ИНФОРМАЦИЯ

О Двенадцатой конференции Литовского математического общества

24–26 июня 1971 года в Каунасе состоялась Двенадцатая конференция математиков Литвы. Конференция была организована кафедрами математики Каунасского политехнического института и Литовским математическим обществом.

В работе конференции приняли участие 150 ученых вузов и институтов Академии Наук Литовской ССР и учителей средних школ республики.

Конференция являлась также четвертым съездом Литовского математического общества.

На заключительном пленарном заседании было избрано новое правление Литовского математического общества, в состав которого вошли: И. Бальчитис, Р. Баршаускас, В. Близникас, Е. Вилкас, Л. Вилкаускас, П. Катилюс, В. Клебанскис, Й. Кубилюс, В. Лютикас, А. Нафталевич, М. Сапаговас, В. Статулявичюс, И. Тейшерскис.
В ревизионную комиссию избраны: В. Паулаускас, В. Пипирас, Р. Ясилионис.

ПРОГРАММА КОНФЕРЕНЦИИ

1. Й. Кубилюс. Отчет правления Литовского математического общества.
2. В. Паулаускас.Отчет ревизионной комиссии Литовского математического общества.
3. А. Бараускас, А. Рауделюнас. Подготовка специалистов прикладной математики в Литве.
4. Доклады на секциях.
5. Дискуссии.
6. Выборы правления Литовского математического общества.
7. Выборы ревизионной комиссии Литовского математического общества.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Секция теории чисел

1. И. Кубилюс (ВГУ). **О законе больших чисел для аддитивных арифметических функций.**

Пусть $f(m)$ — комплекснозначная аддитивная арифметическая функция. Обозначим

$$A_1(n)=\sum_{p^\alpha\leqslant n}\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha},\quad D^2(n)=\sum_{p^\alpha\leqslant n}\frac{|f^2(p^\alpha)|}{p^\alpha},$$

$$A_2(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{f(p)}{p},\quad B^2(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{|f^2(p)|}{p},$$

где суммы берутся по всем степеням простых чисел $p^\alpha\leqslant n$ или простым числам $p\leqslant n$ Положим

$$S(n)=\sum_{m=1}^{n}|f(m)-A_1(n)|^2$$

и в случае сильно аддитивной функции $f(m)$

$$T(n)=\sum_{m=1}^{n}|f(m)-A_2(n)|^2.$$

Автором [1, 2] доказано, что

$$S(n)\leqslant C_1 nD^2(n),\quad T(n)\leqslant C_2 nB^2(n),$$

где C_1, C_2 — абсолютные константы. Эти неравенства весьма полезны в теории распределения значений арифметических функций. Недавно П. Д. Т. А. Эллиотт [3] с помощью метода большого решета доказал, что

$$S(n)\leqslant C_3(n)\, nD^2(n),$$

причем $C_3(n)\leqslant 51$ для достаточно больших n.

Оказывается, что первоначальный метод автора дает более точные результаты:

$$S(n)\leqslant\left(\lambda_1+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right) nD^2(n),$$

$$T(n)\leqslant\left(\lambda_2+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right) nB^2(n).$$

Здесь $\lambda_1<2,3$; $\lambda_2<2{,}29$, а множитель B ограничен абсолютной константой. Если $f(m)$ — вещественная функция постоянного знака, то

$$S(n)\leqslant\left(1+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right) nD^2(n),$$

$$T(n)\leqslant\left(1+B\sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}\right) nB^2(n).$$

Литература

1. Й. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Успехи матем. наук, 11, № 2, (1956), 31–66.
2. Й. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел. Вильнюс, 1959, 1962.
3. P. D. T. A. Elliott, The Turán–Kubilius inequality, and a limitation theorem for the large sieve. Amer. J. Math., 92 (1970), 293–300.

2. З. Юшкис (ВГУ). **К вопросу об оцеке остаточного члена в предельных законах мультипликативных функций.**

3. Э. Манставичюс (ВГУ). **Об асимптотическом разложении законов распределения мультипликативных арифметических функций.**

Пусть $g(m)$ — вещественная мультипликативная функция, для которой существуют натуральное число $s\geqslant 1$, действительные числа a, $c>0$ и $\lambda\neq 0$ такие, что ряды по простым числам p

$$\sum_{g(p)\leqslant 0}\frac{\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p<c}}\frac{a_p\ln p}{p},\quad \sum_{\substack{g(p)>0\\ a_p\geqslant c}}\frac{\ln p}{p},$$

$$\sum_{g(p)\neq 0}\frac{a_p^s}{p},\quad \sum_{p}\sum_{\substack{\alpha=2\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{|\ln|g(p^\alpha)||^s}{p^\alpha},$$

где при $g(p)\neq 0$ положено $a_p=|\ln|g(p)|-a\ln p-\lambda|$, сходятся. Кроме того, пусть $g(m)$ принимает значения из некоторой геометрической прогрессии, т. е. $g(m)=q^{f(m)}$ ($f(m)$ — целые числа, $q\neq 0$).

Положим для простоты $\sigma=|\lambda|\sqrt{\ln\ln n}$, $a_n=a\ln n+\lambda\ln\ln n$. Пусть $E_0(u)\equiv-1$ и

$$E_r(u)=(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{2\pi ilu}}{(2\pi il)^r}\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots)$$

— периодические функции, выступающие в формулах суммирования Эйлера—Маклорена. Если $\nu_n\{\ldots\}$ означает частоту натуральных $m\leqslant n$ с указанными в скобках свойствами, то для рассматриваемых мультипликативных арифметических функций справедлива следующая теорема.

Теорема. *При* $x\neq 0$

$$\nu_n\left\{e^{-\frac{a_n}{\delta}}\,|g(m)|^{\frac{1}{\sigma}}\operatorname{sgn}g(m)<x\right\}=$$

$$=\sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}}\left(\frac{\ln|q|}{\sigma}\right)^r E_r\left(\frac{a_n}{\ln|q|}+\frac{\sigma}{\ln|q|}\ln|x|\right)\times$$

$$\times V_{s-1-r}^{(r)}(\ln|x|)+\frac{B\ln\sigma}{\sigma^s},$$

где B ограничена равномерно по n и x. Здесь

$$V_r(\ln|x|)=\begin{cases}V_{0r}(\ln x) & \textit{при}\quad x>0,\\ V_{1r}\big(\ln(-x)\big) & \textit{при}\quad x<0,\end{cases}$$

а

$$V_{kr}(y)=\frac{1-\omega}{2}+Q_{kr}\Big(-G(y)\Big)\qquad (k=0,\ 1),$$

где $Q_{kr}\big(-G(y)\big)$ получается из некоторых многочленов $Q_{kr}(-z)$ путем замены z^j $(j=0,\ 1,\ \ldots)$ на $G^{(j)}(y)$. Здесь $G(y)$ — функция распределения нормального закона и

$$\omega=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right).$$

Метод доказательства опирается на аналитическую лемму работы автора [1] и использует идеи Й. Кубилюса [2]. Аналогичный результат имеет место для действительных мультипликативных функций, которые „почти на всех" простых числах принимают отрицательные значения.

Литература

1. Э. Манставичюс, К оценке остаточного члена в интегральных асимптотических законах арифметических функций, Liet. matem. rink. XII, 1 (1972), 165—172.

2. Й. П. Кубилюс, Асимптотическое разложение законов распределения некоторых арифметических функций, Liet. matem. rink. II, 1, (1962), 61—73.

4. Г. Маркшайтис (ВГУ). **Когомологии про — p-групп.**

5. Р. Цибульските (КПИ). **Закон распределения с остаточным членом образующих элементов в свободных числовых подгруппах.**

6. Й. Кубилюс, А. Лауринчикас (ВГУ). **Теоремы о больших уклонениях значений мультипликативных функций.**

7. П. Варбанец (Одесский ГУ). **Целые точки овала в арифметической прогрессии.**

Пусть $A_k(x,\ D)$ означает количество решений сравнения

$$u^{2k}+v^{2k}\equiv l\ (\operatorname{mod}D),\quad (l,\ D)=1,\ k\geqslant 1\ \text{— натуральное},$$

в овале

$$u^{2k}+v^{2k}\leqslant x.$$

Справедливо утверждение.

Теорема. *При* $x \geqslant D^{\frac{3}{2}k+\varepsilon}$

$$A_k(x, D) = \frac{x^{\frac{1}{k}}}{D} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2k}\right)}{k\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} \cdot \frac{H(D)}{D} + O\left(D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{x^{\frac{1}{k}}}{D^{1+\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{x^{\frac{2k-1}{4k^2}}}{D^{\frac{k-1}{2k}-\varepsilon}}\right);$$

здесь $H(D)$ — *число решений сравнения* $u^{2k}+v^{2k} \equiv l \pmod D$, $0 \leqslant u, v < D$.

Заметим, что для случая $(k, \varphi(D)) = 1$ имеем

$$\frac{H(D)}{D} = \gamma_0 \prod_{p \mid D}\left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p}\right), \quad \gamma_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } D \not\equiv 0 \pmod 4, \\ 2, & \text{если } D \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Доказательство теоремы основано на двух леммах.

Лемма 1. *Пусть* P — *простое,* u_1, u_2 — *целые,* $(u_1, u_2, p^n) = p^m$. *Тогда*

$$\left| \sum_{\substack{l_1, l_2 \\ l_1^{2k}+l_2^{2k} \equiv l \pmod{p^n}}} e^{2\pi i \frac{u_1 l_1 + u_2 l_2}{p^n}} \right| \leqslant k p^{\frac{n+m}{2}}. \tag{1}$$

Эта лемма есть следствие оценок тригонометрических сумм вдоль алгебраической кривой над конечным полем и p-адического описания решений сравнения $l_1^{2k}+l_2^{2k} \equiv l \pmod{p^n}$, $n > 1$.

Лемма 2. *При* $X \geqslant 1$, $Y \geqslant 1$, $\rho > 1$ *справедливо представление*

$$A_k(x, D) = \frac{x^{\frac{1}{k}}}{D} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2k}\right)}{k\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} \cdot \frac{H(D)}{D} +$$

$$+ \frac{x^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}}}{D^{2-\frac{1}{k}}} \; \frac{8\Gamma^2\left(\frac{1}{2k}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{k}}(2k)^{1-\frac{1}{2k}}} \sum_{0<|m|\leqslant y} \; \sum_{\substack{l_1, l_2 \\ l_1^{2k}+l_2^{2k} \equiv l \pmod D}} e^{2\pi i \frac{m l_1}{D}} +$$

$$+ \frac{x^{\frac{1}{k}}}{k^2 \rho D} \sum_{0<|m|, |n| \leqslant X} \; \sum_{\substack{l_1, l_2 \\ l_1^{2k}+l_2^{2k} \equiv l \pmod D}} e^{2\pi i \frac{m l_1 + m l_2}{D}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{k\rho}-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\pi i \frac{x^{\frac{1}{2k}} u^{\frac{1}{2}k\rho}}{D} \left(m \cos^{\frac{1}{k}} \varphi + n \sin^{\frac{1}{k}} \varphi\right)} (\sin\varphi\cos\varphi)^{\frac{1}{k}-1} \, d\varphi \, du +$$

$$+ O\left(\frac{x^{\frac{1}{2k}}}{D^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \log Y\right) + O\left(\frac{x^{\frac{1}{2k}-\frac{1}{4k^2}}}{D^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^2}}}\right) + O\left(\frac{\rho D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{Y}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{\rho^4 D^{\frac{5}{2}+\varepsilon}}{x^{\frac{1}{k}}} X^{-2}\right) + O\left(\frac{x^{\frac{1}{k}}}{\rho D}\right). \tag{2}$$

Для доказательства этого представления принимается формула суммирования Пуассона к сумме

$$\sum_{u,\,v=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l_1 l_2 \\ l_1^{2k}+l_2^{2k}\equiv l \pmod D}} \exp\left\{-\left(\frac{(l_1+Du)^{2k}+(l_2+Dv)^{2k}}{x}\right)^{\rho}\right\}.$$

Асимптотические представления возникающих при этом интегралов вместе с (1) приводят к соотношению (2).

Теперь результат теоремы следует из лемм 1 и 2, если положить

$$X=\frac{D\rho}{x^{\frac{1}{2}k}}, \quad Y=D^{\frac{1}{4}}, \quad \rho=D^{\varepsilon},$$

8. Г. Мисявичюс (ВГУ). **Применение вероятностных методов в теории диофантовых приближений.**

Методы исследования, примененные в [3], переносятся на случай функций от элементов цепных дробей, позволяя оценить остаточные члены в предельных теоремах, полученные в [1, 2].

Пусть $t=[a_1, a_2, \ldots]$ разложение $t\in(0, 1)$ в цепную дробь и преобразование T задается соотношением $Tt=\left\{\frac{1}{t}\right\}$, где фигурные скобки означают дробную часть. Обозначим

$$S_n=\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j t), \quad MS_n=\int_0^1 S_n(t)\,dt,$$

$$DS_n=\int_0^1 \left(S_n(t)-MS_n\right)^2 dt, \quad Z_n=\frac{S_n-MS_n}{\sqrt{DS_n}},$$

$$F_n(x)=\operatorname*{mes}_{t\in(0,\,1)}\{Z_n(t)<x\}.$$

Теорема 1. *Пусть для измеримой на* (0, 1) *функции* $f(t)$ *выполнены условия:*

1. $\int_0^1 |f(t)|^{3+\delta}\,dt<\infty, \qquad 0<\delta<1;$

2. $\int_0^1 |f(t+h)-f(t)|^2\,dt<Ah^{\alpha}, \qquad A,\ h>0;$

3. $DS_n\to\infty.$

Тогда

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|<\frac{c_1\log n}{\sqrt{n}}.$$

Аналогичные результаты получены и для сумм вида

$$\sum_{j=1}^{n} f([a_j;\ a_{j-1},\ \ldots,\ a_1]),$$

из которых, в частности, следует такой результат для знаменателей цепных дробей $q_n(t)$.

Теорема 2. *Пусть* $F_n(x)$ *означает меру множества точек, для которых*

$$q_n(t)<x.$$

Тогда имеет место оценка

$$|F_n(x)-\Phi(x)|<\frac{c_3\log n}{\sqrt{n}}.$$

Литература

1. И. П. Кубилюс, Предельные теоремы для сумм слабозависимых величин в теории диофантовых приближений, Liet. matem. rink., V, № 2 (1965).
2. Г. А. Мисявичус, Предельные теоремы для распределения функций от элементов цепных дробей, Liet. matem. rink., X, № 2 (1970).
3. Г. А. Мисявичус, Асимптотические разложения для характеристических функций сумм вида $\Sigma\varphi(2^k t)$, Liet. matem. rink. XII, № 1, (1972).

9. А. Матуляускас (ВГУ). **Плотностные теоремы для ζ-функции Гекке вещественного квадратичного поля.**

Пусть $\mathfrak{m}\neq 0$ — целый идеал вещественного квадратичного поля K, ζm — целое рациональное число, $s=\sigma+it$ — комплексное переменное. Обозначим через (s, Ξ) дзета-функцию Гекке с характером Ξ модуля $\mathfrak{m}$ показателя m.

Теорема 1. *Пусть* $\frac{1}{2}\leqslant\omega<1$, $M\geqslant 2$, $T\geqslant 2$. *Число нулей* $\xi(s, \Xi)$ *с* $|m|\leqslant M$, *лежащих в области* $R:\omega\leqslant\sigma<1$, $E(\Xi)\leqslant|t|\leqslant T$, *оценивается как*

$$O\,[T(M+T)^{2g(r)-1}]^{2(1-\omega)}\ln^{15}(M+T),$$

где

$$E(\Xi)=\begin{cases}1, & \textit{если } \Xi \textit{ — главный характер},\\ 0 & \textit{иначе},\end{cases}$$

$$g(r)=\begin{cases}\dfrac{7+5r}{13}, & \textit{если } \dfrac{229}{291}<r\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{229+197r}{458}, & \textit{если } \dfrac{7}{25}\leqslant r\leqslant\dfrac{229}{291},\\[2mm] \dfrac{17349+16181r}{35282}, & \textit{если } 0\leqslant r<\dfrac{7}{25},\end{cases}$$

r определяется соотношением

$$\left|\,2|t|-2\pi|m|\ln^{-1}\eta\,\right|\asymp\left|\,2|t|+2\pi|m|\ln^{-1}\eta\,\right|^r,$$

$\eta>1$ — *основная единица* $\bmod\,\mathfrak{m}$.

Теорема доказывается путем применения приближенного функционального уравнения для $\zeta(s, \Xi)$, оценки среднего значения модуля функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it, \Xi\right)$ и неравенства

$$\sum_{n\leqslant X}a_n^2\leqslant X\ln X, \qquad (X\geqslant 2),$$

где a_n — число идеалов поля K с нормой, равной n.

Теорема 2. *При* $\frac{4}{5}\leqslant\omega<1$ *имеет место оценка*

$$Q(\omega, T, M)\leqslant(M^{\lambda_1(\omega)}T^{\lambda_2(\omega)})^{(3+\varepsilon_1)(1-\omega)+\varepsilon_2}\ln^c MT,$$

где $Q(\omega, T, M)$ *— число нулей всех функций* $\zeta(s, \Xi)$ mod $\mathfrak{m}$ с $|m|\leqslant M$ *в области* R, c *— положительная постоянная,* $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$,

$$\lambda_1(\omega)=\frac{3\omega+1}{3\omega^2-5\omega+3}, \quad \lambda_2(\omega)=\frac{6\omega-1}{6\omega^2-10\omega+5},$$

а T, M, и R разъяснены в формулировке т. 1.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству леммы 17 из [1], причем для оценки среднего числа идеальных делителей используется формула

$$\sum_{\substack{0<|N\alpha|\leqslant X \\ \varphi_1<\ln\frac{\alpha}{\alpha'}<\varphi_2}}^{*} \tau(\alpha)=(A_1\ln X+A_2)\,X(\varphi_2-\varphi_1)+O\left(X^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right), \quad (A_1>0,\ A_2>0),$$

где $N\alpha$ — норма целого идеального числа α, α' — число, сопряженное с α, $\tau(\alpha)$ — число неассоциированных делителей числа α, $X\geqslant 2$, φ_1, φ_2 — вещественные числа, $0<\varphi_2-\varphi_1<\ln\eta$, а * показывает, что при суммировании из каждой системы ассоциированных идеальных чисел берется только по одному представителю.

Теорема 3. *Пусть ρ — простое идеальное число, γ — целое идеальное число, взаимно простое с $\mathfrak{m}$, h — число классов идеалов поля K, φ — функция Эйлера. Тогда*

$$\sum_{\substack{|N\rho|\leqslant X \\ \rho\equiv\gamma\,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}),\ \varphi_1<\ln\frac{\rho}{\rho'}<\varphi_2}}^{*} 1=\frac{(\varphi_2-\varphi_1)\,X}{2\pi h\varphi(\mathfrak{m})\ln X}\Big(1+o(1)\Big)+O\left(X^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\right),$$

где φ_1 и φ_2 — числа из т. 2.

Теорема 3 следует из леммы Виноградова, т. 2 и оценки

$$Q(\omega,\ \ln T,\ M)\ll\begin{cases}(MT)^{(6+\varepsilon)(1-\omega)}\ln^{c}MT,\\ (MT)^{4(1-\omega)+\varepsilon}.\end{cases}$$

Литература

1. Й. Кубилюс, Об одной задаче многомерной аналитической теории чисел, Ученые записки Вильнюсского ГУ, **IV** (1955), 5–43.

10. Р. Слесорайтене (КПИ). **Аналог теоремы Малера-Спринджука для полиномов третьей степени от двух переменных.**

11. А. Вайткявичюс (Средняя школа, Шакяй). **Об одном общем признаке делимости целых чисел.**

Довольно удачный общий признак делимости чисел можно получить как следствие из обобщенной теоремы Безу. Эта теорема, доказательство которой не представляет трудностей, заключается в следующем.

Теорема. *Остаток от деления многочлена $\alpha^l f(x)$, где*

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — целые и в совокупности взаимно простые числа, n — натуральное число, на двучлен

$$g(x)=\alpha x^m-\beta,$$

где α и β — целые и взаимно простые числа, m — натуральное число $(1\leqslant m\leqslant n-1)$, $l=\left[\frac{n}{m}\right]$, равен

$$\begin{aligned}R(x)=&(a_{n-m+1}\alpha^l+a_{n-2m+1}\alpha^{l-1}\beta+a_{n-3m+1}\alpha^{l-2}\beta^2+\ldots)x^{m-1}+\\&+(a_{n-m+2}\alpha^l+a_{n-2m+2}\alpha^{l-1}\beta+a_{n-3m+2}\alpha^{l-2}\beta^2+\ldots)x^{m-2}+\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\&+(a_n\alpha^l+a_{n-m}\alpha^{l-1}\beta+a_{n-2m}\alpha^{l-2}\beta^2+\ldots).\end{aligned}$$

Следствие. *Из упомянутой выше теоремы следует, что для того, чтобы $f(x)$ делился на $g(x)$, т. е. чтобы $R(x)\equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{cases}a_{n-m+1}\alpha^l+a_{n-2m+1}\alpha^{l-1}\beta+a_{n-3m+1}\alpha^{l-2}\beta^2+\ldots=0,\\ a_{n-m+2}\alpha^l+a_{n-2m+2}\alpha^{l-1}\beta+a_{n-3m+2}\alpha^{l-2}\beta^2+\ldots=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_n\alpha^l+a_{n-m}\alpha^{l-1}\beta+a_{n-2m}\alpha^{l-2}\beta^2+\ldots=0.\end{cases}$$

Значениями α, подлежащими испытанию, являются делители коэффициента a_0 одного знака, например, положительные, включая и 1, а значениями β, подлежащими испытанию, являются делители свободного члена a_n, как положительные, так и отрицательные, включая и ± 1.

Из указанного выше следствия вытекает следующий общий признак делимости натурального числа:

$$N=a_0b^n+a_1b^{n-1}+a_2b^{n-2}+\ \dots\ +a_{n-1}b+a_n,$$

где $b\geqslant 2$ — основание системы счисления, a_k — цифры числа N в этой системе $(0\leqslant a_k\leqslant b-1)$, на число вида

$$M=\alpha b^m-\beta,$$

здесь α и m — натуральные числа, $(\alpha, M)=1$, β — целое число, а также на делители числа M, а именно:

для того, чтобы число N разделилось на число M, необходимо и достаточно, чтобы число

$$\begin{aligned}R=&(a_{n-m+1}b^{m-1}+a_{n-m+2}b^{m-2}+\dots+a_n)\,\alpha^l+\\&+(a_{n-2m+1}b^{m-1}+a_{n-2m+2}b^{m-2}+\dots+a_{n-m})\,\alpha^{l-1}\beta+\\&+(a_{n-3m+1}b^{m-1}+a_{n-3m+2}b^{m-2}+\dots+a_{n-2m})\,\alpha^{l-2}\beta^2+\\&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

разделилось на число M.

Практически сказанное выше означает следующее:

чтобы узнать, делится ли число N на число M или нет, надо число N разбить на грани по m цифр в каждой грани, начиная справа, затем первую грань умножить на α^l, вторую — на $\alpha^{l-1}\beta$ и т. д., последнюю — на β^l и полученные произведения сложить. Если полученное число R разделится на M, то и данное число разделится на M.

В случаях, когда R довольно большое число, для него вторично применяется указанный выше прием.

Нетрудно понять, что если $\alpha=1$, то $N\equiv R \pmod M$, т.е. указанный признак делимости является одновременно и признаком равноостаточности. Если же $\alpha>1$, то указанный выше признак делимости уже не является признаком равноостаточности.

Давая b, α, β, m разные значения, можем получить признаки делимости на конкретно указанные числа.

Например, если $b=10$, $M=10^2-1=9\cdot 11$, то получим

$$N\equiv R=(10a_{n-1}+a_n)+(10a_{n-3}+a_{n-2})+\dots \pmod{99}.$$

Если $b=10$, $M=2\cdot 10-1=19$, то получим

$$R=a_0+2a_1+2^2a_2+\ \dots\ +2^na_n.$$

Секция геометрии

1. В. Близникас (ВГПИ). **К вопросу о геометрии неголономных многообразий.**
2. И. Близникене (ВГПИ). **Полунеголономные конгруэнции.**

Многообразие Грассмана $Gr(1, 3)$, оснащенное симметрическим тензорным полем a_{pq} $(p,\ q=1,\ 2)$, называется полунеголономной конгруэнцией первого рода $K_1Gr(1, 3, 1)$, а многообразие Грассмана $Gr(1, 3)$, оснащенное тензорным полем $a^{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta=3,\ 4)$, — полунеголономной конгруэнцией второго рода $K_2Gr(1, 3, 1)$. Рассмотрена геометрия первых двух дифференциальных окрестностей этих конгруэнций, т. е. найдены подобъекты первых двух дифференциально-геометрических объектов рассматриваемых многообразий $K_1Gr(1, 3, 1)$ и $K_2Gr(1, 3, 1)$ и даны их геометрические интерпретации. Доказано, что третий фундаментальный дифференциально-геометрический объект полунеголономной конгруэнции первого рода является полным.

Многообразие Грассмана $Gr(1, n)$, оснащенное симметрическим тензорным полем a_{pq}, называется полунеголономной фокальной псевдоконгруэнцией первого рода пространства P_n. Рассмотрена дифференциальная геометрия первых двух окрестностей этого многообразия.

3. Р. Восилюс (ВГПИ). **Подмногообразия однородных пространств.**

При помощи аппарата „джет-продолжений" векторных расслоений обобщается понятие линейного касательного репера подмногообразия однородного пространства.

4. С. Григелионис (ВГПИ). **Вторая дифференциальная окрестность неголономного комплекса пространства P_4.**

Продолжен фундаментальный объект первого порядка неголономного комплекса пространства P_4 [1]. Полученный в результате этого продолжения фундаментальный объект второго порядка имеет более 30 подобъектов. Дана геометрическая интерпретация некоторых из них.

Литература

1. С. И. Григелионис, О неголономном комплексе пространства P_4. Труды геометрического семинара, т. III (в печати).

5. З. Лупейкис (ВГПИ). **К вопросу о геометрии систем дифференциальных уравнений в частных производных.**

Изучается геометрия некоторых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядков в частных производных относительно невырожденных преобразований независимых переменных u^α и неизвестных функций x^i : $x^{i'}=x^{i'}(x^i, u^\alpha)$, $u^{\alpha'}=u^{\alpha'}(u^\alpha)$ $(i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n; \alpha, \beta \ldots = 1, \ldots, m)$.

Под геометрией любой системы дифференциальных уравнений второго порядка понимается геометрия пространства струй первого порядка V_{n+m+nm} с заданным фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом, компонентами которого являются функции — коэффициенты данной системы дифференциальных уравнений.

Под геометрией любой системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных понимается геометрия пространства V_{n+m}, являющегося базой пространства струй первого порядка, с заданным фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом, который образуют функции, являющиеся коэффициентами системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных.

Доказано существование объектов аффинно и линейной дифференциально-геометрических связностей пространств V_{n+m} и V_{n+m+nm} и указан порядок их охвата данным фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом для четырех классов систем дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и для двенадцати классов систем дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.

Литература

1. В. И. Близникас, О геометрии нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка, Liet. matem. rink. VII, № 2 (1967), 231—248.

6. И. Медведевайте (ВГПИ). **Метрическое пространство гиперплоских элементов постоянной кривизны.**

Рассмотрим метрическое пространство гиперплоских элементов $\mathfrak{M}_n$ [1], скалярная кривизна которого не зависит от направления, заданного в каждой точке.

Определение. Если $\mathfrak{x}^i$ и Y^i — векторные поля, определенные на $\mathfrak{M}_n$, то величина

$$\underset{2}{R}(x, u, \lambda) = \frac{R_{ijkp}\,\mathfrak{x}^i \mathfrak{x}^k Y^j Y^p}{(g_{ik}g_{jp}-g_{ij}g_{kp})\,\mathfrak{x}^i \mathfrak{x}^k Y^j Y^p},$$

где R_{ijkp} — тензор кривизны, называется скалярной кривизной пространства $\mathfrak{M}_n$ относительно 2-мерного направления, характеризуемого бивектором $\lambda^{ij}=x^i\, Y^j - x^j Y^j$

Если R_l не зависит от λ, то пространство $\mathfrak{M}_n$ называется пространством постоянной кривизны относительно 2-мерного направления или частично изотропным пространством $\mathfrak{M}_n$.

Пространства $\mathfrak{M}_n$ с абсолютным параллелизмом гиперплоских элементов и нулевым первым тензором кручения, т. е. такие, для которых $R^i_{jkp}\, u_i=0$ и $R^i_{jk}=0$, будем обозначать через $\mathfrak{N}_n$.

Получено, что для фиксированного гиперплоского элемента пространство $\mathfrak{N}_n$ является частично изотропным тогда и только тогда, когда

$$R_{ijkp}=\underset{2}{R}\,(g_{ik}\, g_{jp}-g_{ij}\, g_{kp}).$$

В частично изотропном пространстве $\mathfrak{N}_n$ имеет место теорема, аналогичная теореме Шура в римановом пространстве.

Теорема Шура. *Скалярная кривизна* $\underset{2}{R}$ *частично изотропного пространства* $\mathfrak{N}_n$ *сохраняет постоянное значение в каждой точке.*

Римановы пространства постоянной кривизны относительно 3-мерного направления рассматривал Федищенко [2]. Введем аналогичное понятие для метрического пространства $\mathfrak{M}_n$.

Определение. Если x^i_1, x^i_2, x^i_3 — векторные поля, заданные на $\mathfrak{M}_n$, то величина

$$\underset{3}{R}\,(x,u,x)=\frac{R_{[i|jkp}\, g_{q]h]}\, x^i_1\, x^k_1\, x^j_2\, x^p_2\, x^q_3\, x^h_3}{2g_{[ik}\, g_{[jp}\, g_{q]h]}\, x^i_1\, x^k_1\, x^j_2\, x^p_2\, x^q_3\, x^h_3}$$

называется скалярной кривизной пространства $\mathfrak{M}_n$ в 3-мерном направлении, порожденном данными векторными полями.

Если $\underset{3}{R}$ не зависит от выбора 3-мерной площадки в каждой точке, то пространство $\mathfrak{M}_n$ будем называть пространством постоянной кривизны относительно 3-мерных площадок.

Оказывается, что для пространств постоянной кривизны относительно 3-мерных площадок справедлива теорема Шура.

Получено, что частично изотропные пространства $\mathfrak{N}_n$ являются и пространствами постоянной кривизны относительно 3-мерных площадок. Доказывается, что при $n\geqslant 5$ всякое пространство $\mathfrak{N}_n$ постоянной кривизны относительно 3-мерных площадок является частично изотропным пространством. Найден пример пространства $\mathfrak{N}_4$ постоянной кривизны относительно 3-мерных площадок, но не являющегося частично изотропным пространством.

Пусть в $\mathfrak{M}_n$ заданы векторные поля v_α $(\alpha=1, \ldots, m-1)$ и l, где поле l удовлетворяет условиям

$$l^i\, g_{ij}=u_j, \quad l^i\, l^j\, g_{ij}=1.$$

Скалярную кривизну пространства $\mathfrak{M}_n$

$$\underset{m}{K}\,(x,u,v)=\frac{R_{[i_1 i_2 | j_1 j_2}\, g_{i_3 j_3} \ldots g_{i_m [j_m]}\, l^{i_1}\, l^{j_1}\, v^{i_2}_1\, v^{j_2}_1 \ldots v^{i_m}_{m-1}\, v^{j_m}_{m-1}}{2g_{[i_1 | j_1}\, g_{i_2 j_2} \ldots g_{i_m] j_m]}\, l^{i_1}\, l^{j_1}\, v^{i_2}_1\, v^{j_2}_1 \ldots v^{i_m}_{m-1}\, v^{j_m}_{m-1}}$$

назовем скалярной кривизной в данном $(m-1)$-мерном направлении Если $\underset{m}{K}$ не зависит от так выбранного $(m-1)$-мерного направления, то $\mathfrak{M}_n$ называется $(m-1)$-изотропным пространством.

Доказано, что пространство $\mathfrak{N}_n$ является $(m-1)$-изотропным тогда и только тогда, когда

$$R_{ijkp}=\frac{2R}{(n-1)(n-2)}\, g_{[i[k}\,(g_{j]p]}-2u_{j]}\, u_{p]}),$$

где

$$R=R_{ijkp}\, g^{ik}\, g^{jp}.$$

Получено, что для $(m-1)$-изотропных пространств $\mathfrak{N}_n$ справедлива теорема Шура.

Литература

1. И. Х. Медведевайте, Некоторые вопросы геометрии метрического пространства гиперплоских элементов, Liet. matem. rink., VI, № 4, 533–539.
2. С. И. Федищенко и В. М. Чернышенко, Об одном обобщении пространств постоянной кривизны, Труды семинара по вект. и тенз. ан., XI (1961), 269–277.

7. К. Навицкис (ВГУ). **О геометрии однопараметрического семейства линейных комплексов трехмерного проективного пространства.**

Условия инвариантности линейного комплекса прямых трехмерного проективного пространства

$$p^{13}+p^{42}=0 \tag{1}$$

имеют вид

$$\omega_3^4-\omega_2^1=0, \qquad \omega_4^3-\omega_1^2=0, \qquad \omega_2^3+\omega_1^4=0,$$

$$\omega_3^2+\omega_4^1=0, \qquad \Theta\equiv\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4=0,$$

где формы ω_j^i удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$D\,\omega_j^i=\omega_k^i\wedge\omega_j^k \qquad (i,\ j,\ k=1,\ \dots,\ 4).$$

Дифференциальные уравнения однопараметрического семейства линейных комплексов, заданных уравнением (1), после частичной канонизации можно записать следующим образом:

$$\omega_3^4-\omega_2^1=0, \qquad \omega_4^3-\omega_1^2=0, \qquad \omega_2^3+\omega_1^4=0, \qquad \omega_3^2+\omega_4^1=0, \tag{2}$$

$$\omega_2^1+\omega_3^4=-\lambda_{23}\,\Theta, \qquad \omega_1^2+\omega_4^3=\lambda_{14}\,\Theta,$$

$$\omega_1^4-\omega_2^3=\lambda_{12}\,\Theta, \quad \omega_4^1-\omega_3^2=\lambda_{34}\,\Theta, \tag{3}$$

$$d\lambda_{23}-\frac{1}{2}\ \lambda_{23}\,(\omega_2^2-\omega_1^1+\omega_3^3-\omega_4^4)+\lambda_{12}\,\omega_3^1+\alpha_{34}\,\omega_2^4+\mu_{23}\,\Theta=0,$$

$$d\lambda_{14}+\frac{1}{2}\ \lambda_{14}\,(\omega_2^2-\omega_1^1+\omega_3^3-\omega_4^4)+\lambda_{12}\,\omega_4^2+\lambda_{34}\,\omega_1^3-\mu_{14}\,\Theta=0,$$

$$d\lambda_{12}-\frac{1}{2}\ \lambda_{12}\,(\omega_p^p-\omega_\alpha^\alpha)+\lambda_{14}\,\omega_2^4+\lambda_{23}\,\omega_1^3-\mu_{12}\,\Theta=0,$$

$$d\lambda_{34}+\frac{1}{2}\ \lambda_{34}\,(\omega_p^p-\omega_\alpha^\alpha)+\lambda_{14}\,\omega_3^1+\lambda_{23}\,\omega_4^2-\mu_{34}\,\Theta=0, \tag{4}$$

где $\mu_{p\alpha}$ $(p,\ q=1,\ 3;\ \alpha,\ \beta=2,\ 4)$ удовлетворяют соответствующим уравнениям вида (4).

При частичной канонизации прямые A_1A_3 и A_2A_4 совмещены с директрисами линейной конгруэнции, которая выделяется в окрестности первого порядка.

В окрестности второго порядка фундаментальный объект второго порядка $\lambda_{p\alpha}$ определяет два проективных отображения:

$$t^p A_p\leftrightarrow A_2+\frac{\lambda_{14}\,t^1-\lambda_{23}\,t^3}{\lambda_{14}\,t^1-\lambda_{34}\,t^3}\ A_4,$$

$$t^\alpha A_\alpha\leftrightarrow A_1+\frac{\lambda_{12}\,t^2-\lambda_{14}\,t^4}{\lambda_{23}\,t^2-\lambda_{34}\,t^4}\ A_3; \tag{5}$$

прямые, проведенные через соответствующие точки прямых A_1A_3 и A_2A_4, образуют квадрику

$$\lambda_{14}\,x^1x^4-\lambda_{12}\,x^1x^2+\lambda_{23}\,x^2x^3-\lambda_{34}\,x^3x^4=0.$$

В окрестности третьего порядка фундаментальный объект третьего порядка $(\lambda_{p\alpha},\ \mu_{p\alpha})$ определяет асимптотические направления на линейчатых поверхностях, которые описывают прямые A_1A_3 и A_2A_4:

$$\left(t^p A_p,\ (\lambda_{24}\,t^1-\lambda_{34}\,t^3)\,A_2+2\lambda_{p\,[2}\,\mu_{4]\,q}\,t^p t^q A_3+(\lambda_{12}\,t^1-\lambda_{23}\,t^3)\,A_4\right), \tag{6}$$

$$\left(t^\alpha A_\alpha,\ (\lambda_{23}\,t^2-\lambda_{34}\,t^4)\,A_2+(\lambda_{12}\,t^2-\lambda_{14}\,t^4)\,A_3+2\lambda_{\alpha\,[1}\,\mu_{3]\,\beta}\,t^\alpha t^\beta A_4\right)$$

(считаем, что $\lambda_{1[2}\mu_{4]3} \neq 0$). Требование, чтобы асимптотические направления пересекались, дает отображение

$$A_1 A_3 \leftrightarrow A_2 A_4 : h_{\alpha\beta pq}\, t^\alpha t^\beta t^p t^q = 0, \tag{7}$$

где

$$h_{pq\alpha\beta} = \sigma \cdot \lambda_{p(\alpha}\lambda_{\beta)q} - (\lambda_{p[2}\mu_{4]q} + \lambda_{q[2}\mu_{4]p})(\lambda_{\alpha[1}\mu_{3]\beta} + \lambda_{\beta[1}\mu_{3]\alpha}),$$

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если в последовательности } \{p,\ q,\ \alpha,\ \beta\} \text{ встречаются две различные цифры,} \\ -1; & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Композиция отображений (5) и (7) дает отображения:

$$t^p A_p \leftrightarrow T^p A_p : g_{pqrs}\, t^p t^q T^r T^s = 0,$$

$$t^\alpha A_\alpha \leftrightarrow T^\alpha A_\alpha : f_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\, t^\alpha t^\beta T^\gamma T^\varepsilon = 0,$$

где

$$\varepsilon_1 g_{pqrs} = \sum_{\alpha,\ \beta=2,\ 4} h_{pq\alpha\beta}\, \lambda_{6+\alpha\,(r}\lambda_{s)\,6-\beta},$$

$$\varepsilon_2 f_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = \sum_{p,\ q=1,\ 3} h_{pq\alpha\beta}\, \lambda_{4-p\,(\gamma}\lambda_{\varepsilon)\,4-q},$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} -1, & \text{если в последовательности } \{p,\ q,\ r,\ s\} \text{ одно и то же число встречается два или три раза,} \\ +1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} -1, & \text{если в последовательности } \{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon\} \text{ одно и то же число встречается два или три раза,} \\ +1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Точка пересечения прямых (6) описывает кривую

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \lambda_{14} x^1 x^4 - \lambda_{12} x^1 x^2 + \lambda_{23} x^2 x^3 - \lambda_{34} x^3 x^4 = 0,$$

$$b_{pq} x^p x^q + \lambda_{14} x^1 x^4 - \lambda_{12} x^1 x^2 + \lambda_{23} x^2 x^3 - \lambda_{34} x^3 x^4 = 0,$$

где

$$\sigma_1 \cdot a_{\alpha\beta} = \sum_{p,\ q=1,\ 3} \lambda_{p\,(\alpha}\lambda_{\beta)\,q}\, \lambda_{4-p\,[2}\mu_{4]\,4-q},$$

$$\sigma_2 \cdot b_{pq} = \sum_{\alpha,\ \beta=2,\ 4} \lambda_{\alpha\,(p}\lambda_{q)\,\beta}\, \lambda_{6-\alpha\,[1}\mu_{3]\,6-\beta},$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} +1, & \text{для } \alpha=\beta, \\ -1, & \text{для } \alpha\neq\beta, \end{cases} \qquad \sigma_2 = \begin{cases} +1, & \text{для } p=q, \\ -1, & \text{для } p\neq q. \end{cases}$$

Оказывается, что фундаментальный объект четвертого порядка является полным.

8. В. Падервинскас (ВГУ). **О ромбоэдрических сетях в n-мерном евклидовом пространстве.**

Сеть, описываемая вектором n-мерного евклидова пространства $\vec{r} = \vec{r}\,(u^1,\ u^2,\ \ldots,\ u^n)$, будем называть ромбоэдрической, если

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}\right)^2 \varphi_i = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j}\right)^2 \varphi_j \tag{1}$$

$$\left(i,\ j,\ k,\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial u^m} = 0, \text{ если } k \neq m\right).$$

Исследование равенств (1) показывает, что при построении n-мерных ромбоэдрических сетей в n-мерном евклидовом пространстве, одну координату вектора $\vec{r}$, например, x^n, можно взять произвольно, а остальные координаты получаются из соответственных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

$$x^\alpha \Big|_{u^1+u^2+\ldots+u^n=c} = \varphi^\alpha(u^2,\ u^3,\ \ldots,\ u^n) \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Исследованы преобразования

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n)$$

n-мерного евклидова пространства в себя, преобразующие любую n-мерную ромбоэдрическую сеть в ромбоэдрическую сеть. Такими преобразованиями являются преобразования конформной группы.

9. А. Пекарскене (КПИ). **К вопросу о геометрии многообразия вырожденных плоских кривых третьего порядка в P_3.**

Рассматривается расслоенное пространство, элементом базиса которого является плоскость и лежащая в ней кривая второго порядка. С каждым таким элементом базиса ассоциирована прямая, пересекающая упомянутую кривую в двух действительных точках. На таком расслоенном пространстве определено восьмипараметрическое многообразие как секущая поверхность расслоенного пространства. В работе [1] было показано, что такое многообразие определяется линейными дифференциальными уравнениями

$$\omega_p^3=a_p^q\,\vartheta_q+b_p^I\,\Theta_I+c_p^I\,\omega_I^4$$

$$(p,\ q=1,\ 2;\ I,\ K=1,\ 2,\ 3)$$

и соответствующими внешними квадратичными уравнениями.

В этой работе разбирается частный случай, когда

$$a_p^q=0,\ b_p^I=0.$$

При этих условиях вышеупомянутая система в инволюции, произвол существования решения — две функции трех аргументов.

Дана геометрическая интерпретация коэффициентов c_p^I, образующих в свою очередь фундаментальный объект первого порядка многообразия. Прямая A_1A_2 [1] описывает линейный комплекс. Получена нормальная корреляция K:

$$M=A_1+tA_2\leftrightarrow x^3-\lambda x^4=0,$$

где

$$\lambda=\frac{(c_2^2\,c_1^3-c_1^2\,c_2^3)+t\,(c_1^1\,c_2^3-c_2^1\,c_1^3)}{c_2^3\,t+c_1^3}.$$

Плоскости $x^4=0$ соответствует точка $M_1=c_2^3A_1-c_1^3A_2$ на прямой A_1A_2. Пара точек M_1 и $M_2=c_2^3A_1+c_1^3A_2$ разделяет гармонически пару точек A_1 и A_2. Кроме того, получено взаимное проективное отображение точек

$$N=A_1+TA_2-\frac{T}{1+T}\,A_3$$

кривых второго порядка [1] на пучок плоскостей $x^3-\lambda x^4=0$, где λ имеет прежний вид с той разницей, что

$$t=-\sqrt{\frac{c_1^3}{c_2^3}}\cdot T.$$

Литература

1. А. Ю. Пекарскене, О геометрии многообразия вырожденных плоских кривых третьего порядка в P_3, Liet. matem. rink., **XI**, № 3 (1971).

10. Г. Ткач (Калининградский ГУ). **Расслояемые пары конгруэнций парабол.**

Рассмотрим n-мерное эквиаффинное пространство.

Определение. Назовем пару фигур $F=\{F_1,\ F_2\}$ квадратичной, если одна из фигур F_1 является квадратичным элементом, а вторая — F_2 является k — плоскостью $(0\leqslant k<n-1)$ или квадратичным элементом.

Определение. Квадратичная пара $F=\{F_1,\ F_2\}$ называется нецентральной, если каждый квадратичный элемент, входящий в пару, является нецентральным.

Для $n=3$ квадратичными парами являются пары $F=\{F_1, F_2\}$, где F_1 — парабола, а F_2 — точка, прямая, парабола.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются пары B конгруэнций фигур $\{F_i\}$, где F_i — параболы ($i, j, k=1, 2$). Рассмотрим общий случай, когда плоскости парабол F_i пересекаются.

Пусть l — линия пересечения плоскостей парабол F_i. Отнесем пару B к каноническому реперу $R=\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где вектор $\bar{e}_3$ направлен по прямой l, векторы $\bar{e}_i$ — параллельны диаметрам парабол F_i, а точка A является центром прямолинейной конгруэнции $\{A, \bar{e}_3\}$ и векторы $\bar{e}_\alpha$ ($\alpha, \beta, \gamma=1, 2, 3$) пронормированы так, что уравнения парабол F_i имеют вид:

$$(x^3)^2-2x^i+2a^i_3 x^3+a^i_0=0, \quad x^j=0. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha=\omega^\beta_\alpha \bar{e}_\beta, \tag{2}$$

где формы Пфаффа ω^β_α, ω^α удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma, \quad D\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta \tag{3}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3=0. \tag{4}$$

Система дифференциальных уравнений, определяющих пару B, имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega^3=\Gamma^3_k\,\omega^k, \quad \omega^3_i=\Gamma^3_{ik}\,\omega^k, \quad \omega^i_3=\Gamma^i_{3k}\,\omega^k, \quad \omega^i_j=\Gamma^i_{jk}\,\omega^k,\\ \omega^j_j=\Gamma^j_{jk}\,\omega^k, \quad da^i_3=a^i_{3k}\,\omega^k, \quad da^i_0=a^i_{0k}\,\omega^k, \quad \Gamma^1_{31}+\Gamma^2_{32}=0.\end{gathered} \tag{5}$$

Пары B существуют с произволом двенадцати функций двух аргументов.

Рассмотрим случай, когда параболы F_i касаются друг друга в точке A. Назовем такую пару парой B^0. Пары B^0 существуют и определяются с произволом восьми функций двух аргументов. Уравнения (1) приводятся для этого случая к виду:

$$(x^3)^2-2x^i=0, \quad x^j=0. \tag{6}$$

Определение. Пара B^0 называется индуцированно расслояемой или парой B^0_l, если прямолинейные конгруэнции (l) и (l'), где l' — прямая, соединяющая концы векторов $\bar{e}_i$, образуют двусторонне расслояемую пару [1].

Теорема. *Пары B^0_l существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.*

Доказательство. Условия двусторонней расслояемости прямолинейных конгруэнций (l) и (l') приводится к виду:

$$\begin{gathered}\omega^1\wedge\omega^2_3-\omega^2\wedge\omega^1_3=0,\\ \omega^1\wedge(\omega^3+\omega^3_1)+\omega^2\wedge(\omega^3+\omega^3_2)=0,\\ \omega^i\wedge(\omega^j_j+\omega^i_j+\omega^j)+(\omega^3+\omega^3_j)\wedge\omega^i_3=0,\\ \omega^i\wedge(\omega^i_i+\omega^j_i+\omega^j)-(\omega^3+\omega^3_j)\wedge\omega^j_3=0.\end{gathered} \tag{7}$$

Учитывая (5), имеем:

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{31}+\Gamma^2_{32}=0,\\ \Gamma^3_2+\Gamma^3_{12}-\Gamma^3_1-\Gamma^3_{21}=0,\\ \Gamma^j_{jj}+\Gamma^i_{jj}+1+(\Gamma^3_i+\Gamma^3_{ji})\,\Gamma^i_{3j}-(\Gamma^3_j+\Gamma^3_{jj})\,\Gamma^i_{3i}=0,\\ \Gamma^i_{ij}+\Gamma^j_{ij}+1-(\Gamma^3_i+\Gamma^j_{ji})\,\Gamma^j_{3j}+(\Gamma^3_j+\Gamma^3_{jj})\,\Gamma^j_{3i}=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Из (5), замыкания системы (5) и (8) вытекает утверждение теоремы.

В P_3 для пар конгруэнций коник В. С. Малаховским было введено понятие расслояемых пар [2].

В эквиаффинном пространстве можно ввести определение расслояемой пары конгруэнции парабол следующим образом.

Определение. Пара B конгруэнций парабол (F_1, F_2) называется двусторонне расслояемой или парой B_F, если существуют односторонние расслоения от конгруэнции парабол F_i к линейчатому многообразию, описываемому прямой l.

Теорема. *Рассмотрим пару B_F^0. Если прямая l' инцидентна характеристическим точкам плоскостей парабол, то плоскости парабол образуют связки плоскостей с центром в характеристических точках.*

Литература

1. С. П. Фиников, Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ., М., 1956.
2. В. С. Малаховский, Расслояемые пары конгруэнций фигур, Труды геометрического семинара, т. 3 (в печати).

11. А. Урбонас (ВГПИ). **Движения в шестимерном пространстве гиперплоскостных элементов общей аффинной связности.**

Рассматривается шестимерное пространство U_6 гиперплоскостных элементов с общей аффинной связностью.

Доказано, что максимально подвижные пространства U_6 допускают 32-параметрическую группу движений.

Объединяя этот результат с полученным в [1], что максимально подвижные пространства U_n с общей аффинной связностью при $n \geqslant 7$ допускают группу движений точно n^2-n+2 параметров, получаем теорему.

Теорема. *Максимальный порядок групп движений, допускаемых пространством U_n с общей аффинной связностью, равен точно n^2-n+2, $n \geqslant 6$.*

Литература

1. А. П. Урбонас. Максимально подвижные пространства гиперплоскостных элементов общей аффинной связности, Liet. matem. rink. **IX**, № 1 (1969), 153–179.

12. Ю. Шинкунас (ВГПИ). **О неголономной поверхности V_n^m риманова пространства V_n.**

Риманово пространство V_n с заданным полем m-мерных плоскостей называется неголономной поверхностью V_n^m риманова пространства V_n. Дифференциальные уравнения этой поверхности в частично канонизированном репере имеют вид:

$$\omega_\alpha^a = \Lambda_{\alpha\beta}^a \omega^\beta + \Lambda_{\alpha b}^a \omega^b,$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ a,\ b,\ c = m+1,\ \ldots,\ n),$$

где ω^α, ω_β^α — формы связности без кручения риманова пространства V_n. Точка A пространства V_n и проходящая через нее плоскость П данного поля называется опорным элементом (A, П) неголономной поверхности V_n^m. Дано определение соприкасающегося, нормального и главного нормального пространств кривой (однопараметрического семейства плоскостей на V_n) в некотором (A, П). Вводятся понятия сопряженных направлений, направлений кривизн, главных направлений, асимптотических направлений и в зависимости от размерностей соприкасающегося, нормального и главного нормального пространств, исследуется их существование.

Если в (A, П) рассматривать всевозможные интегральные кривые неголономной поверхности V_n^m и их развертки, то можно искать точки пересечения главных нормальных пространств в (A, П) с бесконечно близкими нормальными пространствами, которые их пересекают. Совокупность этих точек называется многообразием K[1]. Исследуются свойства этого многообразия.

Литература

1. Д. И. Перепелкин, Кривизна и нормальные пространства многообразий V_m в R_n, Матем. сб., 42, № 1 (1935), 81–120.

13. В. Малаховский (Калининградский ГУ). **Оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве.**

В n-мерном однородном пространстве E с фундаментальной группой G, определенной инвариантными формами $\omega^s(u, du)$ и структурными константами C^s_{pq} $(p, q, s=1, \ldots, r)$ рассматривается m-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ фигур $F=F(a^I)$ ранга N:

$$\Omega^a=\lambda^a_i\Omega^i \quad (i, j, k=1, \ldots, m;\ a, b=m+1, \ldots, N;\ I, J, K=1, \ldots, N), \tag{1}$$

где $\Omega^I\equiv da^I f^I_s(a)\,\omega^s(u, du)$ — левые части уравнений стационарности фигуры F.

Определение 1. Система форм

$$\Theta^\alpha=A^\alpha_i(a, u)\,\Omega^i \qquad (\alpha, \beta=k+1, \ldots, m) \tag{2}$$

называется относительно инвариантной порядка ν, если в репере порядка ν имеют место соотношения

$$\delta\Theta^\alpha=B^\alpha_\beta(a, u, \delta u)\,\Theta^\beta, \tag{3}$$

где δ — символ дифференцирования по групповым параметрам при фиксированном образующем элементе F (вторичным параметрам).

Определение 2. Система форм Пфаффа

$$\tilde\Theta^\alpha=A^\alpha_\xi(a, u)\,\Omega^\xi+\Omega^\alpha \qquad (\xi, \eta=1, \ldots, k) \tag{4}$$

называется приведенной. Две системы форм

$$\Theta^\alpha=A^\alpha_i(a, u)\,\Omega^i,\ \bar\Theta^\alpha=\bar A^\alpha_i(a, u)\,\Omega^i \tag{5}$$

называются эквивалентными, если каждая из них линейно выражается через другую.

Введенное понятие эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением R эквивалентности во множестве Θ форм Пфаффа вида (2). Фактормножество $\tilde\Theta=\Theta/R$ изоморфно множеству приведенных систем форм.

Всякую систему уравнений Пфаффа $\Theta^\alpha=0$ можно заменить эквивалентной ей (т. е. имеющей одни и те же интегральные многообразия) приведенной системой. Если система форм Θ^α относительно инвариантна, то и эквивалентная ей система форм относительно инвариантна.

Легко доказать справедливость следующих утверждений.

Теорема 1. *Система форм $\vartheta^a=\lambda^a_i\Omega^i-\Omega^a$, являющихся левыми частями дифференциальных уравнений многообразия $\mathfrak{M}_m$, относительно инвариантна.*

Теорема 2. *Если система уравнений Пфаффа $\Theta^\alpha=0$ вполне инвариантна, то система форм Θ^α относительно инвариантна.*

Теорема 3. *Система форм Пфаффа*

$$\Theta^\alpha=\mathrm{A}^\alpha_\xi(a, u)\,\Omega^\xi+\Omega^\alpha \tag{6}$$

тогда и только тогда относительно инвариантна, когда величины A^α_ξ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\Delta\mathrm{A}^\alpha_\xi=\mathrm{A}^\alpha_{\xi i}\,\Omega^i, \tag{7}$$

где

$$\Delta\mathrm{A}^\alpha_\xi=d\mathrm{A}^\alpha_\xi-\mathrm{A}^\alpha_\eta\,\Omega^\eta_\xi+\mathrm{A}^\beta_\xi\,\mathrm{A}^\alpha_\eta\,(\Omega^\eta_\beta+\lambda^b_\beta\,\Omega^\eta_b)-$$
$$-\lambda^b_\xi\,(\Omega^\alpha_b+\mathrm{A}^\alpha_\eta\,\Omega^\eta_b)+\mathrm{A}^\beta_\xi\,(\Omega^\alpha_\beta+\lambda^b_\beta\,\Omega^\alpha_b)-\Omega^\alpha_\xi. \tag{8}$$

Определение 3. Геометрический объект

$$\varphi_k=\{a^I,\ \lambda^a_i,\ \mathrm{A}^\alpha_\xi\}$$

назовем касательно оснащающим объектом многообразия $\mathfrak{M}_m$. Оснащенным многообразием $\mathfrak{M}_m$ или многообразием $\mathfrak{M}_m^*$ назовем многообразие $\mathfrak{M}_m$, на котором задано поле касательно оснащающего объекта φ_k. Относительно инвариантная система форм (6) называется системой форм, ассоциированной с многообразием $\mathfrak{M}_m^*$.

Касательно оснащающий объект φ_k определяет индуцирующую фигуру Φ_k $[I]$ и распределение Δ_k. Системы величин $\{a^I\}$ и $\{a^I, \lambda_i^a\}$ являются подобъектами объекта φ_k.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{M}_m^*$ — касательно оснащенное многообразие и (6) — ассоциированная с ним относительно инвариантная система форм. Кривые многообразия $\mathfrak{M}_m$, на которых ассоциированная система форм Θ^α обращается в нуль, назовем интегральными кривыми многообразия $\mathfrak{M}_m$. Множество всех интегральных кривых многообразия $\mathfrak{M}_m$ назовем множеством Ψ_k.

Так как ассоциированная система форм Θ^α относительно инвариантна, то понятие интегральной кривой многообразия $\mathfrak{M}_m$,а значит множества Ψ_k, инвариантно относительно изменения вторичных параметров.

В последние годы появилось много работ (см. [2]), использующих „метод репеража подмногообразий“. В основе этого метода ([2], стр. 188—191) лежит использование произвольных множеств Ψ_k (называемых подмногообразиями Ψ_k), заданных в общем случае относительно неинвариантными системами уравнений. Так как для относительно неинвариантных систем уравнений понятие интегральной кривой теряет смысл, то некорректны и некоторые основные понятия „метода репеража подмногообразий“, в частности, понятие „полуканонического репера“ (см. определение 7 работы [2]).

Литература

1. В. С. Малаховский, О многообразиях алгебраических фигур. Геометрический сборник, вып. 5 (Труды Томского ун-та, 181) (1965), 5—14.
2. Р. Н. Щербаков, О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геом. сборник, 6 (Труды Томского ун-та, 191) (1967), стр. 179—194.

14. Л. Стиклаките (ВГПИ). **Неголономная кривая обобщенного евклидова пространства.**

Пусть в обобщенном евклидовом пространстве H_n задано поле дифференциально-геометрического объекта первого порядка $H^{(1)}$ кривой K, т. е. поле касательных векторов этой кривой.

Определение. Обобщенное евклидово пространство H_n с заданным полем дифференциально-геометрического объекта $H^{(1)}$ называется неголономной кривой H_n^1 пространства H_n (или векторным полем пространства H_n).

В частично канонизированном репере (вектор $\vec{e}_n$ подвижного репера $\{A, \vec{e}_i\}$, $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, \ldots, n-1$ пространства H_n является касательным вектором кривой K) дифференциальные уравнения неголономной кривой имеют вид:

$$\omega_n^\alpha = a_\beta^\alpha \omega^\beta + a^\alpha \omega^n,$$
$$(\nabla a_\beta^\alpha - a_\beta^\alpha \omega_n^n - a^\alpha \omega_\beta^n + a_\gamma^\alpha a_\beta^\gamma \omega^n) \wedge \omega^\beta + (\nabla a^\alpha - 2a^\alpha \omega_n^n) \wedge \omega^n = 0. \tag{1}$$

Прямая, пересекающая опорные прямые L и $\tilde{L}$ двух опорных элементов (A, L), $(A, \tilde{L})$ ортогонально к каждой опорной прямой, называется общим перпендикуляром двух опорных элементов. В силу условия $h_{ij} \neq \pm h_{ji}$, где h_{ij} — метрический тензор пространства H_n, существует общий левый перпендикуляр, общий правый перпендикуляр и общий перпендикуляр двух опорных элементов неголономной кривой.

К неголономной кривой H_n^1 присоединяется левая неголономная гиперповерхность (соотв., правая гиперповерхность, гиперповерхность), левая нормаль (соотв., правая нормаль, нормаль), которая колинеарна опорному вектору $\vec{e}_n$ неголономной кривой. Дифференциальные уравнения левой присоединенной неголономной гиперповерхности имеют вид:

$$\Omega_\alpha^n = A_{\alpha\gamma} \Omega^\gamma + A_\alpha \Omega^n, \tag{2}$$

где

$$\Omega^\alpha=\omega^\alpha,\ \Omega^n=F\omega^n+\frac{h_{n\alpha}}{F}\ \omega^\alpha,\ \Omega^n_\alpha=-\frac{1}{F}\ \Delta_{\beta\alpha}\,\omega^\beta_n,$$

$$F=\sqrt{h_{nn}},\ \Delta_{\beta\alpha}=h_{\beta\alpha}-\frac{h_{\beta n}h_{n\alpha}}{h_{nn}},$$

$$A_{\alpha\gamma}=\Delta_{\beta\alpha}\left(\frac{h_{n\gamma}}{h_{nn}F}\ a^\beta-\frac{1}{F}\ a^\beta_\gamma\right),$$

$$A_\alpha=-\frac{1}{F^2}\ \Delta_{\beta\alpha}\,a^\beta.$$

Так как кривую K пространства H_n можно определить дифференциальными уравнениями

$$\Omega^i=y^i\,\Theta,\ D\Theta=0, \tag{3}$$

то системой уравнений (1), (3) определяется кривая неголономной кривой, а системой (2), (3) — кривая присоединенной неголономной гиперповерхности. Найдены кривизны первого и второго рода кривой неголономной кривой и интегральной кривой (относительный инвариант y^n тождественно равен нулю) присоединенной неголономной гиперповерхности, а также ортогональные траектории кривой $(K,\ L)$ неголономной кривой H^1_n.

15. Л. Стиклаките (ВГПИ). **Гиперсферические кривизны неголономной гиперповерхности H^{n-1}_n пространства H_n.**

Неголономная гиперповерхность H^{n-1}_n обобщенного евклидова пространства H_n определяется дифференциальными уравнениями [1]:

$$\omega^n_\alpha=a_{\alpha\beta}\,\omega^\beta+a_\alpha\,\omega^n,$$

$$(\nabla a_{\alpha\beta}+a_{\alpha\beta}\,\omega^n_n+a_\alpha\,a_{[\gamma\beta]}\,\omega^\gamma)\wedge\omega^\beta+(\nabla a_\alpha-a_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_n+a_\alpha\,a_\gamma\,\omega^\gamma)\wedge\omega^n=0.$$

Касательный вектор центроиды K интегральной кривой $(K,\ \Pi)$ неголономной гиперповерхности H^{n-1}_n пространства H_n имеет вид:

$$d\vec{A}=y^\alpha\,\vec{e}_\alpha.$$

Пусть вектор $\vec{\nu}$ (соотв., $\vec{n}$, $\vec{m}$) является вектором метрической нормали (соотв., левой нормали, правой нормали) неголономной гиперповерхности H^{n-1}_n. Каждой образующей развертывающихся поверхностей $N(K)$ и $N_0(K)$, где прямая N колинеарна вектору $\vec{\nu}$, а N_0 колинеарна средненормальному вектору $\vec{\nu}_0=\frac{1}{2}(\vec{n}+\vec{m})$, можно сопоставить в соответствие точку единичной гиперсферы $S_{n-1}(A)$. Тогда на $S_{n-1}(A)$ определяются кривые, которые будем называть соответственно гиперсферической индикатрисой и среднегиперсферической индикатрисой кривой $(K,\ \Pi)$.

Касательные векторы гиперсферических индикатрис имеют вид

$$\vec{t}=\frac{d\vec{\nu}}{ds}=-\frac{g^{\gamma\alpha}\,Ha_{\gamma\beta}\,y^\beta}{\sqrt{g_{\lambda\delta}\,y^\lambda\,y^\delta}}\ \vec{e}_\alpha,$$

$$\vec{t}_0=\frac{d\vec{\nu}_0}{ds}=-\frac{U^{\alpha\gamma}\,\bar{H}a_{\gamma\beta}\,y^\beta}{\sqrt{g_{\lambda\delta}\,y^\lambda\,y^\delta}}\ \vec{e}_\alpha,$$

где

$$g_{ij}=h_{(ij)},\ \bar{H}\equiv\sqrt{g_{nn}-h_{\beta n}\,h^{\alpha\beta}\,h_{n\alpha}},\ H\equiv\sqrt{g_{nn}-g_{\beta n}\,g^{\alpha\beta}\,g_{\alpha n}},$$

$$U^{\alpha\gamma}=g^{\alpha\gamma}-\frac{(m^\gamma-n^\gamma)(m^\alpha-n^\alpha)}{4\bar{H}^2},$$

а m^α, n^α — объекты, определяющие правую и левую нормаль неголономной гиперповерхности, h_{ij} — метрический тензор пространства H_n.

Дифференцируя эти соотношения, получаем, что

$$\frac{\vec{dt}}{ds}=(\ldots)\vec{e}_\alpha-\frac{g^{\gamma\alpha}H^2 a_{\gamma(\beta}a_{\cdot\,\alpha\,|\,\varepsilon)}y^\beta y^\varepsilon}{g_{\lambda\delta}y^\lambda y^\delta}\vec{\nu}\equiv(\ldots)\vec{e}_\alpha-\lambda\vec{\nu},$$

$$\frac{\vec{dt_0}}{ds}=(\ldots)\vec{e}_\alpha-\frac{U^{\gamma\alpha}\bar{H}^2 a_{\gamma(\beta}a_{|\,\alpha\,|\,\varepsilon)}y^\beta y^\varepsilon}{g_{\lambda\delta}y^\lambda y^\delta}\vec{\nu}_0\equiv(\ldots)\vec{e}_\alpha-\lambda_0\vec{\nu}_0.$$

Величины λ и λ_0 будем называть соответственно гиперсферической нормальной кривизной и среднегиперсферической нормальной кривизной интегральной кривой (K, П).

Экстремальные гиперсферические (среднегиперсферические) нормальные кривизны интегральной кривой (K, П) называются главными гиперсферическими (среднегиперсферическими) нормальными кривизнами неголономной гиперповерхности $\underset{n}{H}^{n-1}$. Найдены гиперсферические и среднегиперсферические, а также p-е гиперсферические и p-е среднегиперсферические нормальные кривизны неголономной гиперповерхности $\underset{n}{H}^{n-1}$ пространства H_n.

Литература

1. Л. Стиклаките, О неголономной гиперповерхности обобщенного евклидова пространства, Liet. matem. rink., **XI**, № 3 (1971).

Секция теории функций и дифференциальных уравнений

1. Ш. Стрелиц (ВГУ). **Об индикаторе целого решения обыкновенных дифференциальных уравнений.**

2. А. Нафталевич (ВГУ), А. Гилис (ВГУ). **Обобщение теоремы Миттаг-Лефлера.**

3. Э. Кирьяцкий (ВИСИ). **Об одном свойстве функций, составляющих систему Чебышева.**

4. Ш. Стрелиц (ВГУ), Е. Ненишките (ВГУ). **О приближении аналитических решений дифференциальных уравнений с частными производными.**

5. И. Киселюс (ВПИ). **Решение задачи Коши для линейных уравнений первого порядка.**

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если уравнение*

$$\sum_{j=1}^{m} a_j z_j \frac{\partial u}{\partial z_j}=\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m)\,u, \tag{1}$$

где a_j — числа, а $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — аналитическая функция в полицилиндре $|z_1|<\rho$, $|z_2|<\rho, \ldots, |z_m|<\rho$, имеет бесконечное множество линейно независимых интегралов вида

$$u=z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\ldots z_m^{\lambda_m}f(z_1, z_2\,\ldots, z_m)$$

с аналитической в некоторой окрестности начала координат функцией $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ и комплексными постоянными $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то в окрестности начала координат (исключая, может быть, само начало), существует решение уравнения (1), удовлетворяющее на кривой $l: z_1=t^{\alpha_1}, z_2=t^{\alpha_2}, \ldots, z_m=t^{\alpha_m}$ начальному условию Коши

$$u(z_1, z_2, \ldots, z_m)=z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}\ldots z_m^{\gamma_m}F(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

где γ_j — любые комплексные числа, $F(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — аналитическая функция в полицилиндре $|z_j|<R$, а $\alpha_j>0$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ — такие числа, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \end{pmatrix}$$

равен двум.

6. Л. Тимофеев (ИФМ). **Об одной вариационной задаче с ограничением специального вида.**

Задан функционал

$$F_0(x)=\int_{t_0}^{t_1} f_0\Big(x(t);\ t\Big)\,dt, \tag{1}$$

где $x(t)$ — действительная, непрерывная на интервале $T_0=[t_0,\ t_1]$ функция; функция $f_0(x;\ t)$ ограничена на каждом ограниченном множестве $(x;\ t)$, обладает частной производной $\dfrac{\partial f_0}{\partial x}$, ограниченной и равностепенно непрерывной при каждом фиксированном t на каждом ограниченном множестве значений $(x;\ t)$.

Требуется найти $x_0(t)$, минимизирующую $F_0(x)$ при ограничении

$$F_1(x)=\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\int_{t_0}^{t} f_1\Big(x(\tau);\ \tau\Big)\,d\tau\leqslant 0, \tag{2}$$

где $f_1(x;\ \tau)$ ограничена на каждом ограниченном множестве значений $(x;\ \tau)$, непрерывна по x и τ и обладает частной производной $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$, ограниченной и равностепенно непрерывной при каждом фиксированном τ на каждом ограниченном множестве $(x;\ \tau)$.

Необходимые условия минимума $F_0(x)$ при ограничении (2) дает следующая теорема.

Теорема. *Если $x_0(t)$ минимизирует $F_0(x)$ при ограничении* (2), *то найдутся такие действительные числа $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, одновременно не равные нулю, и неотрицательная мера μ, сосредоточенная на множестве*

$$T_1=\left\{ t:\ \int_{t_0}^{t} f_1\Big(x_0(\tau);\ \tau\Big)\,d\tau=\max_{t_0\leqslant t_2\leqslant t_1}\int_{t_0}^{t_2} f_1\Big(x_0(\tau);\ \tau\Big)\,d\tau=0\right\}$$

с полным изменением, равным 1, *что*

$$\alpha\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f_0}{\partial x}\,\bar{x}(t)\,dt+\beta\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f_1}{\partial x}\,\bar{x}(\tau)\,d\tau\right]d\mu=0 \tag{3}$$

для любой непрерывной вариации $x(t)$.

Следствие. *Если $\dfrac{d\mu}{d\tau}$ интегрируема, то необходимое условие имеет вид:*

$$\alpha\,\frac{\partial f_0}{\partial x}+\beta\,\frac{\partial f_1}{\partial x}\int_{t}^{t_1}\frac{d\mu}{d\tau}\,d\tau=0,$$

где α, β, μ удовлетворяют условиям теоремы.

Рассмотренная задача представляет интерес при поиске „наихудших" распределений в задачах о байесовых методах поиска точки экстремума [2].

Литература

1. А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Задачи на экстремум при наличии ограничения, Ж. вычисл. математики и матем. физики, 5, № 3 (1965).
2. И. Б. Моцкус, О байесовых методах поиска точки экстремума. Матем. всесоюз. конф. „Экстремальные задачи и их приложения к вопросам планирования, проектирования и управления сложными системами", Горький, 1971.
3. Л. Л. Тимофеев, Вариационная задача с ограничениями специального вида, Депонировано в ВИНИТИ, 2—746—71.

7. Э. Сенекене (ИФМ), А. Темпельман (ИФМ). **Некоторые свойства операторных воспроизводящих ядер.**

Воспроизводящие ядра (см. [1]) широко используются в теории случайных функций, в теории функций одного и нескольких комплексных переменных и в других областях. В работе [2] введено понятие операторных воспроизводящих ядер, играющих аналогичную роль в теории векторно-значных функций. Напомним определение, данное в этой работе.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство; $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в $\mathfrak{H}$; T — произвольное множество; $R(s, t)$ — функция на $T\times T$, значениями которой являются линейные операторы в $\mathfrak{H}$; H — гильбертово пространство $\mathfrak{H}$—значных функций, определенных на T; $<\cdot, \cdot>$ — скалярное произведение в H.

Определение. Функция $R(s, t)$, $s, t\in T$, называется воспроизводящим ядром пространства H, если при любых $x\in\mathfrak{H}$, $t\in T$ и любой $\mathfrak{H}$-значной функции $f(\cdot)\in H$: а) функция $R(\cdot, t)x\in H$; б) $<R(\cdot, t)x, f(\cdot)> = (x, f(t))$.

Укажем некоторые свойства таких ядер.

Теорема 1. *Гильбертово пространство функций может обладать только одним воспроизводящим ядром.*

Теорема 2. *Для того, чтобы функция $R(s, t)$ $s, t\in T$ была воспроизводящим ядром некоторого гильбертова пространства H необходимо и достаточно, чтобы она была неотрицательно определенной, т.е. чтобы $\sum_{i,j=1}^{n}(x_i, R(s_i, s_j)x_j)\geqslant 0$ при любом n и любых $s_1, s_2, \ldots, s_n\in T$; $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathfrak{H}$.*

Теорема 3. *Неотрицательно определенная функция $R(s, t)$, $s, t\in T$, служит воспроизводящим ядром лишь одного гильбертова пространства H. Это гильбертово пространство является замыканием по скалярному произведению $<R(\cdot, s)x, R(\cdot, t)y> = (x, R(s, t)y)$ линейной оболочки функций $R(\cdot, t)x$.*

Гильбертово пространство с воспроизводящим ядром $R(s, t)$, $s, t\in T$, обозначим $H(R)$.

Пусть H — гильбертово пространство функций на множестве T, принимающих значения из гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Рассмотрим „точечный" оператор F_t $(t\in T)$ из H в $\mathfrak{H}$, определяемый соотношением: $F_t(g)=g(t)$ для любой функции $g(\cdot)\in H$. Очевидно, этот оператор аддитивен и однороден.

Теорема 4. *Если гильбертово пространство H обладает воспроизводящим ядром, то все операторы F_t $(t\in T)$ непрерывны. Обратно, если все операторы F_t $(t\in T)$ слабо непрерывны, т.е. если при любых $t\in T$, $x\in H$ функции $\varphi_{t,x}(\cdot)=(x, F_t(g))$ на H непрерывны, то гильбертово пространство H обладает воспроизводящим ядром.*

Таким образом, из слабой непрерывности оператора F_t вытекает его сильная непрерывность: оператор F_t слабо непрерывен также и относительно слабой топологии в H.

Теорема 5. *Если $R_1(s, t)$ и $R_2(s, t)$ — операторные воспроизводящие ядра гильбертовых пространств $H(R_1)$ и $H(R_2)$ функций, определенных на множестве T с нормами $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ соответственно, то $R(s, t)=R_1(s, t)+R_2(s, t)$ является операторным воспроизводящим ядром гильбертова пространства $H(R)$ всех функций*

$$f(\cdot)=f_1(\cdot)+f_2(\cdot), \tag{1}$$

$f(\cdot)\in H(R_1)$, $f_2(\cdot)\in H(R_2)$, норма

$$\|f(\cdot)\|_{H(R)}=\min\left(\|f_1(\cdot)\|_1^2+\|f_2(\cdot)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где минимум берется по всем представлениям $f(\cdot)$ в виде (1).

Литература

1. Н. Ароншайн, Теория воспроизводящих ядер, Математика, 7, 2, 67—130 (1963).
2. Ю. И. Голосов, А. А. Темпельман, Об эквивалентности мер, соответствующих гауссовским векторнозначным функциям, Доклады АН СССР, 184, 6, 1271—1274 (1969).

8. А. Янушаускас (ИМ АН, Новосибирск). **Особые точки гармонических отображений.**

9. А. Ненортене (КПИ). **Компенсирование сдвигов.**

10. Б. Квядарас (ИФМ). **Об одной краевой задаче в пространстве Гильберта.**

Пусть H — гильбертово пространство; $L_2([0, T], H)$ — пространство функций $f(t)$, при каждом фиксированном $t \in [0, T]$, принимающих значения в H и суммируемых с квадратом:

$$\int_0^T \|f(t)\|^2 dt < \infty.$$

Пусть A — замкнутый оператор в H с плотной областью определения, резольвента которого $R(\lambda)$ существует при всех $\lambda \leqslant 0$ и удовлетворяет условию $\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{1-\lambda}$ $(\lambda \leqslant 0)$.

Решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - Au = f(t) \in L_2([0, T], H) \tag{1}$$

имеют (см., напр., [1]) вид:

$$u(t) = V(t)\, z + V(T-t)\, w + z(t),$$

где $V(t)$ — полугруппа оператора $-A^{\frac{1}{2}}$, $z(t) = \frac{1}{2} \int_0^T V(|t-s|)\, A^{-\frac{1}{2}} f(s)\, ds$ — частное решение уравнения (1), $z, w \in H$.

Пусть F_i $(i=1, 2)$ — непрерывные операторы, действующие из $L_2([0, T], H)$ bH. Найдем решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$F_i[u(t)] = 0 \quad (i=1, 2). \tag{2}$$

Теорема 1. *Если оператор*

$$D = \begin{pmatrix} F_1[V(t)] & F_1[V(T-t)] \\ F_2[V(t)] & F_2[V(T-t)] \end{pmatrix},$$

действующий в $H \times H$, имеет ограниченный обратный, то решение задачи (1)—(2) *существует и единственно. Оператор D^{-1} существует тогда и только тогда, когда краевая задача* (1)—(2) *с $f(t) \equiv 0$ имеет лишь тривиальное решение $u(t) \equiv 0$.*

Пусть $N_i = \{h(t) \in L_2([0, T], H)\ F_i[h(t)] = 0\}$ $(i=1, 2)$. Очевидно, что N_i — подпространство $L_2([0, T], H)$. Обозначим $N = N_1 \cap N_2$ и пусть P — проектор, действующий из $L_2([0, T], H)$ на N. Тогда справедлива теорема 2.

Теорема 2. *Если хотя бы при одном* (комплексном) $\lambda = \lambda_0$ *оператор*

$$D(\lambda_0) = \begin{pmatrix} F_1[\operatorname{ch} \lambda_0 t I] & F_1\left[\frac{\operatorname{sh} \lambda_0 t}{\lambda_0} I\right] \\ F_2[\operatorname{ch} \lambda_0 t I] & F_2\left[\frac{\operatorname{sh} \lambda_0 t}{\lambda_0} I\right] \end{pmatrix}$$

имеет ограниченный обратный $D^{-1}(\lambda_0)$, $\|D^{-1}(\lambda_0)\| \leqslant C$ и операторы $F_i[\operatorname{ch} \lambda_0 t I]$, $F_i\left[\frac{\operatorname{sh} \lambda_0 t}{\lambda_0} I\right]$ коммутируют между собой, то сопряженная краевая задача определяется уравнением

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - A^* v - P^* \left[\frac{d^2}{dt^2} - A^*\right] v = g(t)$$

и краевым условием: $v(0) = v(T) = 0$,

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{dv(T)}{dt} = 0. \tag{3}$$

Используя метод, развитый в [2], доказываем теорему.

Теорема 3. *Если пространство N конечномерно, то задача* (1)—(2) *разрешима тогда и только тогда, когда все решения $v(t)$ уравнения*

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - A^* v - P^* \left[\frac{d^2}{dt^2} - A^*\right] v = 0,$$

удовлетворяющие условиям (3), *ортогональны к*

$$f(t):\int_0^T \Big(f(t),\ v(t)\Big)\, dt = 0.$$

В частности, если однородная сопряженная задача имеет лишь тривиальное решение, то задача (1) — (2) разрешима при любом $f(t) \in L_2([0, T], H)$.

Литература

1. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Физматгиз, 1967.
2. Б. Кведарас, О краевой задаче с интегральными условиями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Liet. matem. rink., **VII**, № 1 (1971).

11. В. Меркис (ВГУ), Р. Голоквосчюс (ВГУ). **О периодичности решений двухмерной нелинейной системы дифференциальных уравнений.**

Рассматривается система

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)\, x_1 + p_{21}(t)\, x_2 + \varepsilon X_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \varepsilon),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = p_{12}(t)\, x_1 + p_{22}(t)\, x_2 + \varepsilon X_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \varepsilon),$$

где функции $p_{\sigma\nu}(t)$ $(\sigma, \nu = 1, 2)$ и $X_k(t, x_1, x_2, \varepsilon)$ $(k = 1, 2)$ относительно t является непрерывными и периодическими с периодом $\omega = 1$. Кроме того, функции $X_k(t, x_1, x_2, \varepsilon)$ предполагаются голоморфными по крайней мере при достаточно малых $|\varepsilon|$, $|x_1|$ и $|x_2|$, причем ε — малый численный параметр.

Методом А. Пуанкаре исследуется вопрос существования периодических решений данной системы в случаях, когда соответствующая порождающая система интегрируется в замкнутой форме.

12. Э. Строженко (Одесский ГУ). **Необходимые и достаточные условия для вложения некоторых классов функций.**

Вопросы вложения различных классов функций одной переменной изучали сь П. Л. Ульяновым (см., например, [1], [2]), Л. Лейндлером [3] и другими. Условия, которые приводятся в указанных работах, являются достаточными для того, чтобы функция $f(x)$ из $L_p(0, 1)$, $p \geqslant 1$ принадлежала более узкому классу. Необходимость полученных условий устанавливалась на классах $H_p^{\omega}(\delta)$. Приводимое ниже условие является как достаточным, так и необходимым для каждой функции из $f(x) \in L_{p(0,1)}$.

Пусть функция $\Phi(u)$ неотрицательна, не убывает на $[0, \infty)$ и

$$\Phi(u^2) \leqslant C\, \Phi(u)$$

при некоторой постоянной $C \geqslant 1$ и всех $u \in [0, \infty)$. Через $L_q\, \Phi(L)$ обозначим класс тех функций $f(x)$, для которых

$$\int_0^1 |f(x)|^q\, \Phi(|f(x)|)\, dx < \infty.$$

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $f(x)$ *из* $L_p(0, 1)$ *принадлежала классу* $L_q \Phi(L)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 x^{-\frac{q}{p}} \omega^q(x, f^*)_p \Phi\left(\frac{1}{x}\right) dx < \infty, \qquad \text{если } q > p \geq 1$$

и

$$\int_0^1 x^{-2} \omega^p(x, f^*)_p \Phi^1\left(\frac{1}{x}\right) dx < \infty, \qquad \text{если } q = p \geq 1,$$

где $\omega(x, f^*)_p$ *— модуль непрерывности невозрастающей функции* $f^*(x)$, *равноизмеримой с* $|f(x)|$ *на* $[0, 1]$.

Теорема 2. *Для того чтобы сходился интеграл* $\int_0^1 e^{|f(x)|} dx$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 e^{x^{-1}\omega(x, f^*)_1} dx < \infty.$$

Достаточность условий в работах [1], [2] и [3] выражается через модуль непрерывности $\omega(\delta, f)_p$ функции $f(x)$. Переход в теореме 1 от $\omega(\delta, f^*)_p$ к $\omega(\delta, f)_p$ осуществляется при помощи следующих неравенств:

$$\omega^p(\delta, f^*)_p \leq C_p\left[\omega^p(\delta, f)_p + \delta\left(\int_\delta^1 \frac{\omega(t, f)}{t^{1+\frac{1}{p}}} dt\right)^p\right], \quad p > 1$$

$$\omega(\delta, f^*)_1 \leq C\omega(\delta, f).$$

Для функций многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ установлены лишь достаточные условия.

Теорема 3. *Если* $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in L_p(I)$, *I — k-мерный сегмент* $[0, 1; 0,1; \ldots; 0,1]$ *и*

$$\sum_{i=1}^k \int_0^1 x^{-k-1} \omega_i^p(x, f)_p \Phi'\left(\frac{1}{x}\right) dx < \infty,$$

то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in L_p \Phi(L).$$

Если же

$$\sum_{i=1}^k \int_0^1 x^{-k\frac{q}{p}+k-1} \omega_i^q(x; f)_p \Phi\left(\frac{1}{x}\right) dx < \infty,$$

то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in L_q \Phi(L).$$

Под $\omega_i(x, f)_p$ понимаем

$$\sup_{0 < h \leq \delta} \left\{\int_0^1 \cdots \int_0^{i-h} \cdots \int_0^1 |f(x_1, \ldots, x_{i+h}, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, x_k)|^p dx_1 \ldots dx_k\right\}^{\frac{i}{p}}.$$

Литература

1. П. Л. Ульянов, Вложение некоторых классов функций, Изв. АН СССР, серия матем., 32 (1968), 649—686.
2. П. Л. Ульянов, Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями в разных метриках, Матем. сб., 81 (123), (1970), 104—131.
3. L. Leindler, On embedding of classes H_p^ω, Acta Sci Math., **31**, 1—2 (1970), 13—31.

Секция вычислительной математики и прикладной математики

1. А. Виткуте (КПИ). **Метод статистических испытаний в исследовании вибраций в прецизионных подшипниках.**

2. К. Рагульскис (КПИ), М. Скуркайте (КПИ). **Об идентификации отдельных узлов механизмов передвижения ленты.**

3. Э. Гедгаудайте (КПИ), К. Рагульскис (КПИ). **Применение асимптотического метода в исследовании динамики механизмов на вибрирующем основании.**

4. Б. Квядарас (ИФМ), Б. Пикшрене (ИФМ). **Частное перераспределение полных резервов в задачах сетевого планирования.**

5. Р. Кондратас (ВГУ), Р. Плюшкявичюс (ИФМ). **К вопросу о разрешимости некоторых классов формул.**

Для простоты формулировок будем рассматривать сколемизированные (см., напр., [1]) формулы классического исчисления предикатов, находящиеся в предваренной нормальной форме (см., напр., [2]), т.е. формулы вида $\exists x_1 \dots x_n \bigvee_{i=1}^{l} K_i^{r_i}$ (1), где $K_i^{r_i}$ — элементарные конъюнкции*). Известно (см., напр., [3]), что для произвольного префикса и произвольного $K_i^{r_i}$ проблема разрешения формул классического исчисления предикатов решается отрицательно. Имеются многочисленные работы по исследованию проблемы разрешения для частных случаев, направленные главным образом на разрешение проблемы для ограниченного префикса. В этом сообщении рассматривается класс формул с произвольным префиксом, но с ограничением на матрицу.

Введем некоторые понятия. Будем говорить, что термы t_k и t'_k элементарно согласованы, если $t_k \rightleftharpoons t'_k$, либо один из термов t_k и t'_k является переменной. Будем говорить, что термы t_k и t'_k согласованы, если $t_k \rightleftharpoons f_1\Big(f_2 \dots \big(f_n(p)\dots\big)\Big)$, $t'_k \rightleftharpoons f_1\Big(f_2 \dots \big(f_n(q)\dots\big)\Big)$, где f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — произвольный функтор, а термы p и q элементарно согласованы. Систему равенств термов

$$\begin{cases} t_1 = t'_1 \\ \dots \\ t_n = t'_n \end{cases} \qquad (1)$$

будем называть согласованной, если

1) для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ t_i и t'_i согласованы и 2) не существует равенства $p=q$, где p и q — несогласованные термы, получаемого по транзитивности из системы (1). Две элементарные формулы A и B будем называть контрарными, если $A \rightleftharpoons \sigma_1 P(t_1, \dots, t_n)$, $B \rightleftharpoons \sigma_2 P(t_1, \dots, t_n)$, где $\sigma_1, \sigma_2 \in \{\neg, \lambda\}$ (λ — пустое слово), $\sigma_1 \neq \sigma_2$ и термы $t_1, \dots, t_n, t'_n, \dots, t'_n$ составляют согласованную систему.

Теорема. *Класс формул, в которых для любых p и q $(1 \leqslant p \leqslant l,\ 1 \leqslant q \leqslant l)$ и для $r_p \geqslant 2$ и $r_q \geqslant 2$ не имеется контрарных членов, разрешим по выводимости в классическом исчислении предикатов.* (r_p и r_q — размерности элементарных конъюнкций).

Интересно отметить, что если рассматривать формулы описанного выше класса в минисферном виде (см., напр., [4]), то можно построить простое исчисление (содержащее некоторые правила сокращения), при поиске вывода в котором не нужно введения какой-либо посылки, которая была бы длиннее ее заключения. Это имеет силу также и для сингулярного исчисления предикатов.

Литература

1. Г. Е. Минц, Теорема Эрбана, В сб. „Математическая теория логического вывода" М. 1967.
2. С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957.
3. Черч, Введение в математическую логику, М., ИЛ, 1960.
4. Ван Хао, На пути к механической математике, Кибернетический сборник, 5, М., ИЛ, 1962.

*) r_i назовем размерностью элементарной конъюнкции.

6. Р. Плюшкявичюс (ИФМ). **К вопросу о конструктивном исчислении с принципом конструктивного подбора.**

Целью настоящего сообщения является построение исчисления генценовского типа для фрагмента конструктивного исчисления предикатов с равенством, включающего принцип конструктивного подбора (см. [1]).

Рассмотрим конструктивное исчисление, обозначенное посредством M_0, получаемое из традиционного конструктивного исчисления предикатов с равенством*) (см., напр., [2]) путем удаления правила $\forall\rightarrow$ и присоединения следующего постулата:

$$(\forall x(A \vee \neg A) \& \neg\neg \exists x A) \supset \exists x A$$

(см. [1]). Заметим, что в том случае, когда формула A не содержит переменной x свободно, этот постулат превращается в следующий:

$$\left((A_0 \vee \neg A_0) \& \neg\neg A_0\right) \supset A_0,$$

где формула $A_0 \neq \exists x A$ (формула A содержит x свободно).

Рассмотрим исчисление M_1, получаемое из исчисления I_{0p} (см. [3]) путем удаления правила $\forall\rightarrow$ и присоединения следующих правил вывода:

$$\frac{\Gamma\rightarrow A(b) \vee \neg A(b);\ \Gamma \neg \exists x A \rightarrow \quad \text{переменная } b \text{ не входит в заключение}}{\Gamma\rightarrow \exists x A}$$

$$\frac{\Gamma A_0 \rightarrow;\ \Gamma \neg A_0 \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A_0}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Исчисления M_0 и M_1 равнообъемны.*

В доказательстве теоремы 1 главную роль играет доказательство допустимости правила сечения в исчислении M.

Из теоремы 1 следует (см., напр. [2]) теорема 2.

Теорема 2. *Исчисление M_0 непротиворечиво.*

Литература

1. А. А. Марков, О непрерывности конструктивных функций. Успехи матем. наук, № 3 (61), 226–230 (1954).
2. С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957.
3. Р. А. Плюшкевичус, О конструктивном исчислении предикатов С. Кангера и его модификации, Liet. matem. rink., V, № 4 (1965), 657–658.

7. В. Бикялене (ВГУ). **Статистические характеристики выборки, взятой из конечной генеральной совокупности.**

Пусть дана совокупность A целых неотрицательных чисел $y_{\nu 1}, y_{\nu 2}, \ldots, y_{\nu n_\nu}$. Выборку из совокупности A рассмотрим как случайный опыт, при котором из множества $u_\nu = \{1, 2, \ldots, n_\nu\}$ выбирается подмножество u_ν объема s_ν, $u_\nu \subset u_\nu$. Выбираем элементы без возвращения в совокупность A.

Рассмотрим распределение случайной величины

$$\xi_\nu = \sum_{i \in u_\nu} y_{\nu i}.$$

В [1] Я. Гаек получил необходимые и достаточные условия (условия 1–3 в следующей теореме) для того, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{\nu\to\infty} P\{\xi_\nu = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

*) Исчисление M_0 содержит все структурные правила вывода.

Оценим скорость сходимости в (1).

Теорема. *Пусть* $s_\nu \to \infty$ *при* $\nu \to \infty$, $s_\nu \leqslant \frac{1}{2} n_\nu$ *и выполнены условия*

1) $\lim\limits_{\nu\to\infty} M\xi_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} D\xi_\nu = \lambda > 0$,

2) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{s_\nu}{n_\nu} = 0$,

3) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{s_\nu}{n_\nu} \sum\limits_{y_{\nu i} \neq 1} y_{\nu_i}^2 = 0$.

Тогда существует константа C такая, что

$$\left| P\{\xi_\nu = k\} - \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \right| \leqslant C \left(\frac{s_\nu \sqrt{\lambda}}{n_\nu} + \frac{\lambda}{\sqrt{n_\nu}} + \frac{s_\nu}{n_\nu} \sum_{y_{\nu i} \neq 1} y_{\nu i}^2 \right)$$

для всех k.

Литература

1. J. Hajek, Limiting distributions in simple random sampling from a finite population, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., **5** (1960) 361–374.

8. С. Либярис (ВГУ). **Стандартные процедуры для алгоритмического языка МАЛГОЛ.**

9. В. Зинкявичюс (ВГУ), С. Либярис (ВГУ), Б. Мекайте (ВГУ). **Алгоритмы нормальной калькуляции.**

10. А. Жилинскас (ИФМ). **Об одном оптимальном методе поиска экстремума.**

Рассматривается задача поиска минимума вещественной функции $y(x)$, $x \in R^n$ в предположении, что метод поиска на каждом шаге может сохранять лишь один результат эксперимента, т.е. на k-м шаге измеряется (вычисляется) значение $y(x)$ в точке x_k и проводится запоминание: в памяти оставляются либо результаты эксперимента $(y(x_k), x_k)$, либо хранившийся до этого вектор (y_{0k-1}, x_{0k-1}). Формально метод поиска на k-м шаге описывается правилом планирования $x_k = \psi_k(y_{0k-1}, x_{0k-1})$ и правилом запоминания $y_{0k} = \varphi_k(y_{0k-1}, x_{0k-1}, y(x_k), x_k)$, причем значение функции φ_k равно значению одного из аргументов y_{0k-1} или $y(x_k)$. После определенного количества таких шагов N поиск прекращается и $N+1$-м шагом процедуры является принятие решения x_0 о местонахождении минимума $y(x)$.

Пусть $y(x)$ — реализация гауссовского однородного изотропного случайного поля. Оптимальным в байесовском смысле назовем метод поиска, применение которого обеспечивает минимум математического ожидания $y(x_0)$.

Предполагая математическое ожидание $y(x)$ равным нулю, дисперсию — единице и корреляционную функцию между $y(x_1)$, $y(x_2)$ обозначая $\rho(\|x_1 - x_2\|)$ $\left(\rho(r) > 0,\ 0 \leqslant r < \infty;\ \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = 0\right)$, доказываем следующую теорему.

Теорема. N — *шаговый оптимальный в байесовском смысле метод поиска минимума описывается системой рекуррентных уравнений*

$$\begin{cases} Y_{N+1}(y_{0N}) = \min\limits_{x \in R^n} \{ y_{0N} \cdot \rho(\|x_{0N} - x\|) \}, \\ x_0 = \arg Y_{N+1}(y_{0N}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_k(y_{0k-1}) = \min\limits_{x\in R^n}\left(Y_{k+1}(y_{0k-1}) - \int\limits_{-\infty}^{y_{0k-1}} \dfrac{Y_{k+1}(y_{0k-1}) - Y_{k+1}(y)}{\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2(\|x_{0k-1}-x\|)\right)}} \times \right. \\ \left. \times \exp\left\{-\dfrac{[y-y_{0k-1}\cdot\rho(\|x_{0k-1}-x\|)]^2}{2\left(1-\rho^2(\|x_{0k-1}-x\|)\right)}\right\} dy\right), \\ \psi_k(y_{0k-1}, x_{0k-1}) = \arg Y_k(y_{0k-1}), \\ \varphi_k\left(y_{0k-1}, x_{0k-1}, y(x_k), x_k\right) = \min\{y_{0k-1}, y(x_k)\} \qquad k=N, N-2, \ldots, 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_2(y)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\dfrac{y^2}{2}\right\} dy, \\ x_1 \text{ — любой вектор из } R^n, \end{cases}$$

где смысл символа arg *определен следующими равенствами: для некоторой функции* $f(x)$, $x\in R^n$, *минимум который существует,* $a = \arg\min\limits_{x\in R^n} f(x)$, *если* $f(a)\leqslant f(x)$, $x\in R^n$.

Обсуждаются вопросы реализации метода на ЭВМ и его аналогия с хорошо известной процедурой случайного поиска Л. Растригина.

11. В. Клейза (ИФМ). **Решение систем нелинейных уравнений методом Монте—Карло.**

В сообщении исследуется применимость одного метода Монте—Карло к решению систем нелинейных уравнений. Применение этого метода (предназначенного для решения систем линейных алгебраических уравнений с произвольной невырожденной матрицей) наталкивается на ряд трудностей. Одной из них является необращение в нуль интеграла

$$\int\limits_{\bar D}\ldots\int y_k f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1 dy_2\ldots dy_n,$$

где $\bar D$ — область специального типа. При изучении применимости метода Монте—Карло к нелинейным системам, автором были получены достаточные условия применимости. Из необходимых условий можно указать следующее.

Определение. Ограниченную, замкнутую (необязательно связную) область $\bar D$, n-мерного евклидова пространства будем называть симметрической (относительно начала координат), если из $y\in\bar D$ следует $-y\in\bar D$.

Пусть $\{\bar D_\alpha\}$ — класс симметрических областей и $\bar D_\alpha\subset\bar D$, тогда действительна следующая теорема.

Теорема. *Если* $f(y)$ *непрерывна на измеримой и симметрической области* $\bar D$ *и*

$$\int\limits_{\bar D_\alpha}\ldots\int y_k f(y)\, dy = 0, \quad \forall k, \ \forall\alpha,$$

то

$$f(y) = f(-y), \quad \forall y\in D.$$

Доказательство. Пусть $\bar S(y_0, \varepsilon)$ — n-мерный замкнутый шар радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке y_0. Тогда для любого $y_0\in\bar D$, $y_0\neq 0$ найдется $\varepsilon>0$ такое, что $\bar S(y_0, \varepsilon)\subset\bar D$ и $0\notin\bar S(y_0, \varepsilon)$. При таком выборе $\bar S(y_0, \varepsilon)\cup\bar S(-y_0, \varepsilon)\in\{\bar D_\alpha\}$ и

$$0 = \int\limits_{\bar S(y_0, \varepsilon)\cup\bar S(-y_0, \varepsilon)}\ldots\int y_k f(y)\, dy = \int\limits_{\bar S(y_0, \varepsilon)}\ldots\int y_k[f(y) - f(-y)]\, dy. \qquad (1)$$

Допустим, что $f(y_0)\neq f(-y_0)$ и $f(y_0)-f(-y_0)>0$ (для определенности). Тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что

$$f(y)-f(-y)>0, \quad \forall y\in \bar{S}(y_0, \varepsilon)$$

и хоть одна из y_k не меняет знака в области $\bar{S}(y_0, \varepsilon)$ (если знак меняют все y_k, то $0\in\bar{S}(y_0, \varepsilon)$, что противоречит выбору y_0 и ε). Пусть $y_k>0$, тогда

$$y_k[f(y)-f(-y)]>0, \quad \forall y\in \bar{S}(y_0, \varepsilon),$$

т.е.

$$\int\limits_{\bar{S}(y_0, \varepsilon)}\cdots\int y_k[f(y)-f(-y)]\,dy>0,$$

что противоречит (1). Из этого следует

$$f(y)=f(-y), \quad \forall y\in D.$$

Из доказанной теоремы и конструкции функции $f(y)$ можно заключить, что левые части решаемой нелинейной системы должны быть четны или нечетны относительно решения системы.

12. И. Уждавинис (ВГУ). **О сходимости методов коллокационного типа для некоторых нелинейных и линейных уравнений.**

I. Рассматривается интегральное уравнение типа Гаммерштейна

$$u(x, y)-\int\limits_0^a\int\limits_0^b K(x, y, s, t)f\Big(s, t, u(s, t), u_x(s, t), u_y(s, t)\Big)\,ds\,dt=g(x, y). \tag{1}$$

Приближенное решение разыскивается в виде

$$u_{mn}(x, y)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl}v_k(x)\,z_l(y), \tag{2}$$

где $v_k(x)$ и $z_e(y)$ алгебраические многочлены, соответственно степени k и l. Коэффициенты a_{kl} $(k=0,1,\ldots,m;\ l=0,\ldots,n)$ определяются по методу коллокаций из следующей системы уравнений:

$$u_{mn}(x_i^{(m)}, y_j^{(n)})-\int\limits_0^a\int\limits_0^b K(x_i^{(m)}, y_j^{(n)}, s, t)\times$$

$$\times f\Big(s, t, u_{mn}(s, t), u_{mnx}(s, t), u_{mny}(s, t)\Big)\,ds\,dt=g(x_i^{(m)}, y_j^{(n)}), \tag{3}$$

где $(x_i^{(m)}, y_j^{(n)})$ $(i=0, 1, \ldots, m;\ j=0, 1, \ldots, n)$ — корни ортогональных полиномов.

Исследуется разрешимость системы (3) и устанавливается быстрота сходимости приближенного решения (2) к точному решению уравнения (1).

Полученные результаты используются для исследования метода коллокаций для приближенного решения задачи Гурса для слабо нелинейного гиперболического уравнения:

$$\frac{\partial^2 2}{\partial x\,\partial y}=h\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad z(x, 0)=\sigma(x), \quad z(0, y)=\tau(y)$$

$$\tau(0)=\sigma(0)=z_0, \quad 0\leqslant x\leqslant c, \quad 0\leqslant y\leqslant d. \tag{4}$$

11. Рассматривается краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y+p_3(x)y\left(x-\Delta(x)\right)=f(x), \tag{5}$$

$$a_1y(a)+a_2y'(a)=0,$$

$$b_1y(b)+b_2y'(b)=0,$$

$$y(x)\equiv 0, \quad x\in E_0. \tag{6}$$

Приближенное решение разыскивается в виде

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k v_{k+2}(x),$$

где $v_{k+2}(x)$ алгебраический многочлен степени $(k+2)$. Неизвестные коэффициенты a_k ($k=0, 1, \ldots, n$) определяются методом подобластей. Рассматривается разрешимость приближенных уравнений и сходимость метода подобластей в случае узлов Чебышева. Исследуется также метод типа подобластей в случае равноотстоящих узлов для задачи (5), (6).

13. В. Рагульскене (КПИ), Г. Улинскайте (КПИ). **Условия отрыва системы от основания.**

14. А. Андрюшкявичюс (КПИ), К. Рагульскис (КПИ). **Об одном методе подсчета собственных частот крутильной колебательной системы.**

При проектировании крутильных колебательных систем необходимо так разложить спектры частот свободных и вынужденных колебаний, чтобы избежать резонанса. Поэтому для наглядного анализа и расчета частот свободных колебаний целесообразны простые аналитические формулы.

Излагается метод подсчета собственных частот крутильной колебательной системы с различными жесткостями и моментами инерции.

В том случае, когда собственные частоты системы расположены в интервале

$$\left(0;\ \frac{2k}{I}\ (1+m)\right),$$

их можно получить по формулам:

$$w^2=\frac{2k}{I}\ (1-m\cos\psi),$$

$$a_{n,1}\sin(n+1)\psi+a_{n,2}\sin n\psi+a_{n,3}\sin(n-1)\psi+\ldots+a_{n,n+1}\sin\psi=0,$$

где k — жесткость, I — момент инерции, $m>0$ — параметр, ψ — угол, изменяющийся в интервале $\left(\arccos\frac{1}{m};\ \pi\right)$, n — число степеней свобод,

$$a_{n,s}=m(1+\beta_n)(a_{n-1,s}+a_{n-1,s-2})+(\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}-2\beta_n)a_{n-1,s-1}-$$

$$-(1+\varepsilon_n)^2a_{n-2,s-2}, \qquad s=1,2\ldots n,$$

$$a_{n,n+1}=m(1+\beta_n)a_{n-1,n-1}+(\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}-2\beta_n)a_{n-1,n}-(1+\varepsilon_n)^2a_{n-2,n-1}.$$

При $m=1$, $\varepsilon_j=0$, $\beta_j=0$ в случае системы с закрепленными концами

$$\omega_i^2=\frac{2k}{I}\left(1-\cos\frac{i\pi}{n+1}\right) \qquad i=1,2\ldots n$$

при $m=1$, $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_j=0$. $j=2,3,\ldots,(n+1)$ $\beta_j=0$, $=1,2\ldots n$

$$\omega_i^2=\frac{2k}{I}\left(1-\cos\frac{2i\pi}{2n+1}\right) \qquad i=1,2\ldots n$$

при $m=1$, $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_j=0$, $j=+2\ldots n$, $\beta_j=0$, $\varepsilon_{n+1}=1, j=1, 2\ldots n$

$$\omega_i^2=\frac{2k}{I}\left(1-\cos\frac{i\pi}{n}\right)\qquad i=1, 2\ldots n.$$

В случае системы с одним свободным концом при $m=1$, $\varepsilon_j=0$, $\beta_j=0$

$$\omega_i^2=\frac{2k}{I}\left\{1-\cos\frac{[2(i-1)+1]\pi}{2n+1}\right\}\qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Когда имеется система со свободными концами, при $m=1$, $\varepsilon_j=0$, $\beta_j=0$,

$$\omega_i^2=\frac{2k}{I}\left[1-\cos\frac{(i-1)\pi}{n}\right]\qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Для всех изложенных случаев предлагаются алгоритмы оптимального синтеза систем по частотному спектру.

Литература

1. Ф. И. Чжэнь, Вычисление собственных частот колебательной системы из элементов с одинаковыми моментами инерции и жесткостями, Прикладная механика, М., „Мир", 1969.
2. Дж. Х. Уилкинсон, Алгебраическая проблема собственных значений, М., „Наука", 1970.
3. Л. А. Растригин, Статистические методы поиска, М., „Наука", 1968.

15. М. Сапаговас (ИФМ). **Приближенное решение уравнений заданной средней кривизны.**

Рассматривается вопрос о приближенном построении поверхности с заданным краем и заданной средней кривизной. Эта задача может быть сформулирована как краевая задача для квазилинейного эллиптического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=H(x, y, u) \qquad (1)$$

с краевым условием

$$u\,|_\Gamma=\varphi(s), \qquad (2)$$

где $p=\frac{\partial u}{\partial x}$, $q=\frac{\partial u}{\partial y}$, Γ — замкнутая кривая, H и φ — заданные функции своих аргументов. Задача (1)—(2) заменяется системой разностных уравнений с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$.

Пусть выполнены следующие условия: $\frac{\partial H}{\partial z}\geqslant\text{const}>0$ и для задачи (1)—(2) существует априорная оценка $p^2+q^2\leqslant M<\infty$. Тогда система нелинейных разностных уравнений имеет единственное решение, которое сходится в среднем к решению задачи (1)—(2). Приближенное решение находится одним из итерационных методов, для которых доказывается сходимость.

16. Г. Пранявичюс (КПИ). **Закон распределения числа выбросов.**

17. М. Грицюс (КПИ), В. Станкявичюс (КПИ). **Применение теории подобия и размерностей к теории фильтрования воды.**

Изменение скорости фильтрации воды v можно определить из уравнения [1]

$$\frac{\partial^2 c}{\partial l\,\partial t}+\frac{K_0 S_0}{v}\frac{\partial c}{\partial}-b\frac{\partial c}{\partial l}=0. \qquad (1)$$

Но интеграл ее довольно сложный и для практических расчетов трудно применим. Поэтому скорость фильтрации v определена на основе теории подобия и размерностей. Она зависит от следующих факторов: начальной скорости v_0 (*см/сек*); вязкости воды μ

г/см · сек); плотности воды ρ (*г/см*^{3}); времени фильтрации t (*сек*); диаметра одной частицы $Fe(OH_3)_3 - d$ (*см*); константы скорости окисления $Fe^{2+} - K_0$ (*см/сек*). Тогда

$$v = v_0 + f(v_0, \mu, \rho, t, d, K_0). \tag{2}$$

Приняв за основные единицы μ, ρ и d и воспользовавшись П-теоремой, уравнение (2) представляем в критериальной форме:

$$v = v_0 + \frac{\mu d^3}{\rho} \cdot f\left(\frac{v_0 \rho}{\mu d^3}, \frac{t\mu}{\rho d^2}, \frac{K_0 \rho}{\mu d^3}\right). \tag{3}$$

Разлагая функцию (3) в степенной ряд и ограничиваясь его первым членом, получим приближенную зависимость:

$$v = v_0 + \frac{\mu d^3}{\rho} \left(\frac{v_0 \rho}{\mu d^3}\right)^\alpha \left(\frac{t\mu}{\rho d^2}\right)^\beta \left(\frac{K_0 \rho}{\mu d^3}\right)^\gamma. \tag{4}$$

Для практических расчетов особенно важно выяснить зависимость изменения v от v_0, t и K_0. Тогда

$$v = v_0 + A v_0^\alpha t^\beta K_0^\gamma, \tag{5}$$

где

$$A = \varphi(\mu, \rho, d). \tag{6}$$

Численные значения величин α, β, γ и A были найдены из экспериментальных данных. В пределах изменения времени $9 \leqslant t \leqslant \infty$ они равны: $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}4$; $\gamma = 0{,}4$; $A = 1$. Окончательно получаем:

$$v = v_0 + v^{0,6} \cdot t^{0,4} K_0^{0,4}). \tag{7}$$

Аналогично был определен и коэффициент фильтрования b, размерность которого судя по уравнению (1) *сек* -1.

$$b = f(v_0 \mu, \rho, t, d\, K_0), \tag{8}$$

$$b = \frac{\mu}{\rho d^2} \cdot f\left(\frac{v_0 \rho}{\mu d^3}, \frac{t\mu}{\rho d^3}, \frac{K_0 \rho}{\mu d^3}\right), \tag{9}$$

$$b = A t^\alpha v_0^\beta K_0^\gamma. \tag{10}$$

Численные значения величин α, β, γ и A были найдены из экспериментальных данных и данных, полученных из интеграла уравнения (1) электронно-вычислительной машиной „Минск-22": $\alpha = -0{,}80$; $\beta = -0{,}44$; $\gamma = 0{,}20$; $A = 1{,}00$. Окончательно получаем:

$$b = A t^{-0,80} \cdot v_0^{-0,44} \cdot K_0^{0,20}. \tag{11}$$

Литература

1. В. Станкевичюс, Кинетика процесса обезжелезивания воды фильтрованием, Научные труды высших учебных заведений Литовской ССР, Строительство и архитектура, VIII, 1968.

18. М. Сапаговас (ИФМ), О. Удрене (ИФМ). **Решение нелинейного параболического уравнения, встречаемого в физике моря.**

Рассматривается дифференциальное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(\alpha, t) = \varphi_1(t), \; u(\beta, t) = \varphi_2(t), \; t \geqslant 0 \tag{2}$$

и периодическим начальным условием

$$u(x, 0) = u(x, T), \; \alpha \leqslant x \leqslant \beta. \tag{3}$$

Задача (1)—(3) встречается, в частности, в физике моря при изучении суточных или годовых температурных колебаний верхнего слоя моря или океана. Рассматриваемая задача решается методом конечных разностей. При этом получается следующая система нелинейных разностных уравнений

$$\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{l}=\frac{a_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j}-(a_{i+\frac{1}{2},j}+a_{i-\frac{1}{2},j})u_{i,j}+a_{i-\frac{1}{2},j}u_{i-1,j}}{h^2}+f_{i,j}, \quad (4)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ M)$$

$$u_{0,j}=\varphi_{1,j},\ u_{N,j}=\varphi_{2,j},\ u_{i,0}=u_{i,M}, \quad (5)$$

где

$$h=\frac{\beta-\alpha}{N},\quad l=\frac{T}{M},$$

$$a_{i+\frac{1}{2},j}=a\left(x_{i+\frac{1}{2}},\ t_j,\ \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h}\right),$$

$$f_{i,j}=f\left(x_i,\ t_j,\ u_{i,j},\ \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}\right).$$

Пусть для уравнения (1) выполнены условия:

$$a(x,\ t,\ p)\geqslant a_0>0,\quad a+\frac{\partial a}{\partial p}\cdot p\geqslant b_0>0,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial p}\right|\leqslant M<\infty. \quad (6)$$

Доказывается, что при достаточно малом h и при выполнении условий (6) разность $z_h=u-u_h$, где u — решение дифференциальной задачи, u_h — решение системы разностных уравнений, удовлетворяет линейному разностному уравнению положительного типа. Следовательно, имеет место принцип максимума, на основании которого получается априорная оценка для $|z_h|$. Из последней следует существование единственного решения задачи (4)—(5), сходимость метода конечных разностей, а также сходимость метода простой итерации для решения нелинейной системы.

Рассмотрен также случай, когда условия (6) выполнены не для всех значений u и p, а лишь для $|u|\leqslant N_1$, $|p|\leqslant N_2$. Именно такой случай встречается при изучении суточных и годовых температурных колебаний.

На машине БЭСМ-4 решен пример в случае уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,\ t),$$

где c — константа, $f(x,\ t)$ — заданная функция, $\lambda=\dfrac{1}{1-c_1\ \dfrac{\partial u}{\partial x}}$.

19. В. Ундзенас (ВГУ). **Выделение параметров для небольшого числа языковых сигналов при использовании ЭВМ.**

20. В. Некрашас (ВГУ), В. Смагураускас (ВГУ), В. Добровольскис (ВГУ). **Задачи экономического характера и особенности реализации их с помощью ЭЦВМ типа «Минск».**

21. В. Клейза (ИФМ). **Решение нелинейных эллиптических уравнений методом Монте-Карло.**

Пусть требуется решить задачу Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения

$$Lu=\frac{\partial a(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)}{\partial x}+\frac{\partial b(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)}{\partial y}+c(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)=0,$$

$$u|_\Gamma=\varphi(x,\ y). \quad (1)$$

Предполагается существование (в области D) единственного и достаточно гладкого решения, непрерывного в замкнутой области $\bar{D}=D\cup\Gamma$. Относительно уравнения предположим выполненными условия ограниченной нелинейности и усиленной эллиптичности [1]. При этих ограничениях действительна следующая теорема.

Теорема. *При любом $u_0(x, y)$ найдется λ такая, что итерационный процесс*

$$\Delta u^{(n+1)} = \Delta u^{(n)} + \lambda L u^{(n)}, \quad u^{(n+1)}|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$$

сходится к решению задачи (1) *в некоторой метрике.*

При реализации этого процесса на каждом шаге приходится решать задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u^{(n+1)} = F^{(n)}(x, y), \quad u^{(n+1)}|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \tag{2}$$

где $F^{(n)}(x, y) = \Delta u^{(n)} + \lambda L u^{(n)}$. Если воспользоваться тем, что функцию Грина задачи Дирихле для круга можно выразить явно, то получим следующие выражения для решения задачи (2)

$$u^{(n+1)} = w^{(n)} - \iint\limits_{\bar{S}} F^{(n)} G \, d\xi \, d\eta,$$

где G — функция Грина (задачи Дирихле для круга $\bar{S} \supset \bar{D}$), а $w^{(n)}$ — решение задачи

$$\Delta w^{(n)} = 0$$

$$w^{(n)}|_{\Gamma} = \varphi(x, y) + \iint\limits_{\bar{S}} F^{(n)} G \, d\xi \, d\eta \, |_{\Gamma}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь численное решение задач (2) с применением метода Монте-Карло. Будем применять этот метод только для решения задач (3), т.к. это дает возможность не запоминать случайные блуждания (это не имеет места при решении задач (2) [2]). Пусть область $\bar{D}$ покрыта сеткой с шагом h. Обозначим множество внутренних узлов D_h, а граничных — Γ_h. Тогда возможна следующая схема вычислений.

1°. Из каждой точки D_h проводится по N случайных блужданий (до выхода на Γ_h) и запоминаются частоты выхода на Γ_h.

2°. Вычисляется $\iint\limits_{\bar{S}} F^{(n)} G d\xi d\eta$ на $D_h \cup \Gamma_h$.

3°. По результатам блужданий вычисляется приближенное решение задачи (3).

4°. Вычисляется $u_{(h)}^{(n+1)} = w_h^{(n)} - \iint\limits_{\bar{S}} F_h^{(n)} G d_\xi d_\eta$.

5°. Если $\| u_h^{(n)} - u_h^{(n+1)} \| < \varepsilon$, то на (7°), в противном случае на (6°).

6°. По значениям $u_h^{(n+1)}$ вычисляем $F_h^{(n+1)}$ и на (2°).

7°. Вычисления останавливаются.

Литература

1. М. П. Сапаговас, Решение квазилинейных эллиптических уравнений методом конечных разностей, Liet. matem. rink., V, № 2 (1965).
2. О. В. Григорьева, Метод Монте-Карло для одной краевой задачи эллиптического типа, Вероятностные методы и кибернетика, т. **125**, кн. 6 (1966).

22. Р. Буловас (ВИСИ), И. Жвинис (НИИЭСХ). **Решение дифференциальных уравнений статора асинхронных машин.**

Определение собственных частот колебаний электрических машин является очень сложной задачей. Проанализируем один из типичных случаев. В конструкциях асинхронных двигателей встречаются случаи, когда статор имеет n точек связей с корпусом. При решении этой колебательной системы получаются следующие дифференциальные уравнения с частотными производными:

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - b\dfrac{\partial^3 x}{\partial t^2 d\varphi} = \dfrac{\partial^3 x}{\partial \varphi^3} + \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + y, \\ c\dfrac{\partial^4 x}{dt^4} + d\dfrac{\partial^2 x}{dt^2} + e\dfrac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial \varphi} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^3 y}{\partial \varphi^3}. \end{cases} \quad (1)$$

Магнитные силы, действующие на пакет статора, выражаются уравнениями, содержащими ряды Фурье. Поэтому, применяя метод разделения переменных

$$\begin{cases} x(\varphi, t) = u(\varphi)e^{i\omega t}, \\ y(\varphi, t) = v(\varphi)e^{i\omega t}, \end{cases} \quad (2)$$

дифференциальные уравнения (1) записываются в форме:

$$\begin{cases} u''' + (1-\omega^2 b)u' + v'' + (1+\omega^2 a)v = 0, \\ u'' + \omega^2(d-\omega^2 c)u + v''' + \omega^2 e v' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему однородных дифференциальных уравнений (3), получим характеристическое уравнение

$$r^6 + \omega^2(e-b)r^4 - \omega^2(a+b+d-\omega c)r^2 - \omega^2(d-\omega^2 c)(1+\omega^2 a) = 0.$$

Общим решением дифференциальных уравнений (3) для $k=1, 2, 3, \ldots, n$ является

$$\begin{cases} u_k(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{3} (A_{kj}e^{r_j\varphi} + B_{kj}e^{-r_j\varphi}), \\ v_k(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{3} \beta_j (A_{kj}e^{r_j\varphi} + B_{kj}e^{-r_j\varphi}). \end{cases} \quad (4)$$

Постоянные A_{kj} и B_{kj}, согласно граничным условиям

$$\begin{cases} v_k(\varphi_k) = v_{k+1}(\varphi_k), \\ u_k(\varphi_k) = u_{k+1}(\varphi_k), \\ v_k'(\varphi_k) = v_{k+1}'(\varphi_k), \\ \dfrac{EF}{N}[u_{k+1}'(\varphi_k) - u_k'(\varphi_k)] - C_{kx}u_k(\varphi_k) = 0, \\ \dfrac{EF}{N}[u_k''(\varphi_k) - u_{k+1}''(\varphi_k)] - C_{ky}v_k(\varphi_k) = 0, \\ C_{kx}\dfrac{N}{EF}[1-\sigma^2 s\Delta_x]u_k(\varphi_k) - (1-s)[v_{k+1}''(\varphi_k) - \\ \quad - v_k''(\varphi_k)] - s[u_{k+1}'''(\varphi_k) - u_k'''(\varphi_k)] = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$k=1, 2, 3, \ldots, n;\qquad k+1=2, 3, 4, \ldots, n, 1,$

сводятся к решению системы уравнений $6n$ порядка. Для расчета собственных частот колебаний пакета статора один из постоянных приравнивается 1, а остальные находятся из уравнений.

Секция теории вероятностей

1. Г. Алешкявичюс (ИФМ). **Управление статистики частично наблюдаемых процессов.**

Рассматривается семейство однородных ветвящихся марковских случайных процессов рождения и гибели с одним типом частиц и дискретным временем, определенное однопараметрическим семейством производящих функций

$$f(t)=\mu+(1-\mu)\sum_{1}^{\infty}\lambda_j t^j, \qquad |t|\leqslant 1. \tag{1}$$

Предполагается, что известны все вероятности λ_j независимых превращений одной частицы в j новых частиц того же самого типа, а вероятность μ гибели частицы неизвестна и подлежит статистическому оцениванию. К сожалению, в некоторых случаях траектории таких ветвящихся процессов не наблюдаются непосредственно, а всякая попытка отбора частиц не дает репрезентативной выборки и, более того, она существенно модифицирует исходный процесс. Указанная причина заставила пересмотреть постановку задачи и включить в модель фактор вмешательства в качестве одного из предметов исследования.

Рассматривается следующая задача управления процессами.

Пусть даны:

1) исходное семейство ветвящихся процессов с производящей функцией (1);

2) правило вмешательства, разрешающее безвозвратный случайный выбор из всей популяции частиц;

3) функция выигрыша, определенная на стратегиях и выборочных последовательностях.

Требуется определить оптимальную стратегию, максимизирующую выигрыш, и величину этого выигрыша.

Ограничимся рассмотрением стационарных биномиальных стратегий с производящей функцией вмешательства

$$g(s,\ t)=\nu s+(1-\nu)\,t,$$

где ν — вероятность выбора частицы, определяемая стратегией управления.

Лемма 1. *Стационарная стратегия* $(\nu, \nu, \ldots)$ *порождает однородный марковский ветвящийся процесс* $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ *и условно-марковский ветвящийся процесс* $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$, *совместная производящая функция которых равна* $h(s, t)=f[g(s, t)]$.

Следуя Т. Харрис [1], легко проверить следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha=\sum_{1}^{\infty} j\lambda_j<\infty$. *Тогда для каждой стационарной стратегии справедлива альтернатива: либо* $M_\nu=(1-\mu)\ (1-\nu)\,\alpha\leqslant 1$ *и тогда процессы* $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ *и* $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ *с вероятностью* $q=1$ *вырождаются в нуль, либо* $M\nu>1$ *и тогда с вероятностью* $q<1$ *процессы вырождаются в нуль или с вероятностью* $1-q$ *они безгранично разрастаются, где* q *является решением уравнения* $q=h(1, q)$, $\mu<q<1$. *Во всех случаях альтернативы*

$E_\nu\xi_n$ M^n_ν, $E_\nu\eta_n=\dfrac{\nu}{1-\nu}M^n_\nu$.

Как показывает следующая теорема, не всякая функция выигрыша приемлема для описания модели управления.

Теорема. *Пусть для каждой стационарной стратегии* $(\nu, \nu, \ldots)$ *функция выигрыша равна*

$$v(\nu)=\sum_{1}^{\infty}\beta^n E_\nu\eta_n,\ 0<\beta\leqslant 1; \qquad v(0)=0.$$

Тогда для $\beta<\dfrac{1}{(1-\mu)\,\alpha}$ *стратегия* $\nu=1$ *„оптимальна“. Для* $\beta=\dfrac{1}{(1-\mu)\,\alpha}$ *все стационарные* *стратегии индиферентны, т.е.* $\forall_\nu v(\nu)\equiv 1$. *Для* $\beta>\frac{1}{(1-\mu)\alpha}$ *функция* $v(\nu)$ *не ограничена, так как для* $\alpha\beta(1-\mu)(1-\nu)\geqslant 1$, $v(\nu)=\infty$.

Аналогичные утверждения справедливы и для функций выигрыша $v(\nu)=\sup\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_1^n E_\nu\eta_j$, а также $v(\nu)=E_\nu\tau$, где τ — момент вырождения. Общая задача управления приводит к неоднородным ветвящимся процессам и рассматривается методом динамического программирования (см. [2]).

Литература

1. Т. Харрис, Теория ветвящихся процессов, М., „Мир", 1966.
2. Y. Sawaragi, T. Yoshikawa, Annals of Math. Statistics, **41**, 1 (1970), 78–86.

2. Р. Гилис (ИФМ). **О разложении Хида для векторнозначного гауссовского случайного процесса.**

Рассмотрим векторнозначный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$, $t\in T$ (T— любой интервал), со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с метрикой $\|\cdot\|=\sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Как известно (см. [1]), этот процесс полностью задается определенным гильбертовым пространством $H(R)$ с воспроизводящим ядром $R(s,t)$, $s, t\in T$, являющимся корреляционной функцией процесса:

$$M\Big(x,\ \xi(s)\Big)\Big(\overline{y,\ \xi(t)}\Big)=\Big(x,\ R(s,\ t)\,y\Big) \tag{1}$$

для любых $x, y\in\mathfrak{H}$, а само пространство $H(R)$ — линейная оболочка функций $R(\cdot,t)\,x$, замкнутая по скалярному произведению $<R(\cdot,s)\,x,\ R(\cdot,t)\,y>=\Big(x,\ R(s,t)\,y\Big)$.

Хида (см. [2]) получил разложение одномерного процесса, использовав теорему Хеллингера—Хана, которая позволяет разложить пространство $H(R)$ в прямую сумму некоторых подпространств. Дадим разложение векторнозначного гауссовского случайного процесса, используя ту же теорему.

Обозначим $H_t(R)\subset H(R)$ замкнутую линейную оболочку функций $\{R(\cdot,\tau)x,\ \tau\leqslant t,\ x\in\mathfrak{H}\}$. Положим $H_t^*(R)=\bigcap\limits_n H_{t+\frac{1}{n}}(R)$ и обозначим оператор проектирования на $H_t^*(R)$ через E_t.

(A) Предположим, что для всех $t\in T$ и $x\in\mathfrak{H}$ существуют пределы $\Big(x,\ \xi(t\pm 0)\Big)$ и $\Big(x,\ \xi(t-0)\Big)=\Big(x,\ \xi(t)\Big)$.

Пусть $H(\xi)$ — линейная оболочка величин $\Big(x,\ \xi(t)\Big)$, $t\in T$, $x\in\mathfrak{H}$, замкнутая по метрике (I), а $H_t(\xi)\subset H(\xi)$ — замкнутая линейная оболочка величин $\Big\{\Big(x,\ \xi(\tau)\Big),\ \tau\leqslant t\Big\}$ и $H_t^*(\xi)=$ $=\bigcap\limits_n H_{t+\frac{1}{n}}(\xi)$.

Имеет место изометрия между $H(\xi)$ и $H(R)$, определяемая следующим образом:

$$H(R)\ni R(\cdot,\ t)\,x\leftrightarrow\Big(x,\ \xi(t)\Big)\in H(\xi) \tag{2}$$

(см. [1]).

(B) Предположим, что $\bigcap\limits_{t\in T} H_t(\xi)=\{0\}$. Как известно из ($A$) [см. [3]), $H(\xi)$ (следовательно $H(R)$) — сепарабельно, что и предполагалось в [2].

Использовав теорему Хеллингера—Хана, представление функции $R(\cdot, t)x \in H(R)$ можно записать в следующем виде:

$$R(\cdot, t)\, x = \sum_i \int^t F_i(t, u, x)\, dE(u) f^{(i)} + \sum_{t_j \leqslant t} \sum_l b_j^l(t, x)\, g^{(j)\, l},$$

где функция с ортогональными приращениями $E(u)f^{(i)} \in H_u(R)$, $g^{(j)l} \in H_u^*(R) \ominus H_u(R)$, $F_i(t, u, x) \in L^2(\rho_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\rho_i(t) = \| E(t) f^{(i)} \|^2$ — непрерывная, неубывающая и $\rho_{i+1} \ll \rho_i$ ($\ll$ — знак абсолютной непрерывности).

Изометрия (2) наводит следующие соответствия:

$$H_t(R) \ni dE(t) f^{(i)} \leftrightarrow dB^{(i)}(t) \in H_t(\xi),$$

$$H_t(R) \ni g^{(j)\, l} \leftrightarrow \eta_{t_j}^l \in H_t(\xi).$$

Теорема. *Если выполнены* (A) и (B), *то существуют стохастические гауссовские меры* $\{B^{(i)}(u)\}$ *и случайные величины* $\eta_{t_j}^l$ *такие, что*

а) $B^{(i)}(\cdot)$, $\eta_{t_j}^l$, $i, j, l = 1, 2, \ldots$, *независимы,*

б) $M\left(B^{(i+1)}(\cdot)^2\right) \ll M\left(B^{(i)}(\cdot)^2\right)$, $i = 1, 2, \ldots$,

в) $\left(x, \xi(t)\right) = \sum_i \int^t F_i(t, u, x)\, dB^{(i)}(u) + \sum_{t_j \leqslant t} \sum_l b_j^l(t, x)\, \eta_{t_j}^l$, $x \in \mathfrak{H}$.

Литература

1. Ю. И. Голосов, А. А. Темпельман, Об эквивалентности мер, соответствующих гауссовским векторзначным функциям, ДАН СССР, 184, 6 (1969), 1271—1274.
2. T. Hida, Canonical representations of Gaussian processes and their applications, Memoirs of the College of Science University of Kyoto, Series A, Vol. XXXIII, Mathematics No 1, 1960.
3. H. Cramer, On the structure of purely nondeterministic stochastic processes, Arkiv Math., 4, 1961.

Т. Мирская (ИФМ), А. Темпельман (ИФМ). **О прогнозировании одного класса случайных процессов.**

Рассматриваются случайные процессы $\{\xi(t),\ t \in [0, T]\}$, законы распределения которых представляют собою смесь гауссовских законов, т.е. процессы, которым в пространстве $R^{[0, T]}$ действительных функций на $[0, T]$ соответствуют меры вида $P^T(A) = \sum_{i=1}^n q_i P_i^T(A)$, где P_i^T — гауссовские меры в $R^{[0, T]}$, $q_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n q_i = 1$.

Наилучший (в смысле среднеквадратичного отклонения) прогноз величины $\xi(s)$ ($s \in [0, T]$) по наблюденной реализации $x^\tau = \{x(t),\ t \in [0, \tau]\}$, $\tau < s$, случайного процесса $\{\xi(t),\ t \in [0, T]\}$ дается формулой:

$$\hat{\xi}(s) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\xi}_i(s)\, q_i \dfrac{dP_i^\tau}{dQ}(x^\tau)}{\sum_{i=1}^n q_i \dfrac{dP_i^\tau}{dQ}(x^\tau)},$$

где $\hat{\xi}_i(s)$ — наилучший (линейный) прогноз значения $\zeta_i(s)$ гауссовского случайного процесса $\zeta_i(t)$ с распределением P_i^τ в $R^{[0,\tau]}$ по данной реализации x^τ, $\frac{dP_i^\tau}{dQ}(x^\tau)$ — производная Радона — Никодима меры P_i^τ по мере $Q=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i^\tau$ в точке x^τ.

Очевидно, $\frac{dP_i^\tau}{dQ}(x^\tau)=n\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{dP_j^\tau}{dP_i^\tau}(x^\tau)\right)^{-1}$. Методы вычисления производных $\frac{dP_j^\tau}{dP_i^\tau}$ хорошо известны (см. например, [1]—[6]).

В качестве примера рассмотрим простейший случай: пусть $n=2$, меры P_1^T и P_2^T соответствуют гауссовским процессам с корреляционной функцией $R(s,t)=\min(s,t)$ и математическими ожиданиями $E_{P_1^T}\xi(t)=mt$ и $E_{P_2^T}\xi(t)=-mt$, $q_1=q_2=\frac{1}{2}$.

Для такого процесса наилучший прогноз:

$$\hat{\xi}(s)=\xi(\tau)+(s-\tau)\frac{e^{m\xi(\tau)}-e^{-m\xi(\tau)}}{e^{m\xi(\tau)}+e^{-m\xi(\tau)}}.$$

В этом случае нетрудно подсчитать среднеквадратичную погрешность прогноза:

$$\delta^2=s-\tau+m^2(s-\tau)^2\left\{1-\frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{mx}-e^{-mx}}{e^{mx}+e^{-mx}}\,e^{-\frac{(x-m\tau)^2}{2\tau}}dx+\right.$$

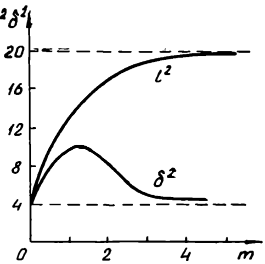
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{mx}-e^{-mx}}{e^{mx}+e^{-mx}}\right)^2 e^{-\frac{(x-m\tau)^2}{2\tau}}dx\right\}.$$

Линейный прогноз того же процесса дается формулой:

$$\xi^*(s)=\xi(\tau)+(s-\tau)\frac{m^2\xi(\tau)}{1+m^2\tau},$$

а его погрешность

$$l^2=s-\tau+m^2(s-\tau)^2\frac{1}{1+m^2\tau}.$$



Зависимость погрешности линейного и нелинейного прогноза от m для случая $\tau=1$, $s=5$ представлена на графике.

Литература

1. Ю. И. Голосов, Об одном способе вычисления производной Радона—Никодима двух гауссовских мер, ДАН СССР, 170, 2, 242—245 (1966).
2. Ю. И. Голосов, А. А. Темпельман, Об эквивалентности мер, соответствующих гауссовским векторнозначным функциям, ДАН СССР, 184, 6, 1271—1274 (1969).
3. Т. И. Мирская, А. С. Пабединскайте, А. А. Темпельман, Гильбертовы пространства некоторых воспроизводящих ядер и эквивалентность гауссовских мер, Liet. matem. rink, **VII**, 3, 459—469 (1967).
4. J. Hajek, On linear statistical problems in stochastic processes, Чехосл. матем. журнал, 12(87), 404—444 (1962). (Есть русский перевод в сб. Математика, 7, 3, 97—139 (1963).
5. E. Parzen, Regression analysis of continuous parameter time series, Proc. IV Berkeley Sympos., I, 469—489 (1961).
6. E. Parzen, Probability density functionals and reproducing kernel Hilbert spaces, Time Series Analysis, ch. II. N. Y. 1963, 155—169.

4. Э. Шпилевский (ИФМ). **Нелинейная оптимальная классификация результатов наблюдения диффузионных марковских процессов.**

При применении методов распознавания образов в автоматическом управлении, связи диагностике возникает задача классификации наблюдений случайных процессов [1]. Наблюдаемый сигнал представляет собой смесь полезного, ненаблюдаемого процесса и помехи. В работе получено решение задачи оптимальной классификации наблюдений на основе теории условных марковских процессов [2, 3].

Рассматривается следующая задача. Пусть Θ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяет системе стохастических уравнений

$$d\Theta_t = a(\Theta_t, \xi_t, u, t)\,dt + b(\Theta_t, \xi_t, u, t)\,dw_1(t). \tag{1}$$

Параметр u является случайной в общем случае векторной величиной, принимающей значения $u_1, u_2, \ldots, u_N$ с вероятностью $p_1, p_2, \ldots, p_N$, соответственно. При каждом значении u_i параметра u система (1) определяет один класс процессов A_i с определенными вероятностными характеристиками. Априорная вероятность класса A_i равна p_i.

Наблюдаемый процесс связан с полезным сигналом посредством стохастического уравнения

$$d\xi_t = A(\Theta_t, \xi_t, t)\,dt + B(\xi_t, t)\,dw_2(t). \tag{2}$$

Здесь $w_2(t)$ — стандартный винеровский процесс, не зависимый от $w_1(t)$. Уравнение (2) описывает систему наблюдений. По наблюдаемой реализации ξ_0^t требуется установить, к какому классу $A_1, A_2, \ldots, A_N$ относится ненаблюдаемый процесс Θ_t.

В качестве критерия оптимальности классификации использован байесовый критерий. Оптимальное решающее правило при функции потерь l_{ij} состоит в принятии решения $\gamma = k$, если

$$\sum_{i=1}^{N} l_{ik} P(A_i/\xi_0^t) \leqslant \sum_{i=1}^{N} l_{ij} P(A_i/\xi_0^t),$$

или если обе части (3) разделить на $P(A_i/\xi_0^t)$ —

$$\sum_{i=1}^{N} l_{ik}\mu_{i1} \leqslant \sum_{i=1}^{N} l_{ij}\mu_{i1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Показано, что апостериорная вероятность классов $P(A_i/\xi_0^t) = \pi_t(u_i)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$d\pi_t(u_i) = \pi_t(u_i)\left(\bar{A}_i(t) - \bar{A}(t)\right) B^{-2}(\xi_t, t)\left(d\xi_t - \bar{A}(t)\,dt\right), \tag{3}$$

где

$$\bar{A}_i(t) = M\{A(\Theta_t, \xi_t, t)/u = u_i, \xi_0^t\},$$

а

$$\bar{A}(t) = \sum_{i=1}^{N} \pi_t(u_i)\bar{A}_i(t).$$

Для вычисления μ_{ij} выведено выражение

$$\mu_{ij} = \frac{p_i}{p_j} \exp \int_0^t B^{-2}(\xi_t, t)\left\{\left(\bar{A}_i(t)\,d\xi_t - \frac{1}{2}\bar{A}_i^2(t)\,dt\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\bar{A}_j(t)\,d\xi_t - \frac{1}{2}\bar{A}_j^2(t)\,dt\right)\right\}. \tag{4}$$

В случае, когда функция потерь $l_{ij} = 1 - \delta_{ij}$, средний риск является полной вероятностью ошибочного решения. Тогда решающее правило состоит в отнесении наблюдаемого процесса к тому классу A_j, для которого функционал

$$F_i[\xi_0^t] = \int_0^t B^{-2}(\xi_t, t)\left[\bar{A}_i(t)\,d\xi_t - \frac{1}{2}\bar{A}_i^2(t)\,dt\right] + \ln p_i \tag{5}$$

имеет наибольшее значение.

Общее решение задачи конкретизировано в случае:

1) случайных процессов, определяемых системой линейных относительно Θ_t стохастических уравнений. Тогда

$$\bar{A}_i(t) = A_0(\xi_t, t) + A_1(\xi_t, t)\,m_i(t),$$

где

$$m_i(t) = M[\Theta_t/u = u_i,\ \xi_0^t]$$

удовлетворяет системе

$$dm_i(t) = [a_0 + a_1 m_i(t)]\,dt + \frac{\Gamma_i(t)\,A_1'(\xi_t, t)}{B^2(\xi_t, t)}\,[d\xi_t - A_0(\xi_t, t) - A_1(\xi_t, t)\,m_i(t)\,dt],$$

$$d\Gamma_i(t) = \left[a_1\Gamma_i(t) + \Gamma_i(t)\,a' - \frac{\Gamma_i(t)\,A_1'(\xi_t, t)\,A_1(\xi_t, t)\,\Gamma_i(t)}{B^2(\xi_t, t)} + b\cdot b'\right]dt;$$

2) случайных процессов с рациональной спектральной плотностью

$$s_i(\lambda) = 1/2\pi\,|P_i(i\lambda)/\Theta_i(i\lambda)|^2;$$

3) детерминированных сигналов $x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_N(t)$, наблюдаемых в белом шуме. Согласно (5), имеем

$$F_i[\xi_0^t] = \int_0^t \left[x_i(t)\,d\xi_t - \frac{1}{2}x_i^2(t)\,dt\right] + \ln p_i.$$

Литература

1. Л. П. Сысоев, Оценки параметров, обнаружение и различение сигналов, М., „Наука", 1969.
2. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, М., Изд. МГУ, 1966.
3. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов, Труды МИАН, 104, М., „Наука", 1968.
4. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963.

5. Р. Бенткус (ИФМ). **Об асимптотике спектральной функции стационарного процесса.**

6. А. Алешкявичене (ИФМ). **Предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления.**

7. Р. Гилис (ИФМ). **Некоторые задачи статистики для многомерных стационарных процессов.**

Пусть (относительно вероятностной меры P)

$$\xi(t)\left(=\{\xi_k(\omega, t)\}_{k=\overline{1,n}}\right) = \int e^{i\lambda t}\,\Phi(d\lambda), \quad -\infty < t < \infty,$$

— многомерный гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и матрицей корреляционных функций $B(s, t) = \{B_{kl}(t-s)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$. Пусть P_1 — другая вероятностная мера, относительно которой $\xi(t)$ также многомерный гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и матрицей корреляционных функций $B_1(s, t)=\{B_{1kl}(t-s)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$. Пусть $F(\Delta)=\{F_{kl}(\Delta)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$ и $F_1(\Delta)=\{F_{1kl}(\Delta)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$ матрицы спектральных мер, отвечающие P и P_1. Рассмотрим гауссовские меры P и P_1 на σ-алгебре $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(T)$, порожденной лишь величинами $\xi_k(t)$, $k=1, \ldots, n$, $t\in T$, где T — произвольное множество на действительной прямой. Введем гильбертово пространство $L_T^2(F, F_1)$ всех функций-матриц $\varphi(\lambda, \mu)=$ $=\{\varphi_{kl}(\lambda, \mu)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$ на плоскости $-\infty<\lambda, \mu<\infty$ со скалярным произведением

$$\langle\varphi, \psi\rangle=\int\int sp\{\varphi^*(\lambda, \mu)F(d\lambda)\psi(\lambda, \mu)F_1(d\mu)\},$$

которое получается пополнением линейного пространства всех функций-матриц вида

$$\varphi(\lambda, \mu)=\sum_{k,j,l,p} c_{kljp}\,e^{i(\lambda s_{klp}-\mu t_{jlp})}\delta_l^*\delta_p,$$

где s_{klp}, $t_{jlp}\in T$, c_{kljp} — действительные числа, $sp\{\cdot\}$ — след матрицы. Звездочка означает сопряженную матрицу, $\delta_p=\{\delta_{pk}\}^{k=\overline{1,n}}$, $\delta_{pp}=1$, $\delta_{pk}=0$ при $p\neq k$.

Имеет место перефразированная для нашего случая

Теорема 1 (см. [1], теорема 8). *Гауссовские меры P и P_1 эквивалентны на σ-алгебре $\mathfrak{U}(T)$ тогда и только тогда, когда разность матриц корреляционных функций*

$$b(s, t)=B(s, t)-B_1(s, t)$$

представима в виде

$$b(s, t)=\int\int e^{-i(\lambda s-\mu t)}F(d\lambda)\psi(\lambda, \mu)F_1(d\mu) \tag{1}$$

при $s, t\in T$, где матрица функций

$$\psi(\lambda, \mu)=\{\psi_{kl}(\lambda, \mu)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$$

такова, что

$$\int\int sp\{\psi^*(\lambda, \mu)F(d\lambda)\psi(\lambda, \mu)F_1(d\mu)\}<\infty.$$

Для эквивалентных мер P и P_1 интегральное уравнение (1) *имеет решение $\psi(\lambda, \mu)\in$ $\in L_T^2(F, F_1)$. Плотность $p(\omega)=\dfrac{P_1(d\omega)}{P(d\omega)}$ эквивалентных мер может быть описана формулой*

$$p(\omega)=D\exp\left\{-\frac{1}{2}sp\{\psi(\lambda, \mu)\Psi(d\lambda, d\mu)\}\right\},$$

где $\psi(\lambda, \mu)$ — решение уравнения (1) *из пространства $L_T^2(F, F_1)$, стохастическая мера $\Psi(d\lambda, d\mu)$ определяется так:*

$$\Psi(\Delta_1\times\Delta_2)-\Phi(\Delta_1)\Phi^*(\Delta_2)-F(\Delta_1\cap\Delta_2),$$

а D — нормирующий множитель.

Рассмотрим случай, когда спектральные меры $F(d\lambda)$ и $F_1(d\mu)$ абсолютно непрерывны и имеют ограниченные плотности соответственно

$$f(\lambda)=\{f_{kl}(\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}} \text{ и } f_1(\lambda)=\{f_{1kl}(\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}},$$

имеющие для почти всех λ один и тот же ранг $m\leqslant n$.

Теорема 2. *Для эквивалентности гауссовских мер P и P_1 необходимо и достаточно, чтобы разность их матриц корреляционных функций $b(s, t)$, $s, t\in T$, могла быть продолжена в матрицу интегрируемых в квадрате функций $b(s, t)$ (на всей плоскости $-\infty<s, t<\infty$), преобразование Фурье которых*

$$\varphi(\lambda, \mu)=\frac{1}{4\pi^2}\int\int e^{i(\lambda s-\mu t)}b(s, t)\,ds\,dt$$

удовлетворяло бы условию

$$\int\int sp\{\varphi^*(\lambda,\mu)f^+(\lambda)\varphi(\lambda,\mu)f_1^+(\mu)\}d\lambda d\mu<\infty,$$

где $f^+(\lambda)$ *и* $f_1^+(\mu)$ *псевдообратные* ([2], стр. 34) *матрицы для* $f(\lambda)$ *и* $f_1(\mu)$, *соответственно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11 [1].

Имеет место аналог теоремы (16) [1] теорема 3.

Теорема 3. *Пусть матрица спектральных плотностей* $f(\lambda)$ (*и* $f_1(\mu)$) *имеет ранг* $m\leqslant n$. *Если существует матричный (размерности* $m\times n$) *устойчивый полином* $R(z)$ (*все корни* $\det R(z)R^*(z)$ *лежат в левой полуплоскости) такой, что*

$$0<\varliminf_{\lambda\to\infty} R(i\lambda)f(\lambda)R^*(i\lambda)\leqslant\varlimsup_{\lambda\to\infty}R(i\lambda)f(\lambda)R^*(i\lambda)<\infty,$$

то условие

$$\int\int_{T\times T} sp\left\{\left(R\left(\frac{d}{dt}\right)b(s-t)R^*\left(\frac{d}{ds}\right)\right)^* R\left(\frac{d}{dt}\right)b(s-t)R^*\left(\frac{d}{ds}\right)\right\}dtds<\infty$$

является необходимым и достаточным для эквивалентности гауссовских мер P *и* P_1 *на* σ*-алгебре* $\mathfrak{U}(T)$.

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские случайные процессы, М., 1970.
2. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1967.

8. Ю. Мачис (ИФМ). **Устойчивость разложений биноминального закона.**

9. Л. Саулис (ИФМ). **О многомерной локальной предельной теореме для плотности распределения.**

Пусть

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots \tag{1}$$

— последовательность независимых k-мерных случайных векторов.

Обозначим $(\mathbf{t},\mathbf{x})$ — скалярное произведение k-мерных векторов $\mathbf{t}$ и $\mathbf{x}$ евклидова пространства R^k, $|\mathbf{x}|$ — длина вектора $\mathbf{x}$.

Пусть $\mathbf{M}\xi_j=0$, $\sigma_j^2=\mathbf{M}|\xi_j|^2<\infty$ и ξ_j имеет плотность распределения (п. р.) $p_j(\mathbf{x})$, ограниченную константой A_j, $j=1,2,\ldots$.

Обозначим

$$\mathbf{S}_n=\sum_{j=1}^n\xi_j,\quad D_n=\mathbf{M}\mathbf{S}_n\mathbf{S}_n',\quad B_n^2=\sum_{j=1}^n\sigma_j^2,$$

$$\mathbf{Y}_n=K_n\mathbf{S}_n,\ \mathbf{Z}_n=M_n\mathbf{S}_n.$$

Здесь матрица K_n такова, что $K_nD_nK_n'=I$, а M_n — диагональная матрица с i—м диагональным элементом B_{ni}^{-1}, где B_{ni}^{-1} — диагональный элемент матрицы D_n, $i=1,2,\ldots,k$.

Пусть далее $U_n(\mathbf{x})$ и $u_n(\mathbf{x})$ означают функцию распределения (ф. р.) и п. р. $\mathbf{y}_n$, $F_n(\mathbf{x})$ и $p_n(\mathbf{x})$ ф. р. и п. р. $\mathbf{Z}_n$, $\Phi(\mathbf{x};T)$ и $\varphi(\mathbf{x};T)$ — k-мерную нормальную ф. р. и п. р. с параметрами 0 и T.

Теорема 1. *Если для последовательности* (1) *выполнены условия*

1) $\sup_{\mathbf{x}} U_n(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{x};I)\to 0$ *при* $n\to\infty$,

2) *существует константа* C *такая, что для всех* j

$$\sigma_j^kA_j\leqslant C,$$

3) $\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j\leqslant B_n^{\rho}$, $\min_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j\geqslant B_n^{-R}$, *где*

ρ и R положительные числа, причем $\rho<1$, а R — конечно, то для всех $0\leqslant m\leqslant 2$

$$\sup_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}|^m |u_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\ I)| \to 0 \quad при \quad n\to\infty.$$

Теорема 2. *Если для последовательности* (1) *выполнены условия* 2, 3 *теоремы* 1 *и условие*

$$1')\ \sup_{\mathbf{x}} |F_n(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{x};\ T)| \to 0 \quad при \quad n\to\infty,$$

где T не вырождена,
то для всех $0\leqslant m\leqslant 2$

$$\sup_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}|^m |p_n(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x};\ T)| \to 0 \quad при \quad n\to\infty.$$

Замечание. Нормировка $\mathbf{S}_n$ матрицей M_n переводит ковариационную матрицу D_n в матрицу корреляции, которая, естественно, может вырождаться при $n\to\infty$. Нормировка $\mathbf{S}_n$ более общего вида матрицей K_n ковариационную матрицу D_n переводит в диагональную матрицу с единичными диагональными элементами. Так что теорема 1, отличающаяся от теоремы 2 лишь способом нормировки $\mathbf{S}_n$, охватывает более общий класс последовательностей случайных векторов, ибо из выполнения условия 1′ следует выполнение условия 1.

Литература

1. П. Сурвила, О локальной предельной теореме для плотностей, Liet. matem. rink., II (1963), 225–236.
2. Г. Л. Шервашидзе, Л. И. Саулис, О многомерных предельных теоремах для плотностей распределения, Сообщения АН Грузинской ССР, **60**, №3 (1970), 533–536.
3. W. L. Smith, A frequency — function from of the central limit theorem Proc. Cambridge Philos., Soc., **49**, 3 (1953), 462–472.

10. Р. Лапинскас (ВГУ), **О скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм случайных векторов, связанных в однородную цепь Маркова.**

Пусть случайные векторы (сл. в.) $\mathbf{X}_m=\mathbf{g}\ (\xi_m)$, $\mathbf{MX}_m=\mathbf{0}$, $m=\overline{1,\ n}$, связаны в однородную цепь Маркова $\{\xi_m,\ m=\overline{1,\ n}\}$, которую будем характеризовать коэффициентом эргодичности

$$\alpha=1-\sup_{\substack{\omega,\ \tilde\omega\\ A}} |\mathbf{P}(\omega,\ A)-\mathbf{P}(\tilde\omega,\ A)|\ (>0).$$

Здесь $\mathbf{P}(\omega,\ A)$ — переходная функция. Пусть ковариационная матрица D_n сл. в.

$$\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j$$

не вырождена и пусть

$$\beta_3(\mathbf{g})=\sup_{\omega}\int|\mathbf{g}(\tilde\omega)|^3\,\mathbf{P}(\omega,\ d\tilde\omega)<\infty.$$

Теорема. *Для любого выпуклого множества $A\in R^k$*

$$|\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_n}(A)-\Phi(A)|\leqslant C(k)\,\frac{\beta_3(E_n\mathbf{g})}{\alpha^3\sqrt{n}\,(1+\beta^3(A))}.$$

Здесь $\mathbf{Z}_n=E_n\mathbf{S}_n$, $E_nE_n'=D_n^{-1}$ (знак ′ означает транспонирование), Φ (′) стандартное k-мерное нормальное распределение, а

$$\beta(A)=\begin{cases}\inf\limits_{\mathbf{x}\in R^k\setminus A}|\mathbf{x}|, & \mathbf{0}\in A,\\ \inf\limits_{\mathbf{x}\in A}|\mathbf{x}|, & \mathbf{0}\notin A.\end{cases}$$

Указанная оценка обобщает результаты [1] — [3]. При доказательстве используются методы работ [4] и [5].

Литература

1. С. Х. Сираждинов, Ш. К. Форманов, О предельных теоремах для цепей Маркова, Советско-японский симпозиум по теории вероятностей, Хабаровск, 1969, 90—106.
2. Ш. К. Форманов, О равномерной оценке остаточного члена в многомерной предельной теореме для однородных цепей Маркова, I., Изв. АН УзССР, серия физ.-матем. наук, 1971, № 3, 25—30.
3. А. Рауделюнас, Об оценке остаточного члена в многомерной предельной теореме для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, Liet. matem. rink., **XI**, 2, (1971), 432—434.
4. В. И. Ротарь. Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Теор. вер. и ее прим., **XV**, 4 (1970), 647—665.
5. В. А. Статулявичюс, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, I., Liet. matem. rink., **IX**, 2 (1969), 345—362.

11. В. Статулявичюс (ИФМ). **Предельные теоремы для сумм слабо зависимых величин.**

12. Э. Мисявичюс (ВГУ). **Асимптотические разложения для вероятностей больших уклонений в однородных цепях Маркова.**

Пусть задана однородная стационарная цепь Маркова $\{\xi_j, j=1, 2, \ldots, n\}$, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, с переходной через один шаг вероятностной функцией $P(\omega, A)$, $\omega\in\Omega$, $A\in\mathcal{F}$.

Рассматриваются случайные, связанные в цепь Маркова, величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_j=g(\xi_j)$, $j=1, 2, \ldots, n$, и $g(\omega)$, $\omega\in\Omega$ — некоторая действительная $\mathcal{F}$ — измеримая функция.

Обозначим: функцию распределения (ф. р.) какой-нибудь случайной величины $X-F_X$, (0; 1) — нормальную ф. р. — Φ, коэффициент эргодичности — α,

$$\alpha=1-\sup_{\omega, \tilde{\omega}, A}|P(\omega, A)-P(\tilde{\omega}, A)|,$$

центрированную и соответствующим образом нормированную сумму случайных величин — Z_n,

$$Z_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-MX_j),\quad \sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{D\cdot S_n}{n},$$

степенной ряд Крамера — $\lambda(t)$,

$$\lambda(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j t^j.$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие A: существует равномерно ограниченная условная плотность $p_{X_2}(x \mid \xi_1, \xi_3)$

Условие B: существует постоянная a, $0<a<\infty$, такая, что равномерно

$$M\{c^{a\,|X_2|}\mid\xi_1\}<\infty.$$

Теорема. *Если $\alpha>0$, $\sigma>0$, выполнены условия (A) и (B), то при любом целом положительном s равномерно относительно x, $1\leqslant x\leqslant 0(\sqrt{n})$, $n\to\infty$, имеют место соотношения*

$$1-F_{Z_n}(x)=\left(1-\Phi(x)\right)\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left(1+P_{s-1}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)+O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right)\right),$$

$$F_{Z_n}(-x)=\Phi(-x)\exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\times$$

$$\times\left(1+P_{s-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right)\right).$$

Здесь $P_j(v, t), j=0, 1, 2, \ldots,$ — полином j-й степени двух переменных v и t, коэффициенты которого имеют довольно сложные выражения и здесь не приводятся.

При доказательстве используются метод переходных характеристических функций, спектральный метод и метод перевала.

Литература

1. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее применение, **6**, вып. I (1961), стр. 67—86.
2. Л. Саулис, Асимптотическое разложение для вероятностей больших уклонений, Liet. matem. rink., **IX**, № 3 (1969), 605—625.

13. Б. Каминскене (ИФМ). **Локальные теоремы для процессов восстановления.**

Пусть имеется последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых неотрицательных случайных величин. Обозначим

$$S_0=0, \quad S_m=\sum_{j=1}^{m} \xi_j, \qquad m=1, 2, \ldots;$$

$$\mu_j=\mathbf{M}\xi_j, \quad j=1, 2, \ldots; \quad A_n=\sum_{j=1}^{n} \mu_j; \quad B_n^2=\sum_{j=1}^{n} \mathbf{D}\xi_j.$$

Случайный процесс $N(t)=\max\{m: S_m<t\}$ принято называть процессом восстановления а $\xi_j, j=1, 2, \ldots,$ временем восстановления. В работе [1] доказана интегральная предельная теорема для $N(t)$ при больших t, что подсказывает утверждение локальной предельной теоремы. В случае, когда случайные величины $\xi_j, j=1, 2, \ldots,$ одинаково распределены, локальная предельная теорема доказана в работах [5]—[7].

Пусть времена восстановлений имеют неодинаковые распределения. Рассмотрим отдельно дискретный и непрерывный случаи.

а) Дискретный случай. Положим, что время восстановления ξ_j принимает лишь целочисленные значения $k, k=0, 1, \ldots,$ с вероятностями $p_{j,k}=P\{\xi_j=k\}, j=1, 2, \ldots$. Пусть

$$\tilde{p}_{j,k}=\sum_{s=1}^{k} p_{j,k-s}p_{j,s}, \qquad \tilde{p}_{j,k}=P\{\tilde{\xi}_j=k\}.$$

Введем функции

$$l_n(M)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\leq M} k^2\tilde{p}_{j,k}, \quad M>0$$

и

$$\alpha_j(a, q, M)=\frac{1}{q^2}\sum{}^{*} r^2 P\{a\tilde{\xi}_j\equiv r\ (\mathrm{mod}\ q), \ \tilde{\xi}_j\leq M\},$$

где Σ^* означает суммирование по всем абсолютно наименьшим вычетам по модулю $q\left(-\frac{q}{2}<r\leq\frac{q}{2}\right)$.

Теорема 1. *Если для случайных величин $\xi_j, j=1, 2, \ldots,$ выполнены условия:*

1) *имеет место центральная предельная теорема;*

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}A_n=c>0, \quad \varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}B_n^2=c'>0;$

3) $M_n\exp\left\{-\frac{1}{2}\min\limits_{a,q}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(a, q, M_n)\right\}\to 0$

при $n\to\infty$ *для каких-нибудь* $M_n>0$, *удовлетворяющих условию,* $l=\varliminf_{n\to\infty} l_n(M_n)>0$, *то*

$$B_n P\{N(t)=n\}=\frac{\mu_{n+1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-A_n)^2}{2B_n^2}}+o+\mu_{n+1}+\mu_{n+1}^2+\sigma_{n+1}^2$$

равномерно по всем t.

Теорема 2. *Если для случайных величин* ξ_j, $j=1, 2, \ldots$, *выполнены условия* 1)—3), *то*

$$\sqrt{t}\,P\{N(t)=n\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{B_n}{\sqrt{A_n}(A_{n+1}-A_n)}}e^{-\frac{\frac{(t-A_n)^2}{B_n^2}}{2\frac{t}{A_n}}}+o+\mu_{n+1}+\mu_{n+1}^2+\sigma_{n+1}^2$$

равномерно по всем n.

а) Непрерывный случай. Пусть время восстановления ξ_j имеет плотность

$$p_j(x),\quad j=1, 2, \ldots,$$

и

$$\tilde{F}_j(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_j(x+y)\,dF_j(y),$$

где $F_j(y)$ — функция распределения случайной величины ξ_j, $j=1, 2, \ldots$.

Далее

$$l_n(M)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|\leqslant M}x^2d\tilde{F}_j(x),\quad M>0.$$

Теорема 3. *Если для случайных величин* ξ_j, $j=1, 2, \ldots$, *выполнены условия*:

1′) *имеет место центральная предельная теорема*;

2′) $\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}A_n=c>0$, $\quad\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}B_n^2=c'>0$;

3′) *существуют константы* c_j *такие, что* $p_j(x)<c_j\leqslant\infty$ *и*

$$\frac{1}{\ln M_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\sigma_j^2+M_n^2)c_j^2}\to\infty\,(\sigma_j^2=\mathbf{D}\xi_j)$$

при $n\to\infty$ *для каких-нибудь* $M_n>0$, *удовлетворяющих условию*

$$l=\varliminf_{n\to\infty}l_n(M_n)>0,$$

то

$$B_nP\{N(t)=n\}=\frac{\mu_{n+1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-B_n)^2}{2B_n^2}}+o+\mu_{n+1}+\mu_{n+1}^2+\sigma_{n+1}^2$$

равномерно по всем t.

Теорема 4. *Если для случайных величин* ξ_j, $j=1, 2, \ldots$, *выполнены условия* 1′)—3′), *то*

$$\sqrt{t}\,P\{N(t)=n\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{B_n}{\sqrt{A_n}(A_{n+1}-A_n)}}e^{-\frac{\frac{(t-A_n)^2}{B_n^2}}{2\frac{t}{A_n}}}+o+\mu_{n+1}+\mu_{n+1}^2+\sigma_{n+1}^2$$

равномерно по всем n.

Литература

1. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, М., И. Л., 1947.
2. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., „Мир", 1967.
3. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., № 4 (1965), 645–659.
4. А. А. Миталаускас, В. А. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин, Liet. matem. rink., **VI**, № 4 (1966), 569–583.
5. А. К. Алешкявичене, Локальная предельная теорема для рекуррентных событий, Liet. matem. rink., **V**, № 3 (1965), 373–380.
6. З. И. Шарагина, Локальные предельные теоремы для некоторых схем циклических процессов, Кандидатская диссертация.
7. А. В. Нагаев, Локальная предельная теорема для числа восстановлений, Liet. matem. rink., **X**, № 1 (1970), 109–119.

14. В. Лютикас (Мин. просвещения Лит. ССР). **Аналог парадокса Бертрана в случае правильного n-угольника.**

15. А. Бикялис (ВГУ). **Асимптотические разложения для сумм независимых m-решетчатых случайных векторов.**

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — последовательность независимых случайных величин с функциями распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$.

Предположим, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют равные нулю математические ожидания и конечные дисперсии $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$.

Обозначим:

$$B_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2;\quad \rho_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\sup_{0<z\leqslant(1+|x|)B_n}\left\{\left|\int_{-z}^{z}u^3\,dF_k(u)\right|+z\int_{|u|>z}u^2\,dF_k(u)\right\}.$$

Рассмотрим разность

$$\bar{F}_n(x)-\Phi(x),$$

где $F_n(x)$ — функция распределения нормированной суммы $S_n=\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$ и $\Phi(x)$ — функция распределения нормального закона с параметрами (0; 1). Методом С. В. Нагаева (см. [1] и [2]) доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Существует абсолютная константа C такая, что*

$$|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C\rho_{3n}}{(1+|x|)^3B_n^3}. \qquad (1)$$

Без множителя $1/(1+|x|)^3$ неравенство (1) впервые доказал К. Г. Эссеен в [3].

Теорема 2. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ одинаково распределенные. Тогда для того чтобы при $n\to\infty$ имело место соотношение*

$$(1+|x|)^3\,|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) $$\int\limits_{|u|>z} u^2 dF_1(u) = O(z^{-1}), \qquad z\to\infty,$$

2) $$\int\limits_{-z}^{z} u^3 dF_1(u) = o(1), \qquad z\to\infty.$$

Достаточность вытекает из теоремы 1. Необходимость условий 1 и 2 доказал И. А. Ибрагимов в [3].

Литература

1. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для больших уклонений, Теор. вер. и ее прим., 10 (1965), 231–254.
2. А. Бикялис, Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме, Liet. matem. rink., VI, № 3 (1966), 323–346.
3. C.–G. Esseen, On the remainder term in the central limit theorem, Arkiv for Math., B. 8, Nr. 2 (1969), 7–15.
4. И. А. Ибрагимов, О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением, Теор. вер. и ее прим. т. XI. вып. 4 (1966) 632–655.

16. А. Жемайтис (ВГУ). **Интегральные предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых случайных векторов.**

17. Г. Ясюнас (ВГУ). **О сходимости распределения сумм k-мерных случайных векторов к нормальному закону.**

Пусть $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — вектор евклидова пространства R^k; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор в R^k; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность k-мерных одинаково распределенных случайных векторов в R^k с функцией распределения $F(\mathbf{x})$; математическое ожидание — $M\xi_1=\mathbf{0}$; V — положительно определенная матрица ковариаций вектора $\xi_1=(\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots, \xi_{k1})$; $\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$; $\mathfrak{a}$ — класс выпуклых, а $\mathfrak{N}$ — класс всех борелевских множеств A в R^k; $P_{\mathbf{S}_n}(A)$ — вероятностная функция $\mathbf{S}_n$; $\Phi_{0;\,V}(A)$ — нормальное распределение с параметрами $(\mathbf{0};\ V)$; $F_i(x_i)$ — функция распределения i-й компоненты случайного вектора ξ_1.

Пусть G — класс функций $g(x)$, определенных на вещественной прямой и обладающих свойствами:

1) $g(x)$ — неотрицательные, четные, не убывающие в интервале $[0, \infty)$ функции и $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$;

2) для некоторого $0<\alpha<1$, $\frac{x^\alpha}{g(x)}$ — определенная на всей вещественной прямой и не убывающая в интервале $[0, \infty)$ функция.

Теорема 1. *Для того чтобы*

$$\sup_{A\in\mathfrak{a}} |P_{\mathbf{S}_n}(A)-\Phi_{0;\,V}(A)| = O\left(g^{-1}(\sqrt{n})\right)$$

при $n\to\infty$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{|x_i|>z} x_i^2 dF_i(x_i) = O\left(g^{-1}(z)\right)$$

при $z\to\infty$.

Теорема 2. *Для того чтобы*

$$\sup_{A \in \mathfrak{N}} |P_{S_n}(A) - \Phi_{0;\, V}(A)| = O\left(g^{-1}(\sqrt{n})\right)$$

при $n \to \infty$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|x_i|>z} x_i^2\, dF_i(x_i) = O\left(g^{-1}(z)\right)$$

при $z \to \infty$.

2. *Существует номер n_0 такой, что распределение $P_{S_{n_0}}(A)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту.*

18. А. Каробл и с (ВГУ). **Об асимптотических разложениях распределений сумм независимых случайных величин.**

Пусть $F_n(x)$ и $p_n(x)$ функция распределения и плотность соответственно суммы $S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ одинаково распределенных независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ с функцией распределения $F(x)$.

Обозначим:

$$\sigma^2 = D\xi_j,\quad \alpha_s = \lim_{z\to\infty} \int\limits_{-z}^{z} x^s\, dF(x),\quad \varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},\quad \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(u)\, du$$

$\varkappa_s$ — семиинвариант. Не ограничивая общности, предположим, что $M\xi_j = 0$ и $D\xi_j = 1$.

Полиномы $P_\nu(-\Phi)$ и $P_\nu\left(-\varphi(x)\right)$ построим таким же образом, как и в работе [2], т. е. чтобы их коэффициенты выражались через числовую последовательность $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3, \ldots, \mu_s, \ldots$, так как коэффициенты классических полиномов выражаются через семиинварианты, а члены последовательности $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \ldots$ выражаются через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s, \ldots$ по тем же формулам, по которым моменты выражаются через семиинварианты.

Теорема 1. *Для того чтобы при $n \to \infty$ и $l = 0, 1, \ldots, s$, а $\geqslant 2$ имело место соотношение*

$$(1 + |x|^l) \left| F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{\nu=1}^{s-2} P_\nu(-\Phi) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu \right| = O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right)$$

необходимо, а для распределений, удовлетворяющих условию Г. Крамера $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f(t)| < 1$ и достаточно, чтобы

1) *абсолютные моменты распределения $F(x)$ до порядка s включительно были конечны, причем $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\ldots$, $\alpha_s = \beta_s$,*

2) $\int\limits_{|x|>z} x^s\, dF(x) = O(z^{-1}),\qquad z \to \infty,$

3) $\int\limits_{-z}^{z} x^{s+1}\, dF(x) = O(1),\qquad z \to \infty.$

Теорема 2. *Для того, чтобы при $n \to \infty$ и $l = 0, 1, 2, \ldots, s$, $s \geqslant 2$*

$$(1 + |x|^l) \left| p_n(x) - \varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{s-2} P_\nu\left(-\varphi(x)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu \right| = O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) *существовало целое число $N \geqslant 1$ такое, что $\max\limits_x p_N(x) < \infty$,*

2) *выполнялись условия 1—3 теоремы 1.*

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ принимают только значения вида $a+kh$, $(k=0\pm1, \ldots)$, где a — некоторое фиксированное число, h — шаг распределения. Положим:

$$P_n(k)=P\left\{\sum_{j=1}^{n}\xi_j=na+kh\right\}, \qquad y_{nk}=\frac{na+kh}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Теорема 3. *Для того чтобы при $n\to\infty$ и $-\infty<k<\infty$, имело место соотношение*

$$(1+|y_{nk}|^l)\left|\frac{\sqrt{n}}{h}P_n(k)-\varphi(y_{nk})-\sum_{\nu=1}^{s-2}P_\nu\left(-\varphi(y_{nk})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right|=O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right),$$

где $l=0, 1, \ldots, s$, необходимо и достаточно чтобы

1) *h — максимальный шаг распределения,*

2) *выполнялись условия 1—3 теоремы 1.*

Литература

1. А. Бикялис, Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций и их производных, Liet. matem. rink., **VII**, 1 (1967).
2. И. А. Ибрагимов, Об асимптотических разложениях Чебышева-Крамера, Теор. вер. и ее прим., **12**, 3 (1967), 506—519.
3. C.—G. Esseen, On the remainder term in the central limit theorem, Arkiv for Math., B. **8**, 2 (1969), 7—15.

19. Ф. Мишейкис (ВГУ). **Предельные классы распределений для распределений частных сумм последовательности независимых случайных величин.**

20. А. Аксомайтис (КПИ). **Об оценке остаточного члена в предельной теореме для сумм случайного числа слагаемых.**

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j$ — последовательность независимых случайных величин с одинаковым законом распределения.

Будем рассматривать сумму $\sum_{j=1}^{n}\xi_j$, где η — случайная величина, принимающая лишь целые положительные значения и не зависящая от ξ_j $(j=1, 2, \ldots)$

Обозначим

$$\alpha=M\eta,\ \gamma^2=D\eta,$$

$$\delta=\int_{x<t}dF(x)+\int_{x>\tau}dF(x),\ m=\int_{t\leqslant x\leqslant\tau}xdF(x),$$

$$\delta^2=\int_{t\leqslant x\leqslant\tau}x^2dF(x)-\left(\int_{t\leqslant x\leqslant\tau}xdF(x)\right)^2,\ \beta_3=\int_{t\leqslant x\leqslant\tau}|x-m|^3dF(x)+|m|^3\delta$$

при $-\infty\leqslant t<\tau\leqslant+\infty$. Здесь $F(x)=P(\xi_1<x)$.

Теорема. *При условии $\gamma<\alpha$ имеет место неравенство*

$$\sup_x\left|P\left(\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{\eta}\xi_j-a<x\right)-\Phi(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\delta\alpha+\frac{C_0\beta_3}{\sigma^3}(\sqrt{2}+4)\max\left\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\ \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right\}+$$

$$+\frac{\sqrt{6}\,|m|}{\sigma}\max\left\{\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha}\right\}+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{\max\left\{1,\ \frac{m^2}{\sigma^2}\left(\frac{\gamma^4}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}}{\sqrt{2\pi e}\left[1-\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}+1\right]+$$

$$+\frac{|ab-\alpha m|}{\sqrt{2\pi(\sigma^2\alpha+\gamma^2 m^2)}}+\frac{1}{2\sqrt{2\pi e}}\left|1-\frac{\sigma^2\alpha+\gamma^2 m^2}{b^2}\right|\max\left\{1,\ \frac{b^2}{\sigma^2\alpha+\gamma^2 m^2}\right\}.$$

Здесь $b>0$ и a означают произвольные действительные числа, а

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Абсолютная постоянная C_0 — из оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

21. В. Паулаускас (ВГУ). **О суммах случайного числа случайных векторов.**

22. Н. Калинаускайте (ИФМ). **Некоторые свойства многомерных устойчивых распределений.**

23. И. Банис (ВГПИ). **Оценка скорости сходимости в многомерной интегральной теореме в случае предельного устойчивого закона с характеристическим показателем α $(0<\alpha\leqslant 2)$.**

24. П. Вайткус (ВГУ). **Многомерная локальная предельная теорема для больших уклонений в случае решетчатого распределения.**

25. Р. Мерките (ИФМ). **К модели словообразования.**

Число слогов в слове может рассматриваться как случайная величина X, принимающая значения k, $k=1, 2, \ldots, K$. В. Фукс исследовал распределение слогов в словах (см. [1]) и утверждал, что образование слов из слогов во многих языках хорошо описывается законом Пуассона с параметром λ

$$\xi=X-1,\ P\{\xi=m\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!},\qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Для тех языков, для которых закон Пуассона описывает образование слов из слогов недостаточно точно, В. Фукс предлагает композицию закона Пуассона и некоторого дискретного закона

$$P\{\eta=l\}=\alpha_l,\ l=1,\ \ldots,\ n,\ \sum_{l=1}^{n}\alpha_l=1.$$

Применив критерий χ^2 стандартным образом, установлено, что распределение Пуассона отвергается с высоким уровнем значимости, используя критерий χ^2 для проверки „пуассоновости" X (см. 2) против альтернатив о подчинении X биноминальному и отрицательному биноминальному распределениям, установлено, что пуассоновский закон отвергается и принимается частный случай отрицательного биноминального распределения — геометрическое распределение для языков, имеющих нефлективное строение, а также в корнях слов. В качестве примера приводим распределение слогов в корнях семисот слов, взятых из литовского словаря, и соответствующие распределения, вычисленные по закону Пуассона и геометрическому закону.

K	Эмпирическое распределение	Распределение, вычисленное по закону Пуассона	Распределение, вычисленное по геометрическому закону
1	525	493	518
2	116	173	135
3	48	30	34
4	9	4	9
5	2	0	2

Во флективных языках условно выделены два момента: образование корней слов и образование слов путем присоединения к корням флексий. Распределение слогов в словах некоторых из этих языков удовлетворительно описывается композицией геометрического и биноминального распределений.

Литература

1. В. Фукс, Математическая теория словообразования, В сб.: „Теория передачи сообщений", И. Л., М., 1957, стр. 221–247.
2. Л. Н. Большев, О характеризации распределения Пуассона и ее статистических приложениях, Теория вероятн. и ее применения, **X**, 1965. вып. 3.

26. Э. Гячяускас (ИФМ). **Распределение величины угла треугольника в случае случайных сторон.**

Рассмотрим распределение величины угла треугольника, образованного из сторон случайной длины.

Длины сторон x, y, z распределены равномерно при условии, что $x+y+z=1$.

Можем записать, что стороны треугольника удовлетворяют условиям

$$x<\frac{1}{2},\quad y<\frac{1}{2},\quad z=1-x-y<\frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

Если (x, y) будем рассматривать как точки плоскости, то оказывается, что эти точки (x, y) образуют некоторую область на плоскости. С другой стороны, каждая точка (x, y) определяет некоторый треугольник.

Из условий (1) находим, что область возможных значений (x, y) ограничена прямыми

$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2},\quad x+y=\frac{1}{2}\,,$$

является треугольником T с вершинами в точках

$$\left(0,\ \frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{2},\ 0\right).$$

Через α обозначим величину угла между сторонами x и y.

Составляем уравнение, связывающее x, y, α:

$$(1-x-y)^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha.$$

Отсюда получаем уравнение кривой

$$y=f(x,\ \alpha)=\frac{2x-1}{2x(1+\cos\alpha)-2}\,.$$

Кривая проходит через точки

$$\left(0,\ \frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{2},\ 0\right).$$

При $\alpha=0$ кривая вырождается в две прямые

$$x=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{1}{2}.$$

При $\alpha=\pi$, кривая спрямляется –

$$y=\frac{1-2x}{2}.$$

Функцию распределения величины φ угла треугольника определяем следующим образом:

$$P\{\varphi<\alpha\}=\frac{Q(\alpha)}{Q_\Delta},$$

где Q_Δ – площадь треугольника T, $Q(\alpha)$ – площадь части треугольника T, ограниченной кривой $y=f(x, \alpha)$ и прямыми

$$x=\frac{1}{2}, \; y=\frac{1}{2}.$$

После вычислений получаем

$$P\{\varphi<\alpha\}=2-\frac{4}{1+\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha-1}{(1+\cos\alpha)^2}\, 8\ln\sin\frac{\alpha}{2}.$$

В работе [1] определена вероятность образования тупого треугольника.

Литература

1. N. T. Gridgeman, Random obtuse triangles, Amer. Math. Monthly, **75**, No 1 (1968), 64–65.

Секция истории и методики преподавания математики

1. Э. Гячяускас (ИФМ). **Преподавание математики в Вильнюсском университете до 1650 года.**

Преподавание математики было начато в предшественнице университета – Вильнюсской коллегии иезуитов, основанной в 1570 г.

Согласно предположению математику в 1570 г. преподавал первый ректор коллегии Станислав Варшевицкий, а после него некоторое время – Войцех Теобольт (Teoboltius).

В 1574 г. в коллегии учреждается кафедра математики. С марта 1574 г. математику один год преподает Леонард Кракер (Leonardus Crakerus Posnaniensis).

В 1577 г. математику преподавал англичанин Jacobus Bosgravius. Его курс включал арифметику, геометрию плоскости и пространства, сферу – астрономию того времени. Он переписывался с известным математиком Клавиусом. Образование получил в Лувенском университете и в Риме. Математику сначала преподавал в Германии, потом в Пултуске, Вильнюсе, Калише.

В 1578/79 учебном году преподавателем математики был ректор коллегии Якуб Вуек. Известно, что раньше он преподавал математику в Collegium Romanum.

В 1579 г. коллегия была преобразована в университет – академию.

Возможно, что после Вуека математику снова преподавал Босгравиус, до своего выезда из Вильнюсса в 1580 г., ибо иногда он именуется первым профессором математики Вильнюсского университета.

В 1585/86 уч. г. преподавал Hadrian Iung, а в 1591/92 уч. г. – Kasper Pętkowski.

Итальянец Михаель Салпа, прослушавший курс философии в Вильнюсском университете, был оставлен для преподавания математики с 1593 по 1600 гг.

Известно, что перед 1604 г. математику преподавал Bartholomaeus Thomazewic Vilnensis. Около того же времени преподавал и швед Laurentius Boierus. Сохранилась рукопись – читанный им в 1603 г. курс „Mathematica“.

В курсе излагаются сложение, вычитание, умножение и деление целых и дробных чисел (с проверкой этих действий), арифметическая и геометрическая прогрессии, правило пропорций, правило ложного предположения, извлечение квадратичного и кубического корней, вычисление площадей, применение математики в астрономии, сфера Sacro Bosco, определение координат местностей, составление церковного календаря, составление солнечных часов, описаны математические инструменты.

В XVII веке до 1630 г. (только неизвестно точно когда) математику преподавали: Simon Berent, Joannes Gogolewski, Jakob Marquart, Andreas Klinger, Thomas Clagius.

Andreas Milewski преподавал математику в 1630 и 1633 гг., оставив рукопись Elementale mathematicarum disciplinarum (1630), в которой изложены следующие вопросы: геометрия Евклида (коротко), сечения конуса, квадратура круга, спрямление окружности, практическая геометрия, небесная сфера, геоцентрическая система планет, солнечные часы, вычисление пасхалий.

Osvaldus Krüger (Prutenus) был профессором математики Вильнюсского университета в 1632 г. и в 1634—1648 гг.

Кригер в 1620—1623 гг. учился в Риме, а в 1623—1630 гг. — в Вильнюсском университете.

Многие печатные работы его учеников, написанные под его руководством, показывают, что Кригер большое внимание уделял приложениям математики.

Работы Кригера: 1. Compendium mathematicarum disciplinarum, 1632 (рукопись), 2. Arithmeticae practicae, Vilnae, 1635.

Valentinus Skowid (Lithuanus) преподавал математику одновременно с Кригером, по-видимому, будучи его ассистентом в 1639—1642 гг., в 1648 г. и позже.

В 1650 году преподавателем математики называется Paulus Laskowsky.

2. П. Р у м ш а с. **Первый учебник по геометрии на литовском языке, его методические особенности и терминология.**

В докладе рассмотрена „Краткая геометрия" П. Вилейшиса, которая, как и другие книги этого автора, носит прикладной характер. Автору удалось решить трудную задачу: из курса геометрии отобрать то, что является главным для непосредственных приложений, и отобранный материал изложить последовательно и связно.

„Краткая геометрия" состоит из введения, в котором описываются основные геометрические понятия, и трех разделов: „О прямой линии", „О фигурах" и „Об измерении объемов и поверхностей тел".

В первом разделе изложена теория углов и параллельных прямых, причем много места занимает описание геодезических работ: провешивание прямых линий, измерение расстояний, построение прямых углов на местности, измерение углов при помощи угломера и астролябии, проверка вертикальности и горизонтальности, нивелировка при помощи как простых приспособлений, так и нивелира.

Второй раздел содержит теорию треугольников, сведения о параллелограмме, об измерении площади, о круге и о подобии фигур. Кроме прочего практического материала, в конце раздела указаны различные способы составления плана и определения площади по плану.

Несмотря на краткость (76 стр.), излагаемый материал имеет стройную логическую структуру. Там, где для полного доказательства нет места, даны упрощенные объяснения. Например, число π вводится только после объяснения, что длина окружности больше трех и меньше четырех диаметров (для этого используются вписанный правильный шестиугольник и описанный квадрат); формула для площади круга выводится, считая круг правильным многоугольником с бесконечным количеством сторон и т.д.

Текст книги разбит на маленькие дозы, от чего облегчается усвоение прочитанного. Названия „теорема", „определение" отсутствуют, но формулировки теорем и впервые употребляемые термины выделены курсивом. Сложные утверждения расчленены на ряд простых. Так, в равнобедренном треугольнике сначала рассматривается равенство углов при основании и только дальше (после рассмотрения равенства прямоугольных треугольников) доказывается, что одна из высот является биссектрисой и медианой.

В первом разделе некоторые теоремы (например, признаки параллельности прямых) не доказываются: автор правильно считает, что в некоторых случаях доказательство не помогает лучшему пониманию излагаемого. В третьем разделе правильность некоторых утверждений автор советует проверить на опыте, например, взвешиванием соответствующих моделей убедиться, что прямая и наклонная призмы с равными основаниями и высотами являются равновеликими.

Ценность „Краткой геометрии" состоит больше всего в том, что здесь впервые даны геометрические термины на литовском языке. Наблюдается тенденция не пользоваться международными терминами: для всех геометрических понятий найдены подходящие слова на литовском языке. Только немногие из созданных П. Вилейшисом терминов употребляются в настоящее время, остальные же отличаются необычностью, хотя их строение вполне соответствует правилам литовского языка.

Литература

1. П. Вилейшис, Trumpa Gėomėtrija. P. N. Tilžėje, 1900 metuose. Kaštu autoriaus pas Otto v. Manderodę atspáusta. (На лит. яз.)

3. П. Румшас (ВГУ). **Развитие геометрических терминов на литовском языке в начале XX века.**

Первым источником геометрических терминов на литовском языке является „Краткая геометрия" П. Вилейшиса [1]. За исключением названий сторон прямоугольного треугольника, для всех геометрических понятий здесь подобраны соответствующие литовские названия. Только немногие из них употребляются как геометрические термины в настоящее время, остальные же являются архаизмами.

Термины П. Вилейшиса употреблялись до 1916 г., когда вышел в свет учебник геометрии П. Миронова [2] в переводе с дополнениями А. Якштаса-Дамбраускаса. Здесь мы находим словарь геометрических терминов – сравнение терминов А. Якштаса с терминами П. Вилейшиса и соответствующими терминами на русском, польском, немецком и французком языках. У А. Якштаса наблюдается тенденция пользоваться международными словами, хотя имеется ряд терминов, созданных на базе литовского языка и употребляемых до сих пор.

Во второй половине первой мировой войны в Литве были открыты школы с обучением на литовском языке. В разных школах употреблялись разные математические термины. Во избежание путаницы в 1917 г. в журнале „Атейтис" была опубликована математическая терминология, употребляемая в литовской гимназии Каунаса [3], но геометрические термины здесь мало отличаются от терминов А. Якштаса.

В то же время в Воронеже учителя математики З. Жемайтис, М. Шикшнис и П. Машётас при помощи создателя литовского литературного языка И. Яблонскиса пересматривали старые и создавали новые математические термины. Больше всего внимания обращалось на то, чтобы термины точно выражали соответствующие понятия. В 1918 г. они вернулись в Литву, и М. Шикшнис в журнале „Летувос мокикла" опубликовал проект математических терминов [4], в котором некоторое предпочтение отдано терминам П. Вилейшиса. С критикой выступили сторонники как новых, так и прежних терминов.

Введению новых терминов и окончательному формированию литовского геометрического языка больше всего способствовали учебники геометрии М. Шикшниса [5, 6] и задачник по геометрии П. Машётаса [7], а также сборник геометрических терминов З. Жемайтиса [8] и ряд критических статей А. Якштаса.

В виде примера рассмотрим изменение четырех терминов: параллелограмм, прямоугольник, сторона, диагональ.

1900	1916	1917	1918	1919—1920
ketvirtainis	paralėlšonis	paralelogramas	**lygiagretainis**	**lygiagretainis**
tieskertainis	ketvirtainis	ketvirtainis	stačiakertainis	**stačiakampis**
šalis	šonas	šonas	šalinė	**kraštinė**
prakirtis	skersakampė	diagonalis, skersinė	**įstrižainė,** diagonalė	**įstrižainė**

Литература

1. P. Vileišis, Trumpa Geometrija. P. N. Tilžė, 1900.
2. Geometrijos vadovėlis dviklasėms mokykloms. Iš P. M. Mironovo vertė ir kai kur papildė A. Jakštas. Vilnius, 1915 (virš. 1916).
3. Mokyt. A-tis. Matematikos terminologija, vartojama Kauno Lietuviškoje Gimnazijoje. „Ateitis“, 1917, Nr. 6, p. 184.
4. M. Šikšnys, Matematikos terminų projektas. „Lietuvos mokykla“, 1918, Nr. 11 p. 321.
5. M. Šikšnys, Geometrija. Planimetrijos pirmoji dalis. Vilnius, 1919.
6. M. Šikšnys, Geometrija. Planimetrijos antroji dalis. Vilnius, 1920.
7. Pr. Mašiotas, Geometrijos uždavinynas. Vilnius, 1919.
8. Z. Žemaitis, Geometrijos ir trigonometrijos terminų rinkinėlis. Kaunas, 1920.

4. И. Скрябе (Мин. просвещ. Лит. ССР). **Проблемы обучения математике в современной средней общеобразовательной школе.**

5. Б. Бальчитис (ШПИ). **Предварительные данные о результатах работы в 1 классе по новой программе по математике в 1970/71 уч. году.**

6. В. Благнис (Мин. просвещ. Лит. ССР), И. Киселюс (ВГПИ), И. Тейшерскис (ВГПИ). **Новые программы для факультативных занятий по математике в средней школе.**

7. А. Ненишкис (Каунас, 24-я ср. шк.). **Дифференцированное преподавание математики в средней школе.**

8. И. Дайлиде (КПИ). **Опыт преподавания математики по новому методу.**

9. И. Тейшерскис (ВГПИ). **К вопросу об объеме преобразований и сложности управлений по тождественным алгебраическим выражениям.**

10. Л. Степонайтене (КПИ), В. Баёрене (КПИ). **Вопрос о преемственности в преподавании математики.**

11. А. Вайткявичюс (Шакяйская ср. шк.). **Решение равенств по методу промежутков.**

12. В. Дрегунас (КПИ). **Определения функции и геометрических понятий в средней школе.**

13. Л. Вахрамеева (Вильнюс 13-я ср. шк.). **Подготовка учеников к олимпиаде юных математиков по системе, разработанной в 13-й ср. шк. г. Вильнюса.**

14. А. Анелаускене (ВГПИ). **Индивидуализация работы студентов на практических занятиях по элементарной математике.**

15. И. Ревуцкас (ШПИ). **К вопросу о структуре дидактического материала по геометрии в восьмилетней школе.**