) получим разложение

$$\sum_{p>c_0}\ln\psi_{kp}(it)=\ln\prod_{p>c_0}\psi_{kp}(0)+\sum_{r=1}^{s-1}\delta_{kr}(it)^r+\delta_{ks}t^s,$$

где $|\delta_{kr}|\leqslant c_7\eta^r\ (r=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$ и $|\delta_{ks}|\leqslant 2c_7\eta^s$, если $|t|\leqslant\frac{1}{2\eta}$.

Известные свойства гамма-функции Эйлера дают разложение

$$\ln\frac{1}{(1+iat)\,\Gamma(e^{it\lambda})}=\sum_{r=1}^{s-1}\gamma_r(it)^r+\gamma_s t^s,$$

где $|\gamma_r|\leqslant c_8\eta^r\ (r=1,2,\ldots,s-1)$ и $|\gamma_s|\leqslant 2c_8\eta^s$ при $|t|\leqslant\frac{1}{2\eta}$.

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi_{kn}(it)=-\frac{it\sigma}{\lambda}+\frac{\sigma^2}{\lambda^2}\left(e^{\frac{it\lambda}{\sigma}}-1\right)+\frac{t^2}{2}+\ln\frac{\prod\limits_{p>c_0}\psi_{kp}(it)}{\left(1+\frac{iat}{\sigma}\right)\Gamma\left(e^{\frac{it\lambda}{\sigma}}\right)}-$$

$$-\sum_{p>c_0}\ln\psi_{kp}(0)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(it)^{j+2}\lambda^j}{(j+2)!\,\sigma^j}+\sum_{r=1}^{s-1}\vartheta_{kr}\left(\frac{it}{\sigma}\right)^r+R\left(\frac{t}{\sigma}\right)^s,$$

где $\vartheta_{kr}=\delta_{kr}+\gamma_r$ и $|\vartheta_{kr}|\leqslant c_9\eta^r\ (r=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$ и $|R|\leqslant 2c_9\eta^s$ при $|t|\leqslant\frac{1}{2\eta}$. Используя эти оценки и повторяя рассуждения работ [2] и [4], можно получить не только разложение для функций $\exp\{\varphi_{kn}(it)\}$, но и оценку

$$\exp\{\varphi_{kn}(it)\}=\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\hat P_{kr}(it)}{\sigma^r}+B(1+t^2)\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^s e^{\frac{t^2}{4}}\tag{16}$$

при $|t|\leqslant c_{10}\sigma$. Здесь $\hat P_{k0}(z)\equiv 1$, а $\hat P_{kr}(z)\ (r=1,\ \ldots,\ s-1)$ — многочлены степени $3r$, коэффициенты которых зависят от значений функций $g(m)$, когда простые делители m больше c_0.

Из (9), (12) и (16) следует, что

$$\omega_{k\nu_n}(t)=\prod_p \psi_{kp}(0)e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{P_{kr}(it)}{\sigma^r}+B(1+t^2)\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^s e^{-\frac{t^2}{4}}+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}$$

с многочленами $P_{kr}(z)$, указанными в формулировке леммы. Так как по определению $\omega_k=\prod_p \psi_{kp}(0)$, то, в частности,

$$\omega_{k\nu_n}(0)=\omega_k+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}.$$

Лемма доказана, подсчитаем только

$$P_{k1}(z)=z\left(\frac{\lambda z^2}{6}+b_k\right),$$

где

$$b_k=\sum_p\left[\lambda\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1-\frac{1}{p}}{\psi_{kp}(0)}\sum_{\substack{\alpha=1\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{\ln|g_1(p^\alpha)|\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right]+\gamma\lambda-a.$$

Если $\psi_{1p}(0)=0$, считаем, что

$$\frac{\omega_1}{\psi_{1p}(0)}=\prod_{q\neq p}\psi_{1g}(0).$$

Здесь γ — постоянная Эйлера.

Вычисление следующих многочленов также не составляет трудности.

Лемма 4. *Если $g(m)\in\mathfrak{M}_1^s(c, a, \lambda)$, тогда характеристические преобразования функции распределения*

$$\nu_n(x)=\nu_n\{e^{-\frac{an}{\sigma}}|g(m)|^{\frac{1}{\sigma}}\operatorname{sgn} g(m)<x\}$$

равны

$$\omega_{0\nu_n}(t)=\omega_{0\nu_n}(0)e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{P_{0r}(it)}{\sigma^r}+B(1+t^2)\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^s e^{-\frac{t^2}{4}}+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}, \tag{17}$$

где $P_{0r}(z)$ — многочлены, определенные в лемме 3, и

$$\omega_{1\nu_n}(t)=B\frac{\sigma}{\sqrt{\ln n}} \tag{18}$$

при $|t|\leqslant c_{11}\sigma$, c_{11} — достаточно малая постоянная. Кроме того,

$$\omega_{k\nu_n}(0)=\omega_k+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}, \tag{19}$$

где ω_0 определено в (5), а $\omega_1=0$.

Доказательство формулы (17) проделано в лемме 3. Оценку (18) легко получить, используя лемму 2. Если $\mathfrak{a}=at$, $\varkappa=-e^{i\lambda t}$ и $g(m)\in\mathfrak{M}_1^s(c, a\ \lambda)$, то

$$\sum_p\left|-|g(p)|^{it}p^{-iat}+e^{i\lambda t}\right|\frac{\ln p}{p}<c_{12}$$

равномерно в каждом интервале $|t|\leqslant T$, причем T — любое положительное число. Поэтому

$$\omega_{1\nu_n}(t)=\frac{\exp\left\{-it\frac{\sigma}{\lambda}+\frac{\sigma^2}{\lambda^2}(-e^{\frac{it\lambda}{\sigma}}-1)\right\}}{\left(1+\frac{iat}{\sigma}\right)\Gamma(e^{\frac{it\lambda}{\sigma}})}\hat{\psi}_1\left(\frac{it}{\sigma}\right)+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}$$

равномерно по $|t|\leqslant T$. Здесь

$$\hat{\psi}_1(it)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-e^{it\lambda}}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|g_1(p^\alpha)|^{it}\operatorname{sgn} g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)=B.$$

Формула (18) следует из оценки

$$\exp\left\{-it\frac{\sigma}{\lambda}+\frac{\sigma^2}{\lambda^2}(-e^{\frac{it\lambda}{\sigma}}-1)\right\}=\frac{\exp\left\{-2it\frac{\sigma}{\lambda}+\Theta\frac{t^2}{2}\right\}}{\ln^2 n}=\frac{B}{\sqrt{\ln n}},$$

если $(t)\leqslant c_{11}\sigma$. И наконец (19) получается из (17) и (18).

Лемма 5. *Пусть* $g(m)\in\mathfrak{M}_j^s(c,\ a,\ \lambda)$ $(j=0,\ 1)$ *и* $k=0,\ 1$, *тогда для* $|t|\leqslant\pi\sigma$

$$\omega_{k\nu_n}(t)=Be^{-\frac{t^2}{12}} \tag{20}$$

и

$$\omega_{k\nu_n}(t)=\omega_{k\nu_n}(0)+\frac{B|t|\ln n}{\sigma} \tag{21}$$

для всех t.

Формулы (20) и (21) доказываются как и аналогичные оценки в работах [4] и [1] соответственно.

3. В дальнейшем ограничимся вещественными мультипликативными функциями классов $\mathfrak{M}_k^s(c,\ a,\ \lambda)$ $(k=0,\ 1)$, принимающими значения из некоторой геометрической прогрессии $bq^{f(m)}$ (здесь $q\neq 0$, а случай $q=1$ исключается условием $\lambda\neq 0$). Нетрудно убедиться, что $b=1$, а $f(m)$ — вещественная целозначная аддитивная функция. Так как тогда $g(m)\neq 0$, то $\omega_0=1$, хотя мы используем и само обозначение ω_0.

Положим для $k=0,\ 1$ и $r=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1$

$$Q_{kr}(it)=\sum_{l=0}^{r}\frac{P_{kl}(it)}{\sigma^l},$$

$$\Omega_{kr}(it)=\frac{1}{2}\left[Q_{or}(it)+(-1)^k\omega_1 Q_{1r}(it)\right],$$

где, как уже отмечалось, $\omega_1=0$, если $g(m)\in\mathfrak{M}_1^s(c,\ a,\ \lambda)$. Пусть

$$V_{kr}(y)=\frac{1-\omega_1}{2}+(-1)^k\,\Omega_{kr}\Big(-G(y)\Big),$$

где $\Omega_{kr}(-G(y))$ получается из $\Omega_{kr}(-z)$ путем замены z^j $(j=0,\ 1,\ \ldots)$ на $G^{(j)}(y)$. В точках $y=ln\,|\,x\,|$, если $x\neq 0$, введем функции и их производные

$$V_r^{(j)}(\ln|x|)=\begin{cases} V_{0r}^{(j)}(\ln x) & \text{при } x>0,\\ V_{1r}^{(j)}(\ln(-x)) & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Очевидно, что для рассматриваемых мультипликативных функций $V_0(\ln|x|)=\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ определена в (4). Используя известное свойство нормального закона (см., напр., [5] стр. 178)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\Big[\Omega_{kr}\Big(-G(x)\Big)\Big]^{(j)}=(-it)^j\,\Omega_{kr}(it)\,e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots), \qquad (22)$$

подсчитаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}' |x|^{it}\operatorname{sgn}^k x\,dV_r^{(j)}(\ln|x|)=(-1)^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\,dV_{1r}^{(j)}(y)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\,dV_{0r}^{(j)}(y)=\omega_k(-it)^j\,Q_{kr}(it)\,e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (23)$$

$$(j=0,\ 1,\ \ldots;\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1).$$

Пусть $E_0(u)\equiv -1$ и

$$E_r(u)=(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\sum_{l=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi ilu}}{(2\pi il)^r} \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots),$$

где штрих указывает, что член с $l=0$ в суммах опускается, периодические функции, выступающие в формулах суммирования Эйлера-Маклорена. Положим $h=\ln|q|$, где q — основание вышеуказанной геометрической прогрессии, и $\bar a_n=\frac{a_n}{h}$, $\bar\sigma=\frac{\sigma}{h}$.

Для $r=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1$ введем функции

$$W_r(x)=(-1)^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}}E_r(\bar a_n+\bar\sigma\ln|x|)\,V_{s-1-r}^{(r)}(\ln|x|),$$

если $x\neq 0$. Очевидно, из (23) имеем

$$\chi_{k0}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}{}' |x|^{it}\operatorname{sgn}^k x\,dW_0(x)=\omega_k Q_{k,s-1}(it)\,e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Используя (22) и возможность почленного интегрирования рядов Фурье, при $r\geqslant 1$ получим

$$\chi_{kr}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}{}' |x|^{it}\operatorname{sgn}^k x\,dW_r(x)=(-1)^{k+1+\frac{(r-1)(r-2)}{2}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\,dE_r(\bar a_n+\bar\sigma y)\,V_{1,s-1-r}^{(r)}(y)+(-1)^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}dE_r(\bar a_n+\bar\sigma y)\,V_{0,s-1-r}^{(r)}(y)=(-1)^{k+r}(it)\times$$

$$\times\sum_{l=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi il\bar a_n}}{(2\pi il)^r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+2\pi l\bar\sigma)y}\Big[\Omega_{1,s-1-r}\Big(-G(y)\Big)\Big]^{(r)}dy+(-1)^r it\ \times$$

$$\times \sum_{l=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i l \bar{a}_n}}{(2\pi i l)^r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+2\pi l \sigma) y}\left[\Omega_{0,s-1-r}\left(-G(y)\right)\right]^{(r)} dy = -\omega_k t \times$$

$$\times \sum_{l=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i l a_n}}{(2\pi l)^r} (t+2\pi l\bar{\sigma})^{r-1} Q_{k,s-1-r}(it+2\pi i l\bar{\sigma}) e^{-\frac{(t+2\pi l\bar{\sigma})^2}{2}}. \qquad (24)$$

Теперь можно приступить к асимптотике функции распределения $\nu_n(x)$ при $n\to\infty$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть действительная мультипликативная функция $g(m)$ принимает значения из геометрической прогрессии $q^{f(m)}$, где $q\neq 0$ и $f(m)$ — целые числа. Если существуют действительные константы a, $c>0$, $\lambda\neq 0$ и натуральное число $s\geqslant 1$ такое, что ряды* (1) *и* (2) *или* (2) *и* (3) *сходятся, тогда при $x\neq 0$*

$$\nu_n(x)=\nu_n\{e^{-\frac{a\ln n+\lambda\ln\ln n}{|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}}}|g(m)|^{\frac{1}{|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}}}\operatorname{sgn} g(m)<x\}=$$

$$=\sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}}\left(\frac{\ln|q|}{|\lambda|}\right)^r \frac{E_r\left(\frac{a\ln n+\ln\ln n}{\ln|q|}+\frac{|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}}{\ln|q|}\ln|x|\right)}{(\ln\ln n)^{\frac{r}{2}}}\times$$

$$\times V_{s-1-r}^{(r)}(\ln|x|)+\frac{B\ln\ln\ln n}{(\ln\ln n)^{\frac{s}{2}}} \qquad (25)$$

и

$$\nu_n(0)=\frac{1-\omega_1}{2}+\frac{B\sqrt{\ln\ln n}}{\sqrt{\ln n}},\qquad \nu_n(+0)=\frac{1-\omega_1}{2}+\frac{B\sqrt{\ln\ln n}}{\sqrt{\ln n}}, \qquad (26)$$

где B ограничена равномерно по x и n. Функции $E_r(u)$, $V_r(y)$ $(r=0, 1, \ldots, s-1)$ и ω_1 определены выше.

Заметим, что в случае $g(m)\in\mathfrak{M}_0^s(c, a, \lambda)$ теорема ранее была сформулирована в работе [6]. При $q>0$, переходя к вещественным аддитивным функциям, получаем теорему Й. Кубилюса [2] с незначительным обобщением.

Доказательство. Положим

$$\Psi(x)=\sum_{r=0}^{s-1}\frac{W_r(x)}{\bar{\sigma}^r},$$

тогда при $k=0, 1$

$$\omega_{k\Psi}(t)=\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\chi_{kr}(t)}{\bar{\sigma}^r}.$$

Пусть $g(m)\in\mathfrak{M}_0^s(c, a, \lambda)$. Достаточно оценить разности $\nu_n(x)-\Psi(x)$ для $x>0$, когда $g(m)>0$, и для всех x, когда $g(m)\lesseqgtr 0$. В первом случае $\omega_1=1$ и $\Omega_{1r}(it)\equiv 0$, поэтому $\nu_n(x)=\Psi(x)\equiv 0$, если $x<0$. Во втором случае $\omega^{\mathrm{I}}\neq 1$, поэтому

$$\beta_{k\Psi}=\frac{1}{2}[\omega_{0\Psi}(0)+(-1)^k\omega_{1\Psi}(0)]=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^k}{2}\omega_1>0.$$

Так как из (11) имеем

$$\beta_{k\nu_n}=\beta_{k\Psi}+\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}},$$

то $\beta_{k\nu_n}>0$ при $n>c_{12}$. Кроме того, это равенство доказывает оценки (26).

Заметим, что в определении $\Psi(x)$ коэффициенты ω_k стоят в качестве множителей при функции распределения $G(y)$ и ее производных, поэтому замена ω_k на $\omega_{k\nu_n}(0)$ дает нам новую функцию $\tilde{\Psi}(x)$, которая по оценке (11) будет отличаться от $\Psi(x)$ на $\frac{B\sigma}{\sqrt{\ln n}}$ для всех x.

Остается оценить разность $\nu_n(x)-\tilde{\Psi}(x)$. Все функции после вышеуказанной замены обозначим соответствующими буквами с волной. В силу леммы 1 и вышесказанного приходится оценивать $R_{k\nu_n\tilde{\Psi}}$ лишь в случаях, когда $\beta_{k\nu_n}\beta_{k\tilde{\Psi}}>0$.

Положим теперь $\mu=\left[\frac{h}{2}\sigma^{s-1}\right]$, где $[u]$ означает целую часть числа u, и $T=\pi\sigma\left(1+\frac{2\mu}{h}\right)$. Оценка первого члена в $R_{k\nu_n\tilde{\Psi}}$ в лемме 1 следует из того, что $A_k=B/T^2$, когда $H(x)=\tilde{\Psi}(x)$. Рассмотрим интегралы

$$I_k=\int_{-T}^{T}|\Delta_{k\nu_n\tilde{\Psi}}(t)|\frac{dt}{|t|}=\sum_{j=-\mu}^{\mu}\int_{\pi\sigma\left(\frac{2j}{h}-1\right)}^{\pi\sigma\left(\frac{2j}{h}+1\right)}|\Delta_{k\nu_n\tilde{\Psi}}(t)|\frac{dt}{|t|}=$$

$$=\sum_{j=-\mu}^{\mu}\int_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma}|\Delta_{k\nu_n\tilde{\Psi}}(t+2\pi j\bar{\sigma})|\frac{dt}{|t+2\pi j\bar{\sigma}|}=\sum_{j=-\mu}^{\mu}I_{kj}.$$

Так как

$$\Delta_{k\nu_n\tilde{\Psi}}(t)\leqslant\frac{1}{\beta_{k\nu_n}}\left(|\omega_{0\nu_n}(t)-\omega_{0\tilde{\Psi}}(t)|+|\omega_{1\nu_n}(t)-\omega_{1\tilde{\Psi}}(t)|\right),$$

то достаточно оценивать интегралы

$$I_{kj}=\int_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma}|\omega_{k\nu_n}(t+2\pi j\bar{\sigma})-\omega_{k\tilde{\Psi}}(t+2\pi j\bar{\sigma})|\frac{dt}{|t+2\pi j\bar{\sigma}|},$$

где $k=0,\ 1$ и $j=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm\mu$.

Для рассматриваемых мультипликативных функций справедливо

$$|g(m)|^{\frac{2\pi i j}{h}}=1,$$

поэтому из (7) следует

$$\omega_{k\nu_n}(t+2\pi j\bar{\sigma})=e^{-2\pi i j\bar{a}_n}\omega_{k\nu_n}(t).$$

Теперь

$$I_{kj}=\int_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma}|e^{-2\pi i j\bar{a}_n}\omega_{k\nu_n}(t)-\omega_{k\tilde{\Psi}}(t+2\pi j\bar{\sigma})|\frac{dt}{|t+2\pi j\bar{\sigma}|}.$$

В леммах 3 и 5 были получены все необходимые оценки для дальнейших вычислений, которые по существу уже проделаны в работе [2]. Поэтому здесь мы дадим лишь набросок.

Оценка интегралов I_{k0} ($k=0$, 1) проводится отдельно по областям $|t|\leqslant \frac{1}{\sigma^s \ln n}$, $1/\sigma^s \ln n<|t|\leqslant c_2\sigma$ и $c_2\sigma<|t|\leqslant\pi\sigma$ с использованием соответствующих лемм и легко получаемых из (24) оценок

$$\sum_{r=1}^{s-1} \frac{\tilde{\chi}_{kr}(t)}{\sigma^r}=\frac{B|t|}{\sqrt{\ln n}}$$

при $|t|\leqslant\pi\sigma$,

$$\omega_k\tilde{\Psi}(t)=\omega_{k\nu_n}(0)+\frac{B|t|}{\sigma},$$

когда $|t|\leqslant\frac{1}{\sigma^s \ln n}$, и

$$\omega_k\tilde{\Psi}(t)=\frac{B\sigma^{3s-4}}{(\ln n)^{\frac{(c_2|\lambda|)^2}{2}}}+\frac{B|t|}{\sqrt{\ln n}},$$

если $c_2 r<t\leqslant\pi\sigma$.

Получаем

$$I_{k0}=\frac{B}{\sigma^s}.$$

При $j\neq0$ интегралы

$$I_{kj}=\int\limits_{|t|\leqslant c_2\sigma}+\int\limits_{c_2\sigma<t\leqslant\pi\sigma}|e^{-2\pi ij\bar{a}_n}\omega_{k\nu_n}(t)-\omega_k\tilde{\Psi}(t+2\pi j\bar{\sigma})\frac{dt}{|t+2\pi j\bar{\sigma}|}=I'_{kj}+I''_{kj}.$$

Как и в [2], из (24) получаем

$$\omega_k\tilde{\Psi}(t+2\pi j\bar{\sigma})=\omega_{k\nu_n}(0)e^{-2\pi ij\bar{a}_n-\frac{t^2}{2}}Q_{k,s-2}(it)+Be^{-\frac{t^2}{2}}\frac{(|t|^{s-1}+|t|^{3s-3})}{|j|\sigma^{s-1}}+$$
$$+\frac{B|t+2\pi j\bar{\sigma}|}{\sqrt{\ln n}},$$

что совместно с леммой 3 дает оценку

$$I'_{kj}=\frac{B}{|j|\sigma^s}.$$

Воспользовавшись еще раз (27) и леммой 5, получим

$$I''_{kj}=\frac{B}{j\sigma^s}.$$

Таким образом,

$$I_k=\frac{B}{\sigma^s}+B\sum_{j=-\mu}^{\mu}\frac{1}{|j|\sigma^s}=\frac{B\ln\sigma}{\sigma_s}.$$

Случай, когда $g(m)\in\mathfrak{M}_1^s(c,a,\lambda)$, рассматривается аналогично.

Теорема доказана. В частности, при $s=2$ из нее следует

$$\nu_n(x)=\frac{1-\omega_1}{2}+\frac{1+\omega_1}{2}G(\ln x)+\frac{e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1+\omega_1}{2}\left(-\frac{\lambda\ln^2 x}{6}+\frac{\lambda}{6}\right)+\right.$$

$$\left.+hE_1(\bar{a}_n+\bar{\sigma}\ln x)-\frac{b_0+\omega_1 b_1}{2}\right]+\frac{B\ln\sigma}{\sigma^2},$$

когда $x>0$, и

$$\nu_n(x)=\frac{1-\omega_1}{2}-\frac{1-\omega_1}{2}G\left(\ln(-x)\right)-\frac{e^{-\frac{\ln^2(-x)}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1-\omega_1}{2}\left(-\frac{\lambda\ln^2(-x)}{6}+\frac{\lambda}{6}\right)+\right.$$

$$\left.+hE_1\left(\bar{a}_n+\bar{\sigma}\ln(-x)\right)-\frac{b_0-\omega_1 b_1}{2}\right]+\frac{B\ln\sigma}{\sigma^2}$$

при $x<0$.

Интересно сравнить асимптотические разложения законов распределения действительных аддитивных и мультипликативных арифметических функций. Для этой цели приведем простой пример.

Пример. Пусть $\omega(m)$ — число простых делителей числа m, тогда

$$\nu_n\{(-e)^{\omega(m)}<|x|^{\sqrt{\ln\ln n}}\ln n\,\mathrm{sgn}\,x\}=\begin{cases}\frac{1}{2}+L(x) & \text{при } x>0,\\ \frac{1}{2}-L(x) & \text{при } x<0,\end{cases}$$

где при $x\neq 0$ положено

$$L(x)=\frac{1}{2}G\left(\ln|x|\right)+\frac{e^{-\frac{\ln^2|x|}{2}}}{2\sqrt{2\pi\ln\ln n}}\left[-\frac{\ln^2|x|}{6}+\frac{1}{6}+\right.$$

$$\left.+2E_1(\ln\ln n+\sqrt{\ln\ln n}\ln|x|)-b_0\right]+\frac{B\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}.$$

Теперь

$$b_0=\sum_p\left[\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right]-\gamma.$$

Величина B ограничена равномерно по x и n.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Й. Кубилюсу за всестороннюю помощь при выполнении настоящей работы.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
13.IX.1971

Литература

1. Э. Манставичюс, К оценке остаточного члена в интегральных асимптотических законах арифметических функций, Liet. matem. rink. XII, № 1 (1972), 165–172.
2. Й. Кубилюс, Метод производных рядов Дирихле в теории распределения арифметических функций, II, Liet. matem. rink. XII, № 2 (1972).
3. Й. Кубилюс, З. Юшкис, О распределении значений мультипликативых функций, Liet. matem. rink. XI, № 2, (1971), 261–273.

4. Й. П. Кубилюс, Асимптотическое разложение законов распределения некоторых арифметических функций, Liet. matem. rink. II, № 1 (1962), 61–73.
5. Й. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
6. Э. Манставичюс, Об асимптотическом разложении законов распределения мультипликативных арифметических функций, Liet. matem. rink. XII, № 2, (1972), 142–143. (Тезисы XII конференции математиков Литвы).

ARITMETINIŲ MULTIPLIKATYVINIŲ FUNKCIJŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ ASIMPTOTINIS IŠDĖSTYMAS

E. Manstavičius

(*Reziumė*)

Tarkime, kad $g(m)$ — reali multiplikatyvinė funkcija, įgyjanti reikšmes iš geometrinės progresijos, kurios vardiklis $q\neq 0$. Pažymėkime $d_p=|\ln|g(p)|-a\ln p-\lambda|$, kai $g(p)\neq 0$. Jei egzistuoja tokios realios konstantos a, $\lambda\neq 0$, $c>0$ ir natūrinis skaičius $s\geqslant 1$, kad eilutės (1) ir (2) arba (2) ir (3) konverguoja, tai skaičius natūrinių skaičių $m\leqslant n$, tenkinančių nelygybę

$$g(m)<|x|^{|\lambda|(\ln\ln n)^{1/2}}n^a\ln^\lambda n\operatorname{sgn}x,$$

yra lygus

$$n\sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}}\left(\frac{\ln|q|}{|\lambda|}\right)^r\frac{E_r\left(\frac{a\ln n+\lambda\ln\ln n}{\ln|q|}+\frac{|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}}{\ln|q|}\ln x\right)}{(\ln\ln n)^{r/2}}\times$$

$$\times V_{s-1-r}^{(r)}(\ln|x|)+\frac{Bn\ln\ln\ln n}{(\ln\ln n)^{s/2}},$$

kai $x\neq 0$, ir yra lygus

$$n\frac{1-\omega_1}{2}+\frac{Bn\sqrt{\ln\ln n}}{\sqrt{\ln n}},$$

kai $x=0$. Funkcijos $E_r(y)$ ir $V_r(y)$ $(r=0,\ 1,\ \ldots,\ s)$ definuotos 3 darbo dalyje, o ω_1 apibrėžtas (5). Dydis B aprėžtas konstanta, nepriklausančia nuo n ir x.

ASYMPTOTIC EXPANSION FOR DISTRIBUTION LAWS OF THE ARITHMETIC MULTIPLICATIVE FUNCTIONS

E. Manstavičius

(*Summary*)

Let $g(m)$ be real-valued multiplicative number—theoretic function assuming values from some geometric progression. We denote by $d_p=|\ln|g(p)|-a\ln p-\lambda|$ and by $N_n(x)$ the number of natural $m\leqslant n$, that satisfy the inequality

$$g(m)<|x|^{|\lambda|(\ln\ln n)^{1/2}}n^a\ln^\lambda n\operatorname{sgn}x.$$

Suppose that there exist real constants a, $\lambda\neq 0$, $c>0$ and natural $s\geqslant 1$ such that the series

$$\sum_{g(p)\leqslant 0}\frac{\ln p}{p},\quad\sum_{\substack{g(p)>0\\ d_p<c}}\frac{d_p\ln p}{p},\quad\sum_{\substack{g(p)>0\\ d_p\geqslant c}}\frac{\ln p}{p},$$

$$\sum_{g(p)\neq 0}\frac{d_p^s}{p},\quad\sum_p\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{|\ln|g(p^\alpha)||^s}{p^\alpha}\tag{1}$$

converge, then the asymptotic expression for $\frac{1}{h}N_n(x)$ is given. The inequalities $g(p)\leqslant 0$ and $g(p)>0$ in the conditions (1) can be replaced by $g(p)\geqslant 0$ and $g(p)<0$ respectively.