XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1972

УДК 519.21

О СУММЕ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

В. И. Паулаускас

I. Введение

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, η — независимая от ξ_i случайная величина, принимающая целые положительные значения. В приложениях теории вероятностей часто приходится иметь дело с суммами случайного числа случайных величин

$$S_\eta = \sum_{i=1}^{\eta} \xi_i,$$

потому рассмотрению разных вопросов, связанных с предельным поведением таких сумм, посвящено много работ. Мы здесь укажем только работу [12], где приведена довольно полная библиография. В то же время многомерный случай до настоящего времени освещен недостаточно (см. [8] [11]), и это, по-видимому, можно объяснить тем, что только сравнительно недавно выяснилась структура остаточных членов в многомерных предельных теоремах.

Настоящая работа преследует две цели — перенести многие результаты на многомерный случай и продемонстрировать пригодность метода композиций в задачах с суммами случайного числа векторов. Следует отметить, что и в одномерном случае доказательство известных результатов или оценок (к тому же несколько более сильных, так как вместо абсолютных моментов используются псевдомоменты) методом композиций получается намного проще, чем методом характеристических функций.

Во II разделе получены многомерные аналоги теорем Анкомба, Робинса, Гнеденко и Фахима, в III — оценки, обобщающие и усиливающие одномерные оценки работы [4]. Выяснена структура остаточного члена как в равномерной, так и в неравномерной метриках. Остаточный член состоит из двух слагаемых: первое — это остаточный член в предельной теореме для рассматриваемых случайных векторов (с. в.), когда число их неслучайно и равно среднему значению случайной величины η, второе характеризует разброс случайной величины η. Приводится пример, обосновывающий такую структуру остаточного члена.

Введем следующие обозначения.

Пусть $x=(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})$, $y=(y^{(1)}, \ldots, y^{(k)})$ – два вектора из R_k. Будем писать

$$x<y, \text{ если } x^{(i)}<y^{(i)} \text{ для всех } i=1, 2, \ldots, k;$$

$$x=y, \text{ если } x^{(i)}=y^{(i)} \text{ для всех } i=1, 2, \ldots, k;$$

$$\frac{x}{y}=\left(\frac{x^{(1)}}{y^{(1)}}, \ldots, \frac{x^{(k)}}{y^{(k)}}\right); \quad x\cdot y=(x^{(1)}\cdot y^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\cdot y^{(k)});$$

$$\|x\|=\max_{1\leqslant i\leqslant k}|x^{(i)}|; \quad |x|=(|x^{(1)}|, \ldots, |x^{(k)}|); \quad \underline{x}=\min_{1\leqslant i\leqslant k} x^{(i)}, \ \tilde{\underline{x}}=(\underline{x}\ldots\underline{x}).$$

Если a – число, то $(a)=(a, a, \ldots, a)\in R_k$. Если A – невырожденная матрица, то A^{-1} – обратная матрица, $|A|$ – ее детерминант, $|A_{ij}|$ – алгебраическое дополнение ее элемента a_{ij}.

Через $\mathscr{E}_1$ обозначим класс множеств вида $\{x\colon x^{(1)}<y_1, x^{(2)}<y_2, \ldots, x^{(k)}<y_k\}$ $x\in R_k$, $y_i\in R_1$ $i=1, 2, \ldots, k$, через $\mathscr{E}_2$ – класс всех универсально измеримых выпуклых множеств из R_k, $\mathfrak{A}$ – класс всех борелевских множеств из R_k. $E_k(a, A)$, $a\in R_k$, будет обозначать k-мерное вырожденное распределение, сконцентрированное в точке $a\cdot\Phi_B$ и φ_B – k-мерное нормальное распределение и его плотность с нулевыми математическими ожиданиями и матрицей вторых моментов B.

II. Теоремы о сходимости

I. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ – последовательность k-мерных с. в., а B_n – последовательность невырожденных матриц таких, что

$$P\{B_n^{-1}S_n<y\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(y) \quad (y\in R_k) \tag{1.1}$$

во всех точках непрерывности некоторой функции распределения (ф.р.) F. Если k_n – последовательность чисел таких, что $\lim_{n\to\infty} k_n=\infty$, а $\{\omega_n\}$ – последовательность целочисленных одномерных случайных величин со свойством $p\lim k_n^{-1}\omega_n=1$, то при некоторых условиях на S_n и B_n в работе Глесера [8] показано, что и

$$P\{B_{k_n}^{-1}S_{\omega_n}<y\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(y).$$

Этот результат является обобщением одномерного результата Анкомба [9].

Но задачу о случайном числе с.в. можно ставить в более общей форме: предположить, что $\{k_n\}$ – последовательность k-мерных векторов, удовлетворяющих $\lim_{n\to\infty}\underline{k}_n=\infty$, а $\{\omega_n\}$ – последовательность с. в. с целочисленными компонентами такая, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\omega_n}{k_n}=(1)\right\}=1.$$

Введем следующее обозначение: если $S_n=(S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(k)})$, n – число и $k_n=(k_n^{(1)}, \ldots, k_n^{(k)})$, то $S_{k_n}=(S^{(1)}_{k_n^{(1)}}, \ldots, S^{(k)}_{k_n^{(k)}})$. Тогда возникает вопрос, какие условия нужно накладывать на с.в. S_n и векторы k_n и каким образом производить нормировку, чтобы можно было судить о сходимости S_{ω_n}.

На возможность такой постановки вопроса указывается в работе [11], где рассматриваются суммы независимых одинаково распределенных с.в. с многомерным случайным индексом, т. е. суммы S_{ω_n}, где $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, а с.в. ω_n определен, как и выше. В этой работе получен ряд теорем о предельных законах распределений с.в. S_{ω_n}, но эти результаты находятся в стороне от наших исследований, так как рассматривается нормировка посредством с.в., т.е.

$$S_{\omega_n}/(\omega_n)^{\frac{1}{\alpha}},\quad 0<\alpha\leqslant 2.$$

Здесь рассматривается частная задача сформулированной выше общей проблемы, когда в (1.1) нормирующие матрицы диагональны, т. е. для сходимости достаточно покомпонентной нормировки.

Пусть S_i, $i=1, 2, \dots, n, \dots$ — последовательность k-мерных с.в., а $B_n=(B_n^{(1)}, \dots, B_n^{(k)})$, $B_n^{(i)}>0$ — последовательность таких векторов, что

$$P\left\{\frac{S_n}{B_n}<y\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{} F(y),\quad y\in R_k \tag{1.2}$$

во всех точках непрерывности некоторой ф.р. $F(y)$. Предположим далее, что последовательность целочисленных векторов $\{k_n\}$ и последовательность k-мерных с.в. $\{\nu_n\}$, принимающих значения целых положительных чисел, удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{n\to\infty}\underline{k}_n=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{k_n-\tilde{k}_n}{k_n}\right\|=0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\nu_n}{k_n}=(1)\right\}=1. \tag{1.4}$$

По определению

$$B_{k_n}=(B^{(1)}_{k_n^{(1)}}, \dots, B^{(k)}_{k_n^{(k)}});$$

введем условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_{\tilde{k}_n}}{B_{k_n}}=(1). \tag{1.5}$$

Теорема 1. *Если последовательности векторов* $\{B_n\}$ *и* $\{k_n\}$ *и с.в.* $\{S_n\}$ *и* $\{\nu_n\}$ *удовлетворяют условиям* (1.2)–(1.5) *и для каждого* $\varepsilon>0$ *и* $\delta>0$ *существует такой вектор* n_0 *и число* $C>0$ *такие, что для всех векторов* $n>n_0$

$$P\left\{\max_{n':\,|n-n'|<Cn}\left\|\frac{S_n-S_{n'}}{B_n}\right\|<\varepsilon\right\}>1-\delta, \tag{1.6}$$

тогда

$$P\left\{\frac{S_{\nu_n}}{B_{k_n}}<y\right\}\to F(y),\quad y\in R_k \tag{1.7}$$

во всех точках непрерывности ф.р. F.

Замечание 1. Часто условие (1.5) будет следствием условий (1.3).

Замечание 2. Как и в [8], здесь не требуется независимости с.в. ν_n от с.в. S_j.

Например, как следствие теоремы получаем следующее утверждение. Пусть $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные с.в. с нулевыми математическими ожиданиями и конечными моментами второго порядка. Тогда если $\{k_n\}$ и $\{\nu_n\}$ удовлетворяют (1.3) и (1.4), то

$$P\left\{\frac{S_{\nu_n}}{k_n^{\frac{1}{2}}}<y\right\}\to\Phi(y),$$

где $k_n^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{k_n^{(1)}},\ \ldots,\ \sqrt{k_n^{(k)}})$, а $\Phi(y)$ — нормальное k-мерное распределение с моментами первых двух порядков, совпадающими с соответствующими моментами с.в. ξ_1. Действительно, (1.2) имеет место с $F(y)\equiv\Phi(y)$ и $B_n=\sqrt{n}$, а тогда условие (1.5) вытекает из (1.3). Условие (1.6) выполняется с $C=$ $=\frac{\delta\varepsilon^2}{A}$, где A — величина, определяемая вторыми моментами с.в. ξ_1. Такой подбор C определяется неравенством Колмогорова, которое в нашем случае можно применить следующим образом. Пусть

$$Z_m=Z_{m,n}=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\setminus B_n,\qquad Y_m=\|Z_m\|,$$

$$\bar{Y}_m=\Big(\sum_{i=1}^{k}Z_m^{(i)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$P\{\max_{m\leqslant[Cn]}Y_m>\varepsilon\}\leqslant P\{\max_{m\leqslant[Cn]}\bar{Y}_m>\varepsilon\}\leqslant\frac{D\bar{Y}_{[Cn]}}{\varepsilon^2}=\frac{CA}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство теоремы 1. Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если выполняются условия* (1.2), (1.3), (1.5) *и условие*

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left\|\frac{S_{k_n}-S_{\tilde{k}_n}}{B_{k_n}}\right\|>\varepsilon\right\}=0,\quad\varepsilon>0,\tag{1.8}$$

то

$$P\left\{\frac{S_{k_n}}{B_{k_n}}<y\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}F(y),\quad y\in R_k.\tag{1.9}$$

Обозначим

$$\alpha=(\alpha^{(1)},\ \ldots,\ \alpha^{(k)})=\frac{B_{\tilde{k}_n}}{B_{k_n}},\quad X=\frac{S_{\tilde{k}_n}}{B_{\tilde{k}_n}},\quad Y=\frac{S_{k_n}-S_{\tilde{k}_n}}{B_{k_n}}.$$

Тогда $\frac{S_{k_n}}{B_{k_n}}=\alpha X+Y$. Из условий (1.5) и (1.8) следует, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ можно указать такое n_0, что если $n>n_0$, то

$$\|\alpha-(1)\|<\varepsilon,\quad P\{\|Y\|>\varepsilon\}<\varepsilon.\tag{1.10}$$

Имеем

$$P\{\alpha X+Y<y\}=P\{\alpha X<y-Y,\ \|Y\|<\varepsilon\}+P\{\alpha X<y-Y,\ \|Y\|>\varepsilon\}\leqslant$$
$$\leqslant P\{\alpha X<y+(\varepsilon)\}+P\{\|Y\|>\varepsilon\}\leqslant P\left\{X<\frac{y+(\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}\right\}+P\{\|Y\|>\varepsilon\},\quad (1.11)$$
$$P\{\alpha X+Y<y\}\geqslant P\{\alpha X<y-Y,\ \|Y\|<\varepsilon\}\geqslant P\left\{X\frac{y-(\varepsilon)}{(1+\varepsilon)},\ \|Y\|<\varepsilon\right\}\geqslant$$
$$\geqslant P\left\{X<\frac{y-(\varepsilon)}{(1+\varepsilon)}\right\}-P\{\|Y\|>\varepsilon\}.\quad (1.12)$$

Из (1.2) следует, что $P\{X<y\}\to F(y)$ при $\underline{k}_n\to\infty$, а тогда из (1.10)–(1.12) ввиду произвольности ε следует (1.9). Лемма доказана.

Теперь с учетом (1.9) доказательство теоремы можно проводить по аналогии с работой [8].

Пусть вектор n_0 и число $C>0$ обеспечивают выполнение (1.6) для выбранных произвольно малых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ и пусть n_0 настолько большое, что для $k_r>n_0$

$$P\{|\nu_r-k_r<Ck_r\}>1-\delta,\quad \left\|\frac{k_r-\tilde{k}_r}{k_r}\right\|<C.$$

Возможность такого выбора обеспечивают условия (1.3) и (1.4). Обозначим события

$$T:|\nu_r-k_r|<ck_r;\quad F:\|B_{k_r}^{-1}(S_{k_r}-S_{\nu_r})\|<\varepsilon;\quad E=T\cap F;$$
$$S\equiv S(k_r):\{\max_{n':|n'-k_r|<Ck_r}\|B_{k_r}^{-1}(S_{n'}-S_{k_r})\|<\varepsilon\}.$$

Имеем

$$P(E)\geqslant P(S\cap T)=P(S)-P(S\cap\bar{T})\geqslant$$
$$\geqslant P(S)-P(\bar{T})\geqslant 1-\delta-\delta=1-2\delta.\quad (1.13)$$

Пусть

$$D:\{B_{k_r}^{-1}S_{\nu_r}\leqslant y\},$$
$$R^+:\{B_{k_r}^{-1}S_{k_r}<y+(\varepsilon)\},\quad R^-:\{B_{k_r}^{-1}S_{k_r}<y-(\varepsilon)\}.$$

Тогда

$$P(D)=P(D\cap E\cup D\cap\bar{E})\leqslant P(D\cap E)+P(\bar{E})\leqslant P(R^+)+P(\bar{E}),\quad (1.14)$$
$$P(D)\geqslant P(D\cap F)\geqslant P(R^-\cap F)\geqslant P(R^-)-P(\bar{F})\geqslant P(R^-)-P(\bar{E}).\quad (1.15)$$

Из (1.13)–(1.15) получаем

$$P\{B_{k_r}^{-1}S_{k_r}<y-(\varepsilon)\}-2\delta\leqslant P(D)\leqslant P\{B_{k_r}^{-1}S_{k_r}<y+(\varepsilon)\}+2\delta.\quad (1.16)$$

Теперь легко видеть, что при нашем выборе n_0

$$|k_r-\tilde{k}_r|<ck_r\quad\text{для}\quad k_r>n_0,$$

т.е. из (1.16) вытекает условие (1.8) леммы. Это означает, что в условиях теоремы имеет место (1.9), а это с учетом (1.16) и доказывает теорему ввиду произвольной малости ε и δ.

2. Теперь рассмотрим сходимость сумм случайного числа с.в. без предположения (1.4) и докажем теорему, которая является многомерным аналогом теоремы Робинса [10].

Пусть независимые с.в. $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ имеют одинаковое распределение $F(A)$, вектор математических ожиданий $a=(a^{(1)}, \ldots, a^{(k)})$, матрицу корреляции $\Lambda=\{\rho_{ij}\}$, $|\Lambda|\neq 0$. Через $\bar{F}(a)$ обозначим распределение с.в. ξ_1-a, а матрицу вторых моментов последнего с.в. — через $B=\{b_{ij}\}$. Положим $b_i^2=b_{ii}$. Эти предположения обеспечивают выполнение соотношения

$$\sup_{A\in\mathscr{E}_2} |\bar{F}_n(A)-\Phi_B(A)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{1.17}$$

где $\bar{F}_n(A)$ — распределение с.в.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i-a).$$

Будем считать, что одномерная целочисленная случайная величина ω зависит от некоторого параметра t и имеет следующие характеристики:

$$\alpha=\alpha(t)=M\omega,\ \gamma=M|\omega-\alpha|,\ \beta^2=\beta^2(t)=D\omega.$$

Функцию распределения случайной величины $\frac{\omega-\alpha}{\beta}$ обозначим $H_\omega(x)$, и если

$$\omega_r=P\{\omega=r\},\quad \text{то}\quad H_\omega=\sum_{r=1}^{\infty} \omega_r E_1\left(\frac{r-\alpha}{\beta},\ \cdot\right).$$

Для простоты записи иногда нам удобно будет считать ω как k-мерный вырожденный с.в., все компоненты которого совпадают с одномерной величиной ω. Тогда можно будет считать, что $H_\omega(A)$ является k-мерным распределением и

$$H_\omega(A)=\sum_{r=1}^{\infty} \omega_r E_k\left(\left(\frac{r-\alpha}{\beta}\right),\ A\right). \tag{1.18}$$

Рассмотрим с.в.

$$Z_\omega=\frac{\sum_{i=1}^{\omega} \xi_i-\alpha a}{\sigma},\quad \text{где}\quad \sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_k),\qquad \sigma_i^2=\alpha b_i^2+a_i^2\beta^2,$$

$$F_\omega(A)=P\{Z_\omega\in A\}.$$

Пусть B_1 — матрица вторых моментов с. в. $\frac{\xi_1-a}{\sigma}$. Докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть для независимых одинаково распределенных с.в. ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n, \ldots$ выполняется* (1.17), *а для случайной величины ω выполняются*

$$\alpha(t)\to\infty,\quad \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\to 0\ \ \textit{при}\ \ t\to\infty. \tag{1.19}$$

Тогда при $t\to\infty$

$$\Delta_2=\sup_{A\in\mathscr{E}_2} |F_\omega(A)-\tilde{H}_\omega * \Phi_{\alpha B_1}(A)| \to 0, \tag{1.20}$$

где

$$\tilde{H}_\omega(A)=H_\omega\left(\frac{\sigma}{\beta\alpha}A\right),\quad A\subset R_k.$$

Доказательство опирается на основное тождество, которое используется и в следующем параграфе:

$$F_\omega(A)=\sum_{r=1}^{\infty}\omega_r\left\{E_k\left((r-\alpha)\frac{a}{\sigma},\ \cdot\right)*(F_r-\Phi_{rB_1})\right\}(A)+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\omega_r\left\{E_k\left((r-\alpha)\frac{a}{\sigma},\ \cdot\right)*(\Phi_{rB_1}-\Phi_{\alpha B_1})\right\}(A)+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\omega_r\left\{E_k\left((r-\alpha)\frac{a}{\sigma},\ \cdot\right)*\ \Phi_{\alpha B_1}\right\}(A),\tag{1.21}$$

где F_r — распределение с.в.

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\xi_i-ra}{\sigma}.$$

Из (1.21) получаем

$$\Delta_2\leqslant I_1+I_2,\tag{1.22}$$

где

$$I_1=\sum_{r=1}^{\infty}\omega_r\sup_{A\in\mathscr{E}_2}|F_r(A)-\Phi_{rB_1}(A)|,$$

$$I_2=\sum_{r=1}^{\infty}\omega_r\sup_{A\in\mathscr{E}_2}|(\Phi_{rB_1}-\Phi_{\alpha B_1})(A)|,$$

и нам надо показать, что при $t\to\infty$ $I_i\to 0$, $i=1,\ 2$. Записывая

$$I_i=I_{i1}+I_{i2},$$

где

$$I_{i1}=\sum_{r=1}^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]},\qquad I_{i2}=\sum_{r>\frac{\alpha}{2}},$$

мы имеем

$$I_{i1}\leqslant\sum_{r\leqslant\left[\frac{\alpha}{2}\right]}\omega_r\leqslant P\left\{|\omega-\alpha|\geqslant\frac{\alpha}{2}\right\}\leqslant\frac{2\gamma}{\alpha},\tag{1.23}$$

и при $t\to\infty$ $I_{i1}\to 0$, $i=1,\ 2$, ввиду (1.19).

В следующем разделе показано (см. (2.22)), что

$$I_{22}\leqslant C\cdot k\frac{\gamma}{\alpha}.\tag{1.24}$$

Очевидно,

$$I_{12} \leqslant \sup_{r > \frac{\alpha}{2}} \sup_{A \in \mathscr{E}_2} |F_r(A) - \Phi_{rB_1}(A)|.$$

Но, так как

$$F_r(A) - \Phi_{rB_1}(A) = (\bar{F}_r - \Phi_B)\left(\frac{\sigma}{(\sqrt{r})} A\right),$$

то из (1.17) следует, что

$$I_{12} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{1.25}$$

Неравенства (1.22)–(1.25) доказывают теорему.

3. В заключение этого раздела приведем один результат, который является единственным, полученным не методом композиций, а методом характеристических функций.

Б. В. Гнеденко и Г. Фахим в работе [2] доказали сходимость сумм независимых случайных величин со случайным числом слагаемых. Оказывается, это доказательство почти дословно можно перенести на многомерный случай.

Пусть имеем k-мерную схему серий, т.е. с.в. $X_{nj} = (X_{nj}^{(1)}, \ldots, X_{nj}^{(k)})$, $n = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots$. Предположим, что для каждого n с.в. X_{nj} не зависимы и одинаково распределены.

Пусть ν_n – последовательность целочисленных одномерных случайных величин при каждом n независимых от с.в. X_{nj}. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть существуют такие последовательности чисел j_n и b_n, что при $n \to \infty$*

$$P\left\{\sum_{i=1}^{j_n} X_{ni} < x\right\} \to F(x), \quad x \in R_k,$$

$$P\left\{\frac{\nu_n - j_n}{b_n} < y\right\} \to G(y) \quad y \in R_1,$$

где F и G – ф.р. в R_k и R_1, соответственно,

$$\frac{b_n}{j_n} \to r, \quad 0 < r < \infty.$$

Тогда ф.р. с.в.

$$S_{\nu_n} = \sum_{i=1}^{\nu_n} X_{ni}$$

при $n \to \infty$ сходится к ф.р. $H(x)$, $x \in R_k$, характеристическая функция (х.ф.) которой определяется равенством

$$h(t) = \int_0^\infty [f(t)]^u \, d\bar{G}(u), \quad t \in R_k, \quad u \in R_1, \tag{1.26}$$

где $f(t)$ – х.ф. предельного закона $F(x)$, а

$$\bar{G}(u) = G\left(\frac{u-1}{r}\right).$$

Но сформулированная выше теорема, хотя и является обобщением результата Гнеденко и Фахима, но не исчерпывает всех возможностей, возникающих в многомерном случае, так как случайные величины ν_n остались одномерными. Возможны несколько подходов к дальнейшему обобщению результата из [2]. Один путь указан (но теоремы не сформулированы) в уже упоминавшейся работе [11], но при этом, по-видимому, придется нормировать с.в. S_{ν_n} случайными величинами и накладывать дополнительные условия на с.в. ν_n.

Другой путь следующий: можно не накладывать дополнительных требований на с.в. ν_n, предположив, что для каждого n с.в. X_{nj} независимы, одинаково распределены и с независимыми компонентами. ω_n – последовательность k-мерных с.в. с целочисленными компонентами, при каждом n независимыми от X_{nj}; j_n, b_n в дальнейшем тоже k-мерные векторы.

Теорема 4. *Пусть существуют такие последовательности k-мерных векторов j_n и b_n, что при $n \to \infty$*

$$P\{S_{n,j_n} < x\} \to F_1(x), \quad x \in R_k,$$

$$P\left\{\frac{\omega_n - j_n}{b_n} < y\right\} \to G_1(y), \quad y \in R_k, \quad \frac{b_n}{j_n} \to r = (r^{(1)}, \ldots, r^{(k)}), \ 0 < r^{(i)} < \infty,$$

где F_1 и G_1 – ф. р. в R_k, а

$$S_{n,j_n} = \left(\sum_{i=1}^{j_n^{(1)}} X_{ni}^{(1)}, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{j_n^{(k)}} X_{ni}^{(k)}\right).$$

Тогда ф.р. с.в. $S_{\omega_n} = S_{n,\omega_n}$ при $n \to \infty$ сходится к ф.р. $H_1(x)$, $x \in R_k$, х. ф. которой определяется равенством

$$h_1(t) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f_1^{u_1}(t_1) f_2^{u_2}(t_2) \ \ldots \ f_k^{u_k}(t_k)\, d\bar{G}_1(u), \tag{1.27}$$

$$u = (u_1, \ \ldots, \ u_k) \in R_k, \quad t = (t_1, \ \ldots, \ t_k) \in R_k,$$

где

$$\bar{f}_1(t) = f_1(t_1) f_2(t_2) \ldots f_k(t_k) -$$

х. ф. предельной ф.р. $F_1(x)$, а

$$\bar{G}_1(u) = G_1\left(\frac{u - (1)}{r}\right), \quad u, \ r \in R_k.$$

Используя лемму из доказательства теоремы 2, можно первое условие теоремы 4 заменить другими условиями.

Теорема 4а. *Пусть существуют последовательность чисел k_n и последовательность k-мерных векторов j_n и b_n такие, что при $n \to \infty$*

$$P\left\{\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni} < x\right\} \to F_1(x),$$

$$\lim_{n \to \infty} P\{\|S_{n,j_n} - S_{n,k_n}\| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$P\left\{\frac{\omega_n - j_n}{b_n} < y\right\} \to G_1(y), \quad \frac{b_n}{j_n} \to r.$$

Тогда выполняется утверждение теоремы 4.

Доказательство теоремы 4. Для простоты записи введем следующее обозначение:
если

$$u=\prod_{i=1}^{k} u_k, \quad v\in R_k,$$

то

$$u^v=\prod_{i=1}^{k} u_i^{v_i}.$$

Пусть

$$f_n(t)=f_{n1}(t_1)\ \dots\ f_{nk}(t_k), \quad t\in R_k -$$

х.ф. с.в. X_{nj}, а $f_{ni}(t_i)$ – х. ф. $X_{nj}^{(i)}$, $i=1, 2, \dots, k$. Пусть

$$R_k^+=\{x: x_1\geqslant 0, \ \dots, \ x_k\geqslant 0\}, \quad S_k\subset R_k^+ -$$

множество точек с целочисленными координатами, и если

$$i=(i_1, i_2, \dots, i_k)\in S_k, \quad \text{то} \quad p_{ni}=P\{\omega_n=i\}.$$

Тогда х. ф. ψ_{n,ω_n} с. в. S_{n,ω_n} можно записать следующим образом:

$$\psi_{n,\omega_n}(t)=\sum_{i\in S_k} p_{ni} f_n^i(t)=\int_{R_k^+} f_n^x(t)\, A_n(dx),$$

где

$$A_n(x)=P\{\omega_n\leqslant x\}, \quad x\in R_k.$$

Если введем

$$\bar{A}_n(y)=P\left\{\frac{\omega_n-j_n}{b_n}<y\right\}=A_n(b_n y+j_n),$$

то

$$\psi_{n,\omega_n}(t)=\int_{-\frac{k_n^{(1)}}{b_n^{(1)}}}^{\infty} \dots \int_{-\frac{k_n^{(k)}}{b_n^{(k)}}}^{\infty} f^{yb_n+j_n}(t)\,\bar{A}_n(dy)=$$

$$=\int_{-\frac{k_n^{(1)}}{b_n^{(1)}}}^{\infty} \dots \int_{-\frac{k_n^{(k)}}{b_n^{(k)}}}^{\infty} [f_n^{j_n}(t)]^{\frac{yb_n}{j_n}+(1)}\,\bar{A}_n(dy). \tag{1.28}$$

Но $f_n^{j_n}(t)$ является х.ф. с.в. S_{n,j_n} и из условий теоремы следует, что для всех конечных t

$$f_n^{j_n}(t)\to \bar{f}_1(t)=\prod_{i=1}^{k} f_i(t_i).$$

Поэтому, используя условия теоремы, из (1.28) получаем, что для всех конечных t

$$\psi_{n,\omega_n}(t)\to \int_{-\frac{1}{r_1}}^{\infty} \dots \int_{-\frac{1}{r_k}}^{\infty} f_1^{ry+(1)}(t)\, G_1(dy)=\int_{R_k^+} f_1^u(t)\,\bar{G}_1(du).$$

Теорема доказана.

Используя формулы (1.26) и (1.27), как и в одномерном случае, можно построить много примеров многомерных х.ф. и безгранично делимых х.ф.

Формула (1.26) позволяет сделать следующее общее утверждение. Пусть

$$a(t)=\int_0^\infty e^{itx}\,dG(x),\quad t\in R_1 -$$

х.ф. любого распределения, сосредоточенного на R_1^+, а $v(u)$, $u\in R_k$ — логарифм многомерной безгранично делимой х.ф., т.е. $\psi(u)=e^{v(u)}$. Тогда

$$\varphi(u)=a\Big(-iv(u)\Big),\quad u\in R_k$$

будет х.ф., и если $a(t)$ — безгранично делимая, то и $\varphi(u)$ — безгранично делимая х.ф.

Примеры. Используя это утверждение и примеры из [2], можно утверждать, что функции

$$\varphi(u)=\frac{1}{1-v(u)},\quad u\in R_k,$$

$$\varphi(u)=\left(\frac{1}{1-v(u)}\right)^\alpha,\quad \alpha>0,\quad u\in R_k,$$

$$\varphi(u)=\frac{e^{v(u)}-1}{v(u)},\quad u\in R_k, \tag{1.29}$$

где $v(u)$ — логарифм безгранично делимой многомерной х.ф. является многомерными х.ф., а первые два еще и безгранично делимыми.

Из формулы (1.27) вытекает следующее утверждение. Пусть

$$b(t)=\int_{R_k^+} e^{i(t,x)}\,G(dx),\quad x,\ t\in R_k$$

— х.ф. k-мерного распределения, сосредоточенного в R_k^+, а $v_i(u)$, $u\in R_1$, $i=1$, $2,\ldots,k$ — логарифмы одномерных безгранично делимых х.ф. Тогда

$$\varphi(z)=b\Big(-iv_1(z_1),\ \ldots\ -iv_k(z_k)\Big),\quad z=(z_1,\ \ldots,\ z_k)$$

будет многомерной х. ф. По-видимому, если $b(t)$ — безгранично делимая х.ф., то такой же будет и $\varphi(z)$.

Примеры

а) Пусть G — равномерное распределение в области $D=\{0\leqslant x_i\leqslant 1,$ $i=1,\ldots,k\}\subset R_k^+$. Тогда прямо из (1.27) легко получаем, что

$$\varphi(u)=\prod_{i=1}^{k}\frac{e^{v_i(u_i)}-1}{v_i(u_i)},\quad u=(u_1,\ \ldots,\ u_k)\in R_k$$

является многомерной х.ф. Интересно отметить, что если в (1.29) предположим, что $v(t)$ является логарифмом х.ф. с.в. с независимыми компонентами, то получим

$$v(t)=\sum_{i=1}^{k} v_i(t_i).$$

Таким образом, обе функции

$$\frac{(e^{v_1(t_1)}-1)(e^{v_2(t_2)}-1)\ \ldots\ (e^{v_k(t_k)}-1)}{v_1(t_1)\,v_2(t_2)\ \ldots\ v_k(t_k)},\qquad \frac{e^{v_1(t_1)+\ldots+v_k(t_k)}-1}{v_1(t_1)+v_2(t_2)+\ldots+v_k(t_k)}$$

являются многомерными х.ф.

б) Если распределение G более сложное, то получим сложные х.ф. Для простоты записи положим $k=2$. Пусть G – равномерное распределение в двумерной области $\{0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$. Тогда несложное интегрирование показывает, что функция

$$\varphi(u,\ t)=\frac{2}{v_1(u)-v_2(t)}\left[\frac{e^{v_1(u)}-1}{v_1(u)}-\frac{e^{v_2(t)}-1}{v_2(t)}\right],\quad u,\ t\in R_1,$$

где v_i и v_2 – логарифмы некоторых безгранично делимых х.ф., будет двумерной х.ф. В частности, х.ф. будут функции

$$\varphi(u,\ t)=\frac{2}{|u|^{\alpha_1}-|t|^{\alpha_2}}\left[\frac{e^{-|u|^{\alpha_1}}-1}{|u|^{\alpha_1}}-\frac{e^{-|t|^{\alpha_2}}-1}{|t|^{\alpha_2}}\right]$$

для любых $0<\alpha_i\leqslant 2,\ i=1,2.$

III. Оценки остаточного члена

В этом разделе приводятся оценки остаточного члена в многомерном случае, обобщающие и усиливающие одномерные оценки из работы [4].

1. Воспользуемся обозначениями п. 2 раздела II, в которых тогда нужно оценить величины

$$\Delta_i=\sup_{A\in\mathscr{E}_i}|F_\omega(A)-\tilde{\bar{H}}_\omega * \Phi_{\alpha B_1}(A)|,\quad i=1,\ 2,$$

предполагая существование моментов высшего, чем второй порядка.

Для формулировки результатов необходимы некоторые дополнительные обозначения:

$$\nu_3=\sup_{|t|=1}\frac{\int\limits_{R_k}|(x,\ t)|^3\,|(\bar{F}-\Phi_B)(dx)|}{M^{\frac{3}{2}}(\xi,\ t)^2},\qquad \nu_{3j}=\frac{\int|x_j|^3\,|(\bar{F}-\Phi_B)(dx)|}{b_j^3},$$

$$N_3=\sum_{j=1}^{k}\frac{|\Lambda_{jj}|}{|\Lambda|}\nu_{3j},\qquad \bar{\nu}_3=\int\limits_{R_k}(B^{-1}x,\ x)^{\frac{3}{2}}\,|\bar{F}-\Phi_B|(dx).$$

Теорема 5. *Пусть независимые одинаково распределенные с.в. $\xi_i=1,2,\ \ldots,$ $n,\ \ldots$ (введенные в п. 2 разд. 2) имеют конечные моменты третьего порядка. Тогда*

$$\Delta_1\leqslant C_1(k)\,\frac{\max(N_3^{\frac{1}{4}},\ N_3)}{\sqrt{\alpha}}+C\cdot k\frac{\gamma}{\alpha},\tag{2.1}$$

$$\Delta_2\leqslant C_2(k)\,\frac{\max(\nu_3^{\frac{1}{4}},\ \nu_3)}{\sqrt{\alpha}}+C\cdot k\frac{\gamma}{\alpha},\tag{2.2}$$

где $C_1(k)\leqslant Ck^4,\ C_2(k)\leqslant C\cdot k^4.$

Замечание. Предполагая, что для с.в. ξ_i существуют моменты порядка $2+\delta$, $0<\delta\leqslant 1$, можно, используя работу [7], получить оценки величин Δ_i, изменив в (2.1) и (2.2) только первые члены.

В одномерном случае оценки теоремы 5 можно усилить путем замены псевдомоментов так называемыми разностными моментами, введенными в [3]. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_i=a$ и $M(\xi_i-a)^2=b^2$, ω — случайная величина, введенная в п.2 разд. 2. Вместо псевдомомента

$$\nu_3=\int_{-\infty}^{\infty}|x^3|\,d(\bar F-\Phi_{b^2})(x)|$$

рассмотрим величину

$$\tilde\nu_3=3\int_{-\infty}^{\infty}|x|^2\,|(\tilde F-\Phi_{b^2})(x)|\,dx.$$

Известно [3], что $\tilde\nu^3\leqslant\nu^3$, и нетрудно показать, что для многих распределений будет иметь место строгое неравенство и даже возможно построить примеры распределений, для которых $\tilde\nu_3$ был бы сколь угодно малым, а ν_3 — конечным. Используя еще не опубликованную нашу оценку

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1\frac{\max\left(\frac{\tilde\nu_3}{b^3},\left(\frac{\tilde\nu_3}{b^3}\right)^{\frac14}\right)}{\sqrt n},$$

где

$$F_n(x)=P\left\{\frac{1}{\sqrt n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)<x\right\},$$

и оценку константы $C_1\leqslant 1{,}98$, полученную Зилберквейтом в дипломной работе, можно доказать следующую оценку.

Теорема 5а. *В одномерном случае для* $0<\varepsilon<1$

$$\sup_x|F_\omega(x)-\tilde H_\omega*\Phi_{(1-\delta^2)}(x)|\leqslant\frac{1{,}98}{\sqrt\varepsilon}\,\frac{\max\left(\frac{\tilde\nu_3}{b^3},\left(\frac{\tilde\nu_3}{b^3}\right)^{\frac14}\right)}{\sqrt\alpha}+$$
$$+\left(\frac{2}{1-\varepsilon}+\frac{1}{2\sqrt{2\pi e}\,\varepsilon}\right)\frac{\gamma}{\alpha},$$

где

$$\delta^2=\frac{a^2\beta^2}{\sigma^2}=\frac{a^2\beta^2}{\alpha b^2+a^2\beta^2},\quad \tilde H_\omega(x)=H_\omega\left(\frac{x}{\delta}\right),\quad H_\omega(x)=P\left\{\frac{\omega-\alpha}{\beta}<x\right\}.$$

Если ε выбрать таким, что выражение при $\frac{\gamma}{\alpha}$ будет наименьшим, то получим

$$\sup_x|F_\omega(x)-\tilde H_\omega*\Phi_{1-\delta^2}(x)|\leqslant 3{,}45\,\frac{\max\left(\left(\frac{\tilde\nu_3}{b^3}\right)^{\frac14}\frac{\tilde\nu_3}{b^3}\right)}{\sqrt\alpha}+3{,}1\,\frac{\gamma}{\alpha}.\quad(2.2\text{a})$$

Теперь предположим, что с.в. ξ_i имеют нулевые математические ожидания и единичные дисперсии, т.е. $a^{(i)}=0$, $b_i^2=1$, и конечные моменты третьего порядка. Тогда предельным распределением для распределения

$$F_{\omega,1}(A)=P\left\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum_{i=1}^{\omega}\xi_i\in A\right\}$$

будет $\Phi_\Lambda(A)$, где Λ – ковариационная и одновременно корреляционная матрица с.в. ξ_1. Для величины

$$\Delta(A)=|F_{\omega,1}(A)-\Phi_\Lambda(A)|$$

приведем следующие неравномерные оценки. Пусть

$$\beta(A)=\inf_{x\in\delta A}(x,\ x)^{\frac{1}{2}},\quad x\in R_k,$$

где δA – граница множества A,

$$\beta_B(A)=\inf_{x\in\delta A}(B^{-1}x,\ x)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 6. *Для всех* $A\in\mathscr{E}_1$

$$\Delta(A)\leqslant\frac{C_3(k)\max\left(\nu_3,\ \nu_3^{\frac{k}{k+3}}\right)}{\left(1+\beta_B^3(A)\right)\sqrt{\alpha}}+\frac{C\cdot k}{1+\beta^3(A)}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\tag{2.3}$$

и для $A\in\mathscr{E}_2$

$$\Delta(A)\leqslant\frac{C_3(k)\max\left(\bar\nu_3,\ \bar\nu_3^{\frac{k}{k+3}}\right)}{\left(1+\beta_B^3(A)\right)\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{1+\beta^3(A)}\left(\frac{C\cdot k^4\cdot\gamma}{\alpha}+\frac{C\cdot k^2\beta^2}{\alpha^2}\right).\tag{2.4}$$

Как видно из (2.1) – (2.4), с переходом от класса $\mathscr{E}_1$ к $\mathscr{E}_2$ ухудшается в основном только зависимость остаточного члена от размерности k (поэтому мы докажем оценки для выпуклых множеств и укажем путь, как получить оценки для ф.р. (т.е. класса $\mathscr{E}_1$)), а структура останется той же: остаточный член состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое – это остаточный член в центральной предельной теореме для с.в. ξ_i, когда число их неслучайное и равно α – среднему значению случайной величины ω; второе слагаемое характеризует разброс случайной величины ω. Как видно из оценок (2.1) и (2.2), чтобы остаточный член стремился к нулю, необходимо выполнение условий $\alpha\to\infty$ и $\frac{\gamma}{\alpha}\to 0$, т.е. мы получаем условия теоремы 2. Более того, простой пример показывает, что без наложения дополнительных условий, невозможно существенно улучшить остаточный член в (2.1) – (2.2а).

Пример. Пусть $\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_n,\ \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_i=0$, $M\xi_i^2=1$ и $M|\xi_i|^3<\infty$, а ω_n – последовательность случайных величин, не зависящих от ξ_i и имеющих следующее распределение:

$$P\{\omega_n=1\}=P\{\omega_n=2n-1\}=\frac{1}{2}.$$

Тогда $\gamma_n=n-1$, $\alpha_n=n$. Легко подсчитать, что для больших n будут выполняться следующие соотношения:

$$\sup_x \left| P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\omega_n} \xi_i < x \right\} - \Phi(x) \right| = \sup_x \left| \frac{1}{2} P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_1 < x \right\} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{2n-1} \xi_i < x \right\} - \Phi(x) \Big| = \sup_x \left| \frac{1}{2} P\left\{ \frac{\xi_1}{\sqrt{n}} < x \right\} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} P\left\{ \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \sum_{i=1}^{2n-1} \xi_i < x \sqrt{\frac{n}{2n-1}} \right\} - \Phi(x) \Big| \geqslant \sup_x \left| \frac{1}{2} E_1(0, x) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x \right) - \Phi(x) \Big| - O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geqslant \frac{1}{3} \Phi(0) = \frac{1}{6}.$$

Это означает, что для достаточно больших n будем иметь с некоторой $C>0$

$$\sup_x | F_{\omega_n}(x) - \Phi(x) | \geqslant C \left(\frac{\max(\tilde{\nu}_3^{\frac{1}{4}}, \tilde{\nu}_3)}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \right).$$

2. Вспомогательные леммы

Приведем несколько оценок, касающихся многомерных нормальных распределений. Следует отметить, что в отличие от одномерного в многомерном случае до сих пор остаются нерешенными некоторые задачи, связанные с нормальным распределением, которые можно формулировать следующим образом. Пусть мы имеем два нормальных распределения Φ_B и Φ_C (еще более общая постановка, если средние значения распределений не совпадают): а) требуется оценить величину

$$\sup_{A \in \mathscr{E}_2} | \Phi_B(A) - \Phi_C(A) |$$

посредством какой-нибудь меры близости матриц B и C; б) построить оценки величины $| \Phi_B(A) - \Phi_C(A) |$, $A \in \mathscr{E}_2$ с выделенной зависимостью от $\beta(A)$ (или другой величиной, стремящейся к нулю при $\beta(A) \to \infty$) и близости матриц B и C.

Для первой задачи имеется результат Бикялиса [1], а для второй — нам не известен ни один результат.

Приведем здесь некоторые оценки таких типов, но для весьма специального случая, так как в рассматриваемой нами задаче матрицы B и C оказываются весьма простыми, или могут быть сведены к таковым с помощью ортогональных трансформаций.

Лемма 2. *Пусть* $\Delta_{\varepsilon, \Lambda}(A) = \Phi_\Lambda(A) - \Phi_{\varepsilon^2 \Lambda}(A)$. *Для всех* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и всех невырожденных матриц* Λ

$$\sup_{A \in \mathfrak{A}} | \Delta_{\varepsilon, \Lambda}(A) | \leqslant (1 - \varepsilon^k) + \frac{k}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right). \quad (2.5)$$

Доказательство. Пусть T — трансформация, переводящая Λ в единичную матрицу I. Так как $\varepsilon^2\Lambda$ при такой трансформации перейдет в $\varepsilon^2\mathrm{I}$, а $T\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$, то

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}|\Delta_{\varepsilon,\Lambda}(A)|=\sup_{A\in\mathfrak{A}}|\Delta_{\varepsilon,\mathrm{I}}(A)|,$$

$$\Delta_{\varepsilon,\mathrm{I}}(A)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\int_A\left(\frac{1}{\varepsilon^k}e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^k x_i^2}-e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k x_i^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\left(\frac{1}{\varepsilon^k}-1\right)\int_A e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|x|^2}dx+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\int_A e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)|x|^2}-1\right)dx. \tag{2.6}$$

Отсюда, применяя неравенство $|1-e^{-z}|\leqslant z$ при $z\geqslant 0$ (используем, что $\varepsilon^2\leqslant 1$) легко получаем (2.5).

Лемма 3. *Пусть Λ — невырожденная ковариационная корреляционная матрица. Тогда для всех $A\in\mathscr{E}_2$ имеют место следующие оценки*

при $0<\varepsilon\leqslant 1$

$$|\Delta_{\varepsilon,\Lambda}(A)|\leqslant(1-\varepsilon^k)\frac{C_5(k)}{1+\beta^3(A)}+\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)\frac{C_6(k)}{1+\beta^3(A)}, \tag{2.7}$$

$$|\Delta_{\varepsilon,\Lambda}(A)|\leqslant\frac{C_7(k)}{1+\beta^3(A)}, \tag{2.9}$$

при $1<\varepsilon\leqslant a$

$$|\Delta_{\varepsilon,\Lambda}(A)|\leqslant\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\frac{C_8(k,a)}{1+\beta^3(A)}, \tag{2.10}$$

при $\varepsilon>a>1$

$$|\Delta_{\varepsilon,\Lambda}(A)|\leqslant\frac{C_9(k)}{1+\beta^3(A)}\varepsilon^3, \tag{2.11}$$

где константы могут быть оценены следующим образом:

$$C_5(k)\leqslant C\cdot k^2,\quad C_6(k)\leqslant C\cdot k^4,\quad C_7(k)\leqslant C\cdot k^2,$$
$$C_8(k,a)\leqslant C\cdot k^4\cdot a^5,\quad C_9(k)\leqslant C\cdot k^2.$$

Замечание. Можно выделить $\beta^{-\delta}(A)$, $\delta>3$, но тогда и константы станут зависимыми от δ и в (2.11) будет ε^δ.

Доказательство. Заметим, что ортогональные трансформации не меняют расстояния между точками, поэтому, если через A' обозначим множество, полученное из A с помощью ортогональной трансформации, будем иметь $\beta(A)=\beta(A')$.

Обозначим буквой D диагональную матрицу с элементами на диагонали λ_i, $i=1,2,\ldots,k$ $\left(\text{это собственные числа матрицы } \Lambda \text{ и } \prod_{i=1}^k\lambda_i=|\Lambda|\right)$, в которую ортогональная трансформация переводит матрицу Λ. Тогда

$$\Delta_{\varepsilon,\Lambda}(A)=\Phi_{\varepsilon^2\Lambda}(A)-\Phi_\Lambda(A)=\Phi_{\varepsilon^2 D}(A')-\Phi_D(A')=\Delta_{\varepsilon,D}(A').$$

Рассмотрим случай $0<\varepsilon\leqslant 1$. Аналогично формуле (2.6) можем записать

$$\Delta_{\varepsilon, D}(A')=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{|\Lambda|}}\left(\frac{1}{\varepsilon^k}-1\right)\int\limits_{A'}\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right\}dx+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{|\Lambda|}}\int\limits_{A'}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right\}\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right\}-1\right)dx. \quad (2.12)$$

Как и раньше, разбирая отдельно случаи $0\in A'$ и $0\overline{\in} A'$ и имея в виду равенство $\beta(A)=\beta(A')$, получаем

$$|\Delta_{\varepsilon, D}(A')|\leqslant\left(\frac{1}{\varepsilon^k}-1\right)\varepsilon^k\frac{2C_5(k)}{1+\beta^3(A)}+\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)\frac{2C_6(k)}{1+\beta^3(A)},$$

где

$$C_5(k)=\int\limits_{R_k}|x|^3\varphi_{\varepsilon^2 D}(x)\,dx,\qquad C_6(k)=\int\limits_{R_k}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right)|x|^3\varphi_D(x)\,dx.$$

(можно ограничиться множествами, для которых $\beta(A)\geqslant 1$, и тогда $\frac{1}{\beta(A)}\leqslant$ $\leqslant\frac{2}{1+\beta(A)}$). Покажем, что вышезаписанные интегралы могут быть оценены через k:

$$C_5(k)\leqslant\sqrt{k}\int\limits_{R_k}\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^3\right)\varphi_{\varepsilon^2 D}(x)\,dx\leqslant\sqrt{k}\,C\sum_{i=1}^{k}\varepsilon^3\lambda_i^3\leqslant$$

$$\leqslant C\cdot\sqrt{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.13)$$

$$C_6(k)=\int\limits_{R_k}|y|^2\left(\sum_{i=1}^{k}y_i^2\lambda_i^2\right)^{\frac{3}{2}}\varphi_I(y)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right)^{\frac{3}{2}}\int\limits_{R_k}|y|^5\varphi_I(y)\,dy\leqslant Ck^{\frac{5}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.14)$$

Но

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2$$

является следом матрицы D, а так как след матрицы — инвариант для ортогональных преобразований, то

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2=\operatorname{Sp}D=\operatorname{Sp}\Lambda=k,$$

и из (2.13) и (2.14) получаем оценки, указанные в лемме.

Для малых ε оценка (2.7) ухудшается, так как $\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Но ясно, что во втором интеграле из (2.12) можно просто применить оценку

$|1-e^{-z}|\leqslant 1$ при $z\geqslant 0$ и получить оценку (2.9). Если $1<\varepsilon\leqslant a$, то вместо (2.12) запишем $\Delta_{\varepsilon, D}(A')$ следующим образом:

$$\Delta_{\varepsilon, D}(A') = \frac{\varepsilon^{-k}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} \sqrt{|\Lambda|}} \int_{A'} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right\}(1-\varepsilon^k)\,dx+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{|\Lambda|}\,\varepsilon^k}\int_{A'}\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right\}\times$$

$$\times\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right\}\right)dx.$$

Отсюда, так как $\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)>0$, получаем

$$|\Delta_{\varepsilon, D}(A')|\leqslant\left|\frac{1-\varepsilon^k}{\varepsilon^k}\right|\frac{2}{1+\beta^3(A)}\int_{R_k}|x|^3\varphi_D(x)\,dx+$$

$$+\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\frac{2}{1+\beta^3(A)}\int_{R_k}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right)|x|^3\varphi_{\varepsilon^2 D}(x)\,dx=$$

$$=\left|\frac{1-\varepsilon^k}{\varepsilon^k}\right|\frac{C_9(k)}{1+\beta^3(A)}+\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\frac{C_{10}(k,a)}{1+\beta^3(A)},\quad C_{10}(k,a)\leqslant C\cdot k^4\cdot a^5. \quad (2.15)$$

Из (2.15), применяя неравенство $\varepsilon^k-1\leqslant(\varepsilon-1)k\varepsilon^{k-1}$ $(\varepsilon>1)$, получаем (2.10). Требуемую оценку нетрудно получить и в случае $\varepsilon>a$. Обозначим $A_\varepsilon=\varepsilon^{-1}A'$, $B_\varepsilon=A_\varepsilon\cup A'$. Если $0\bar{\in}A$, $\varepsilon>1$, то $\beta(B_\varepsilon)=\beta(A_\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\beta(A')$ и

$$|\Delta_{\varepsilon, D}(A')|=|\Phi_D(A_\varepsilon)-\Phi_D(A')|\leqslant\Phi_D(B_\varepsilon)=\int_{B_\varepsilon}\varphi_D(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\beta^3(B_\varepsilon)}\int_{R_k}|x|^3\varphi_D(x)\,dx\leqslant\frac{C_9(k)}{1+\beta^3(A)}\varepsilon^3. \quad (2.16)$$

В случае $0\in A$, переходя к дополнительному множеству $\bar{A}$, получим (2.16). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $F(x)$, $x\in R_k$ — некоторая функция распределения, а $F_i(x)$, $x\in R_1$, $i=1, 2, \ldots, k$ — ее маргинальные распределения. Тогда для всех $\lambda>0$ и всех $x=(x_1, \ldots, x_k)$*

$$|F(\lambda x)-F(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|F_i(\lambda x_i)-F_i(x_i)|.$$

Неравенство очевидным образом следует из определения ф.р.

Лемма 5 (Сазонов [5]). *Пусть ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ — независимые с.в. с невырожденным распределением $P(A)$, $M\xi_i=0$, матрицей вторых моментов B и конечными моментами третьего порядка. Пусть*

$$F_n(A)=P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\in A\right\}.$$

Тогда для всех $A \in \mathscr{E}_2$

$$|F_n(A)-\Phi_B(A)| \leqslant \frac{C(k)\max\left(\bar{\nu}_3,\ \bar{\nu}_3^{\frac{k}{k+3}}\right)}{\left(1+\beta_B^3(A)\right)\sqrt{n}},$$

где $C(k) \leqslant C \cdot k^5$.

3. Доказательство теорем 5 и 6

Для доказательства оценок (2.1) и (2.2) будем исходить из основного тождества (1.21) и неравенства (1.22), которое запишем для обоих классов $\mathscr{E}_i$, $i=1,2$

$$\Delta_i \leqslant J_{1i}+J_{2i}, \quad i=1,\ 2, \tag{2.17}$$

где

$$J_{1i}=\sum_{r=1}^{\infty} \omega_r \sup_{A\in\mathscr{E}_i} |F_r(A)-\Phi_{rB_1}(A)|,$$

$$J_{2i}=\sum_{r=1}^{\infty} \omega_r \sup_{A\in\mathscr{E}_i} |\Phi_{rB_1}(A)-\Phi_{\alpha B_1}(A)|.$$

Если J'_{ij}, $i,j=1,2$ будет обозначать суммы $\sum\limits_{r>\frac{\alpha}{2}}$, то, используя (1.23), имеем

$$\Delta_i \leqslant J'_{1i}+J'_{2i}+\frac{4\gamma}{\alpha}. \tag{2.18}$$

Применяя оценки из [6] для первой суммы, получим

$$\sup_{A\in\mathscr{E}_i} |F_r(A)-\Phi_{rB_1}(A)| \leqslant \frac{f_i}{\sqrt{r}},$$

где f_i $i=1,2$ — функции от размерности k и псевдомоментов с.в. ξ_1. Эти оценки дает

$$J'_{1i} \leqslant \frac{\sqrt{2}\, f_i}{\sqrt{\alpha}}, \tag{2.19}$$

т.е. мы получаем первые члены в оценках (2.1) и (2.2).

Для оценки J'_{22} применим лемму 2. Легко удостовериться, что

$$\sup_{A\in\mathscr{E}_2} |\Phi_{rB_1}(A)-\Phi_{\alpha B_1}(A)| = \sup_{A\in\mathscr{E}_2} |(\Phi_{\varepsilon^2 \mathrm{I}}-\Phi_{\mathrm{I}})(A)|, \tag{2.20}$$

где $\varepsilon^2=\frac{r}{\alpha}$ при $r<\alpha$ и $\varepsilon^2=\frac{\alpha}{r}$ при $r\geqslant\alpha$. Если $\varepsilon\leqslant 1$, то

$$1-\varepsilon^k \leqslant k(1-\varepsilon) \leqslant k(1-\varepsilon^2) \tag{2.21}$$

и (2.5), (2.20) и (2.21) позволяют заключить, что

$$J'_{22} \leqslant \sum_{\frac{\alpha}{2}<r<\alpha} \omega_r k\left\{\left(1-\frac{r}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}-1\right)\right\}+\sum_{r\geqslant\alpha} \omega_r k\left\{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\alpha}-1\right)\right\} \leqslant \frac{3}{2}\,\frac{k}{\alpha} \sum_{r>\frac{\alpha}{2}} \omega_r |\alpha-r| \leqslant \frac{3k}{2}\,\frac{\gamma}{\alpha}. \tag{2.22}$$

Так как $J'_{21} \leqslant J'_{22}$, то оценки (2.18), (2.19) и (2.22) доказывают теорему 5. Для доказательства теоремы 6 запишем следующее тождество:

$$F_{\omega,1}(A) - \Phi_\Lambda(A) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r\left[\tilde{F}_r\left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\,A\right) - \Phi_\Lambda\left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\,A\right)\right] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r\left[\Phi_\Lambda\left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\,A\right) - \Phi_\Lambda(A)\right],$$

где

$$\tilde{F}_r(A) = P\left\{\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^{r} \xi_i \in A\right\}.$$

Тогда

$$\Delta(A) \leqslant L_1 + L_2, \quad L_1 = \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r\left|(\tilde{F}_r - \Phi_\Lambda)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\,A\right)\right|,$$

$$L_2 = \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r\left|\Phi_\Lambda\left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\,A\right) - \Phi_\Lambda(A)\right|. \tag{2.23}$$

Применяя лемму 5 для всех $A \in \mathscr{E}_2$, имеем

$$\left|\tilde{F}_r\left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\,A\right) - \Phi_\Lambda\left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\,A\right)\right| \leqslant C_3(k)\,\frac{f_2}{\left(1+\beta^3\left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\,TA\right)\right)\sqrt{r}}.$$

А тогда уже нетрудно для всех $A \in \mathscr{E}_2$ получить

$$L_1 \leqslant C_3(k)\,\frac{f_2}{\left(1+\beta^3(TA)\right)\sqrt{\alpha}}. \tag{2.24}$$

Для оценки L_2 в случае $A \in \mathscr{E}_2$ представим члены этой суммы следующим образом:

$$\left|\Phi_\Lambda\left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\,A\right) - \Phi_\Lambda(A)\right| = |\Phi_{\varepsilon^2\Lambda}(A) - \Phi_\Lambda(A)| = |\Delta_{\varepsilon,\Lambda}(A)|,$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{r}{\alpha},$$

и применим лемму 3. Тогда имеем при

$$r \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

$$|\Delta_{\varepsilon,\Lambda}(A)| \leqslant \frac{C_7(k)}{1+\beta^3(A)}; \tag{2.25}$$

при

$$\frac{\alpha}{2} < r \leqslant \alpha$$

$$|\Delta_{\varepsilon,\Lambda}(A)| \leqslant \left(C_5(k)\,k\,\frac{\alpha-r}{\alpha} + C_6(k)\,\frac{\alpha-r}{r}\right)\frac{1}{1+\beta^3(A)}; \tag{2.26}$$

при $\alpha < r \leqslant \frac{3\alpha}{2}$

$$|\Delta_{\varepsilon, \Lambda}(A)| \leqslant \frac{C_8\left(k, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{1+\beta^3(A)} \frac{r-\alpha}{r}; \tag{2.27}$$

при $r > \frac{3}{2}\alpha$

$$|\Delta_{\varepsilon, \Lambda}(A)| \leqslant \frac{C_9(k)}{1+\beta^3(A)} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{2.28}$$

Из этих оценок, как и в [4], следует, что

$$L_2 \leqslant \frac{1}{1+\beta^3(A)} \left(Ck^4 \frac{\gamma}{\alpha} + Ck^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right). \tag{2.29}$$

Из (2.24) и (2.29) вытекает (2.4). В случае $A \in \mathscr{E}_1$ для $\Delta_{\varepsilon, \Lambda}(A)$ следует применить лемму 4 и тогда вместо (2.25)–(2.28) использовать одномерные оценки из [4]. Теорема доказана.

4. Некоторые обобщения. В этом пункте мы обсудим вопрос, насколько существенно в вышеприведенных теоремах требование о конечности дисперсии случайной величины ω. Как видно из доказательств теорем 2 и 5, это требование было нужно только для нормировки суммы $\sum\limits_{i=1}^{\omega} \xi_i$. Отсюда сразу следует, что требование конечности величины β^2 будет ненужным, если либо $M\xi_{ij} = a_j = 0$ $j = 1, 2, \ldots, k$, либо мы возьмем другие нормирующие константы.

Теорема 7. *Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные с.в., имеющие вектор математических ожиданий A и невырожденную матрицу вторых моментов B. Пусть $\omega = \omega(t)$ — целочисленная случайная величина, не зависящая от с.в. ξ_i и имеющая конечное математическое ожидание α. Пусть $d = (d_1, \ldots, d_k)$ вектор, для которого $d_i \to \infty$ при $\alpha \to \infty$. Пусть*

$$\bar{F}_\omega(A) = P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{\omega} \xi_i - \alpha a}{d} \in A\right\},$$

$$\bar{H}_\omega(A) = \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r E_k\left\{(r-\alpha)\frac{a}{d},\ A\right\},$$

а B_2 — матрица вторых моментов с.в.

$$\frac{\xi_1 - a}{d}.$$

Тогда

1) *если выполняются условия* (1.19), *то*

$$\bar{\Delta}_2 = \sup_{A \in \mathscr{E}_2} |\bar{F}_\omega(A) - \bar{H}_\omega * \Phi_{\alpha B_2}(A)| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty;$$

2) *если с.в. ξ_i имеют конечные моменты третьего порядка, то для величины $\bar{\Delta}_2$ справедлива оценка* (2.2).

Если $a=0$, то можем положить $d_i^2=\alpha b_i^2$, а если $D\omega=\beta^2<\infty$, то полагая $d_i^2=\sigma_i^2$, получаем теоремы 2 и 5.

В теореме 6 требование $\beta^2<\infty$ имеет более существенный характер, так как не видно, каким образом можно оценить сумму

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\sum_{r>\frac{3\alpha}{2}}\omega_r r^{\frac{3}{2}}$$

без привлечения величины β^2 (см. [4]).

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 23.VI.1971

Литература

1. А. Бикялис, О центральной предельной теореме в R_k, I., Liet. matem. rink., **XI**, № 1 (1971), 27–58.
2. Б. В. Гнеденко, Г. Фахим, Об одной теореме переноса, ДАН СССР, **187**, №1(1969),
3. В. М. Золотарев, Несколько новых вероятностных неравенств, связанных с метрикой Леви, ДАН СССР, **190**, 5 (1970).
4. С. Х. Сиражцинов, М. Маматов, Ш. К. Форманов, Равномерные оценки в предельных теоремах для сумм случайного числа независимых случайных величин, Изв. АН Уз. ССР, № 5 (1970).
5. В. В. Сазонов, Оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Труды 6 Берклейского симпозиума (в печати).
6. В. Паулаускас, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, II, Liet. matem. rink., IX, № 4 (1969), 791–816.
7. В. Паулаускас, Одна оценка скорости сходимости с использованием псевдомоментов, Liet. matem. rink., **XI**, № 3, (1971), 317–327.
8. L. J. Gleser, On limiting distributions for sums of a random number of independent random vectors, The Ann. of Math. Stat., **40**, № 3 (1969).
9. F. J. Anscombe, Large sample theory of sequential estimation. Proc. Cambridge Phil. Soc., 48 (1952).
10. H. Robbins, Bull. Math. Soc., **54**, 1151 (1948).
11. H. Teicher, On random sums of random vectors. The Ann. of Math. Stat., **36**, 5 (1965).
12. S. Guiasu, Contributii la studiul repartitiei limita a proceselor stocastic cu limp discret aleator, Studii si sercetari Matem. 19f, **7**, 971 (1967).

APIE ATSITIKTINIO SKAIČIAUS ATSITIKTINIŲ DAUGIAMAČIŲ VEKTORIŲ SUMAS

V. Paulauskas

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjamos atsitiktinio skaičiaus atsitiktinių daugiamačių vektorių sumos. Gautos konvergavimo teoremos, apibendrinančios Ankombo [9], Robinso [10], Gnedenkos ir Fachimo [2] rezultatus, o taip pat tokių sumų pasiskirstymo dėsnių konvergavimo greičio įvertinimai, kurie sustiprina ir apibendrina darbo [4] rezultatus. Parodyti pavyzdžiai, pagrindžiantys gautą liekamojo nario struktūrą. Darbe naudojamas kompozicijų metodas.

ON SUMS OF A RANDOM NUMBER OF RANDOM MULTI-DIMENSIONAL VECTORS

V. Paulauskas

(*Summary*)

The paper considers sums of a random number of random multi-dimensional vectors. Some theorems are obtained which generalize the one-dimensional results of Anscombe [9], Robbins [10], Gnedenko and Fachim [2]. The estimates of speed of convergence for such sums are also obtained. These estimates strengthen and generalize the results of [4]. The main method used in the paper is the method of convulutions.