1972

УДК 513.7

РЕДУКЦИИ РАССЛОЕНИЯ $G(G/H, H)$ НАД ПОДМНОГООБРАЗИЯМИ ПРОСТРАНСТВА G/H. III*

Р. В. Восилюс

4. Редукции над подмногообразиями

1. Через M^n обозначим произвольное дифференцируемое многообразие.

Определение. Подмногообразием многообразия M^n будем называть пару (N^m, F), где N^m – некоторое многообразие и

$$F: N^m \to M^n$$

– вложение многообразий.

Вложенное многообразие $F(N^m) \subset M^n$ обозначим символом N_F^m.

Пусть

$$U \subseteq R^m, \quad W \subseteq R^{n-m}$$

– некоторые окрестности нуля соответствующих пространств.

Определение. Репер r_x^k многообразия M^n, взятый в точке $x \in N_F^m$, назовем репером, касательным к подмногообразию N_F^m, если

$$r_x^k = (j_0^k f, \ j_0^k df),$$

где

$$f: U \times W \to M^n$$

диффеоморфизм такой, что

$$f(U, 0) \subset N_F^m, \quad f(0, 0) = x.$$

Множество касательных к подмногообразию N_F^m k-реперов, взятых в точке $x \in N_F^m$, обсзначим через

$$FB^k(M^n)_x.$$

Пусть

$$FB^k(M^n) = \bigcup_{x \in N_F^m} FB^k(M^n)_x.$$

Теорема 1. *$FB^k(M^n)$ является редукцией расслоения*

$$B^k(M^n)|_{N_F^m}$$

до группы $DL_m^{k+1}(n)$.

---

* Библиография и резюме на литовском и английском языках приложены к первой части настоящей работы (см. „Литовский математический сборник“, 1972, XII, № 1).

Доказательство. Достаточно лишь заметить, что переход от одного касательного репера к другому, взятому в той же точке, задается элементом группы $DL_m^{k+1}(n)$, порожденным при помощи диффеоморфизма

$$\varphi: U \times W \to V \times Z$$

такого, что

$$\varphi(U, 0) \subseteq V \times \{0\}, \quad \varphi(0, 0) = 0.$$

В силу теоремы (1.9) в пространстве $D^k(n)$ содержится инвариантное относительно группы $DL_m^{k+1}(n)$ подпространство $D_m^k(n)$.

Следствие 1. *Над многообразием N_F^m определено подрасслоение расслоения*

$$T^k(M^n)|_{N_F^m}$$

с типовым слоем вида $D_m^k(n)$.

Это подрасслоение обозначим через $T^k(N_F^m)$.

Допустим, что задан некоторый диффеоморфизм

$$f: M^n \to M^n$$

многообразия M^n. Ему соответствует вложение

$$f \circ F: N^m \to M^n,$$

определяющее новое подмногообразие $N_{f \circ F}^m$.

Пусть

$$x \in N_F^m, \quad y = f(x) \in N_{f \circ F}^m$$

две соответствующие точки рассматриваемых подмногообразий.

Если r_x^k — некоторый репер, касательный к подмногообразию N_F^m в точке x, то совершенно очевидно, что f^k — сдвинутый репер, касательный к подмногообразию $N_{f \circ F}^m$ в точке y. Это порождает некоторое отображение

$$f^k: FB^k(M^n) \to (f \circ F) B^k(M^n).$$

Теорема 2. *Отображение f^k является изоморфизмом расслоений.*

Доказательство. Достаточно доказать, что отображение f^k перестановочно с действием группы $DL_m^{k+1}(n)$.

Пусть

$$r_x^k = (j_0^k r_x, j_0^k dr_x),$$

где

$$r_x: U \times W \to M^n$$

такой диффеоморфизм, что

$$r_x(U) \subset N_F^m, \quad r_x(0) = x.$$

По определению отображения f^k имеем:

$$f^k r_x^k = \left(j_0^k(f \circ r_x), j_0^k d(f \circ r_x)\right).$$

Произвольный элемент g группы $LL_m^{k+1}(n)$ можно задать при помощи диффеоморфизма

$$\varphi : V \times Z \to U \times W$$

такого, что

$$\varphi(V,\ 0) \subseteq U \times \{0\},\quad \varphi(0,\ 0) = 0.$$

Под действием этого элемента репер r_x^k преобразуется в репер

$$r_x^k g = \left(j_0^k(r_x \circ \varphi),\ j_0^k d(r_x \circ \varphi)\right).$$

Значит,

$$f^k(r_x^k g) = \left(j_0^k\left(f \circ (r_x \circ \varphi)\right),\ j_0^k d\left(f \circ (r_x \circ \varphi)\right)\right) =$$

$$= \left(j_0^k\left((f \circ r_x) \circ \varphi\right),\ j_0^k d\left(\left(f \circ r_x (\circ \varphi)\right)\right)\right) = (f^k r_x^k) g,$$

что и доказывает теорему.

Следствие 2. *Изоморфизм f^k индуцирует изоморфизм*

$$Tf^k : T^k(N_F^m) \to T^k(N_{f \circ F}^m)$$

векторных расслоений.

2. Здесь рассмотрим тот случай, когда многообразие M^n является однородным пространством

$$M^n = G/H.$$

Как и раньше, через o обозначим отмеченную точку пространства M^n, в которую проектируется подгруппа H при каноническом отображении

$$\pi : G \to G/H.$$

Пусть p — порядок изотропии однородного пространства G/H.

В точке o произвольно фиксируем репер

$$r^p = (j_0^p r,\ j_0^p dr),$$

заданный при помощи диффеоморфизма

$$r : U \to M^n$$

такого, что

$$r(0) = o.$$

В силу теоремы (3.2) реперу r^p отвечает изоморфное отображение

$$\tau_{r^p} : H \to DL^{p+1}(n),$$

определяемое соотношением

$$\tau_{r^p}(h) = \left(j_0^p(r^{-1} \circ h \circ r),\ j_0^p d(r^{-1} \circ h \circ r)\right).$$

При этом, как легко проверить,

$$\tau^p(h)\, r^p = r^p\left(\tau_{r^p}(h)\right), \tag{1}$$

где

$$r^p\left(\tau_{r^p}(h)\right)$$

означает правый сдвиг репера r^p относительно элемента $\tau_{r^p}(h)$ группы $DL^{p+1}(n)$ при помощи ее действия в расслоении $B^r(M^n)$.

Наконец,

$$\tau_{r^p}(h_1\cdot h_2)=\tau_{r^p}(h_2)\cdot\tau_{r^p}(h_1) \tag{2}$$

для произвольной пары элементов h_1, $h_2\in H$.

3. Вспомним, что структура расслоения $B_0^p(M^n)$ задается фиксацией репера

$$r_0^p\in B_0^p(M^n)_o.$$

Это позволяет в группе H определить некоторую подгруппу $H_m^{p+1}(n)$. По определению $h\in H$ тогда и только тогда является элементом подгруппы $H_m^{p+1}(n)$, если

$$\tau_{r^p_o}(h)\in DL_m^{p+1}(n).$$

В силу соотношения (2) $H_m^{p+1}(n)$ действительно является подгруппой группы H.

Определение. Группу $H_m^{p+1}(n)$ будем называть группой данной геометрической реализации расслоения $G(G/H, H)$.

Теорема 3. *Для произвольной точки $x\in N_F^m$ пересечение*

$$FQ_m^p(n)_x=FB_0^p(M^n)_x\cap FB^p(M^n)_x$$

либо пусто, либо является $H_m^{p+1}(n)$ — множеством относительно правого действия этой группы в расслоении $FB_0^p(M^n)$.

Доказательство. Пусть элемент $g\in G$ задает сдвиг пространства G/H, относительно которого точка x переходит в точку o. Это порождает новое подмногообразие $\tilde{N}_F^m$ и изоморфизмы

$$FB_0^p(M^n)\to\tilde{F}B_0^p(M^n),\quad FB^p(M^n)\to\tilde{F}B^p(M^n)$$

главных расслоений. Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы лишь относительно пересечения

$$\tilde{F}B_0^p(M^n)_o\cap FB^p(M^n)_o.$$

Допустим, что указанное пересечение не пусто и содержит репер l_o^p, являющийся касательным в точке o. Тогда все касательные реперы в точке o образуют множество

$$\{l_o^p DL_m^{p+1}(n)\},$$

получаемое при помощи правого действия группы $DL_m^{p+1}(n)$ в расслоении $B^p(M^n)$.

С другой стороны, множество

$$\{\tau^p(H)\,l_o^p\}$$

совпадает с множеством $\tilde{F}B^p_0(M^n)_o$. Однако в силу формулы (1) для всех $h \in H$ выполняется соотношение

$$l^p_o \tau_{l^p_o}(h) = \tau^p(h)\, l^p_o,$$

которое показывает, что репер $\tau^p(h)\, l^p_o$ тогда и только тогда является касательным, если

$$\tau_{l^p_o}(h) \in DL^{p+1}_m(n).$$

Формулой

$$\tilde{F}_{l^p_o} = \tau_{l^p_o}(H) \cap DL^{p+1}_m(n)$$

определим подгруппу $F_{l^p_o}$ группы $DL^{p+1}_m(n)$.

Если l^p_o — другой касательный репер в точке o, такой что

$$l^p_o = l^p_o g^{p+1},$$

то, как легко видеть,

$$\tau_{l^p_o}(h) = (g^{p+1})^{-1}\, \tau_{l^p_o}(h)\, g^{p+1}.$$

Значит,

$$\tilde{F}_{l^p_o} = ad\,(g^{p+1})^{-1}\, \tilde{F}_{l^p_o}.$$

Приведенные рассуждения показывают, что

$$\tilde{F}Q^p_m(n) = l^p_o F_{l^p_o},$$

где в правой части написанного равенства группа $DL^{p+1}(n)$ действует в расслоении $FB^p(M^n)$.

Допустим, что

$$l^p_o = \tau^p(h_0)\, r^p_o.$$

Выберем некоторые представления рассматриваемых реперов. Пусть

$$r^p_o = (j^p_o r,\ j^p_o dr),$$

$$l^p_o = (j^p_o l,\ j^p_o dl),$$

где

$$r,\ l\colon U \to M^n$$

— соответствующие диффеоморфизмы.

Если $\gamma \in H$ — любой элемент этой группы, то, как мы знаем,

$$\tau_{r^p_o}(\gamma) = \left(j^p_o(r^{-1} \circ \gamma \circ r),\ j^p_o d(r^{-1} \circ \gamma \circ r)\right).$$

Значит,

$$l^p_o \tau_{r^p_o}(\gamma) = \left(j^p_o(h_0 \circ \gamma \circ r),\ j^p_o d(h_0 \circ \gamma \circ r)\right) = \tau^p(h_0 \cdot \gamma)\, r^p_o$$

и в силу определения действия группы H в расслоении $B^p_0(M^n)$ справедливо такое равенство:

$$l^p_o \tau_{r^p_o}(\gamma) = l^p_o \gamma^{-1}.$$

В левой части этого равенства элемент

$$\tau_{r_o^p}(\gamma)\in DL^{p+1}(n)$$

действует на репер l_o^p в расслоении $\tilde{F}B^p(M^n)$, тогда как в правой части равенства элемент $\gamma^{-1}\in H$ на этот репер действует в расслоении $FB_o^p(M^n)$.

Значит, репер $l_o^p\gamma^{-1}$ тогда и только тогда будет касательным репером, если $\tau_{r_o^p}(\gamma)$ принадлежит группе $DL_m^{p+1}(n)$, т.е. если γ — элемент подгруппы $H_m^{p+1}(n)$.

Теперь потребуем, чтобы репер $l_o^p\gamma^{-1}$ принадлежал классу $B_o^p(M^n)_o$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение

$$\tau_{r_o^p}(\gamma)\in\tilde{F}_{l_o^p}.$$

Если γ — произвольный элемент подгруппы $H_m^{p+1}(n)$, то указанное включение равносильно следующему утверждению: в группе H существует элемент h, относительно которого справедливо равенство вида

$$\tau_{l_o^p}(h)=\tau_{r_o^p}(\gamma).$$

Однако

$$\tau_{l_o^p}(h)=\left(j_0^p(l^{-1}\circ h\circ l),\ j_0^l d(l^{-1}\circ h\circ l)\right)=$$

$$=\left(j_0^p(r^{-1}\circ h_0^{-1}\circ h\circ h_0\circ r),\ j_0^p d(r^{-1}\circ h_0^{-1}\circ h\circ h_0\circ r)\right)=$$

$$=\tau_{r_o^p}(h_0^{-1}\cdot h\cdot h_0),$$

и это равенство выполнено при

$$h=h_0\cdot\gamma\cdot h_0^{-1}.$$

Значит,

$$FQ_m^p(n)_x$$

является $H_m^{p+1}(n)$ — множеством.

Теперь рассмотрим однородное пространство, образованное векторным пространством с стационарной подгруппой точки, равной группе аффинных вращений относительно неподвижной прямой, проходящей через эту точку. Касательные реперы любой другой прямой содержат пустое пересечение с классом реперов первой прямой, если только эти прямые не являются параллельными.

Это и доказывает теорему.

4. В каждом пространстве $D^p(n)$ мы определили некоторое подпространство $D_m^p(n)$.

Рассмотрим грассманово многообразие подпространств пространства $D^p(n)$, изоморфных с $D_m^p(n)$. В этом многообразии действует группа $DL^{p+1}(n)$, следовательно, посредством представления τ_{r^p}, и группа H.

Через $\Gamma_m^p(n)$ обозначим класс интранзитивности подпространства $D_m^p(n)$ относительно действия группы $DL^{p+1}(n)$ в рассматриваемом грассмановом многообразии. Это значит, что $\Gamma_m^p(n)$ — некоторое его подмногообразие.

Теорема 4. *Свойство многообразия $\Gamma^p_m(n)$ „быть однородным H-пространством" не зависит от выбора репера r^p.*

Доказательство. Задавая произвольный диффеоморфизм (с условием $g(0)=0$)

$$g: V \to U,$$

репер r^p заменим репером

$$\bar{r}^p = \left(j^p_0(r \circ g),\ j^p_0 d(r \circ g)\right).$$

Пусть

$$g^{p+1} = (j^p_0 g,\ j^p_0 dg)$$

соответствующий элемент группы $DL^{p+1}(n)$. Так как

$$\tau_{\bar{r}^p}(h) = \left(j^p_0\left(g^{-1} \circ (r^{-1} \circ h \circ r) \circ g\right),\ j^p_0 d\left(g^{-1} \circ (r^{-1} \circ h \circ r) \circ g\right)\right),$$

то

$$\tau_{\bar{r}^p}(h) = (g^{p+1})^{-1}\, \tau_{r^p}(h)\, g^{p+1}.$$

Пусть

$$A,\ B \in \Gamma^p_m(n)$$

произвольные точки этого многообразия и

$$\bar{A} = g^{p+1} A, \quad \bar{B} = g^{p+1} B$$

образы этих точек при индуцированном действии группы $DL^{k+1}(n)$. Если $\Gamma^p_m(n)$ является однородным пространством относительно действия τ_{r^p}, то существует элемент $h \in H$ такой, что

$$\tau_{r^p}(h)\, \bar{A} = \bar{B}.$$

Тогда

$$B = (g^{p+1})^{-1}\, \bar{B} = (g^{p+1})^{-1}\, \tau_{r^p}(h)\, \bar{A} = \tau_{\bar{r}^p}(h)\, A,$$

что и доказывает теорему.

Определение. *Если многообразие $\Gamma^p_m(n)$ является однородным H-пространством, то стационарную подгруппу H будем называть достаточно m-подвижной.*

Определение. *Группу H будем называть достаточно подвижной, если она достаточно m-подвижна для всех $1 < m < n$.*

В случае $p=1$ это аффинные и евклидовы пространства, сферы и т.д.

Пример однородного пространства с недостаточно подвижной стационарной подгруппой приведен в доказательстве теоремы (3).

5. Пусть, как и раньше, (N^m, F) является некоторым подмногообразием однородного пространства $M^n = G/H$.

Мы определили следующие расслоения:

над многообразием $G/H - B^p(M^n)$ и $B^p_0(M^n)$,

над многообразием $N^m_F - FB^p(M^n)$.

Кроме того, над многообразием N^m_F еще определено расслоение

$$B^p_0(M^n)\big|_{N^m_F} = FB^p_0(M^n).$$

Теорема 5. *Если стационарная подгруппа H однородного пространства G/H достаточно m-подвижна, то*

$$FB_0^p(M^n) \quad и \quad FB^p(M^n)$$

пересекаются над каждой точкой подмногообразия N_F^m.

Доказательство. Пусть x — произвольная точка многообразия N_F^m. Рассмотрим любой сдвиг пространства G/H, переводящий x в точку o. Этот сдвиг многообразие N_F^m диффеоморфно отображает на некоторое многообразие $N_{\tilde F}^m$, индуцируя изоморфизмы расслоений

$$FB_0^p(M^n) \to \tilde FB_0^p(M^n), \quad FB^p(M^n) \to \tilde FB^p(M^n).$$

Следовательно, достаточно доказать лишь неравенство

$$\tilde FB_0^p(M^n)_o \cap \tilde FB^p(M^n)_o \neq \varnothing.$$

Для этого докажем, что любой репер, взятый в точке o, можно преобразованием индуцированного представления группы H перевести в касательный репер многообразия $N_{\tilde F}^m$.

С этой целью фиксируем произвольный касательный репер

$$l^p = (j_0^p l, \ j_0^p dl),$$

где

$$l: U \times W \to M^n$$

— соответствующий диффеоморфизм.

Над многообразием $N_{\tilde F}^m$ определено векторное расслоение

$$T^p(N_{\tilde F}^m),$$

являющееся подрасслоением расслоения

$$T^p(M^n)\big|_{N_{\tilde F}^m}.$$

Так как над множеством $l(U \times \{0\})$ расслоение

$$T^p(M^n)\big|_{N_{\tilde F}^m}$$

тривиально, то существует изоморфизм

$$\varphi_U: T^p(M^n)\big|_{N_{\tilde F}^m} \to U \times D^p(n).$$

Всегда можно считать, что изоморфизм $\varphi_U|_o$ подпространство

$$T^p(N_{\tilde F}^m)_o$$

отображает изоморфно на $D_m^p(n)$.

Теперь возьмем некоторый произвольный репер

$$r^p = (j_0^p r, \ j_0^p dr),$$

заданный диффеоморфизмом

$$r: U \times W \to M^n$$

таким, что

$$r(0, \ 0) = o.$$

Расслоение

$$T^p(M^n)|_{r(U\times W)}$$

опять тривиально. Соответствующая тривиализация (когда φ_U фиксирована) подпространство

$$T^p(N^m_{\bar F})_o$$

отображает на некоторое подпространство A пространства $D^p(n)$.

Диффеоморфизмом l зададим координатную окрестность точки o. Тогда реперу r^p будет соответствовать элемент группы $DL^{p+1}(n)$, равный

$$r^p=(j^p_0 r,\ j^p_0 dr).$$

По определению присоединенного расслоения элементами пространства

$$T^p(N^m_{\bar F})_o$$

являются пары

$$\left(l^p r^p,\ \rho^p(r^p)^{-1}o\right),$$

где $o\in D^p(n)$.

Это показывает, что

$$D^p_m(n)=\rho^p(r^p)A.$$

Значит, подпространство A является элементом многообразия $\Gamma^p_m(n)$.

В силу достаточной подвижности подгруппы H всегда найдется такой элемент $h\in H$, что $\tau_{rp}(h)$ переведет подпространство $D^p_m(n)$ в подпространство A, т.е. такой, что

$$\rho^p\left(\tau_{rp}(h)\right)D^p_m(n)=A.$$

Тогда

$$\rho^p\left(r^p\tau_{rp}(h)\right)D^p_m(n)=D^p_m(n),$$

что в силу теорем (1.2) и (1.10) означает включение

$$r^p\tau_{rp}(h)\in DL^{p+1}_m(n).$$

Однако

$$r^p\tau_{rp}(h)=\tau^p(h)r^p,$$

и репер

$$\left(j^p_0(h\circ r),\ j^p_0 d(h\circ r)\right)$$

является касательным.

Теорема доказана.

В силу теорем (3) и (5) имеет место следующее следствие.

Следствие 3. *Если стационарная подгруппа H однородного пространства G/H достаточно m-подвижна, то каждая геометрическая реализация $B^p_0(M^n)$ расслоения $G(G/H,H)$ над произвольным m-мерным подмногообразием обладает редукцией до подгруппы $H^{p+1}_m(n)$, соответствующей этой реализации.*

Если такая реализация фиксирована, можно говорить о редукциях самого расслоения $G(G/H, H)$.

В дальнейшем построенные нами редукции расслоения $B_0^p(M^n)$ над подмногообразиями N_F^m пространства G/H будем обозначать через $FQ_m^p(n)$.

5. Эквивалентность подмногообразий

Рассматривается однородное пространство $M^n=G/H$.

Пусть

$$F: N^m \to M^n,$$

$$\Phi: L^m \to M^n$$

два m-мерных подмногообразия этого пространства.

Определение. *Подмногообразия (F, N^m) и (Φ, L^m) называются эквивалентными, если в группе движений G-пространства существует такой элемент g, который порождает диффеоморфизм*

$$g: N_F^m \to L_\Phi^m$$

вложенных подмногообразий.

Эквивалентность подмногообразий (F, N^m) и (Φ, L^m) индуцирует диффеоморфизм

$$\psi: N^m \to L^m,$$

задаваемый формулой

$$\psi = \Phi^{-1} \circ g \circ F.$$

Этот диффеоморфизм дает возможность говорить о двух вложениях

$$F: N^m \to M^n, \quad \Phi \circ \psi: N^m \to M^n$$

многообразия N^m, связанных соотношением

$$\Phi \circ \psi = gF.$$

Итак, если подмногообразия (F, N^m) и (Φ, L^m) эквивалентны, то многообразия N^m и L^m диффеоморфны.

Пусть

$$\psi: M^m \to L^m$$

некоторый произвольно заданный диффеоморфизм.

Определение. *Диффеоморфизм ψ будем называть эквивалентностью подмногообразий (F, N^m) и (Φ, L^m), если в группе Ли G существует элемент g, определяющий коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "g"] & M^n \\ N^m \arrow[u, "F"] \arrow[r, dashed, "\psi"] & L^m. \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Определение. *Два вложения*

$$N^m \xrightarrow{F_1} M^n, \quad N^m \xrightarrow{F_2} M^n$$

будем называть эквивалентными вложениями, если существует элемент $g \in G$, определяющий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[rr, dashed, "g"] & & M^n \\ & N^m. \arrow[ul, "F_1"] \arrow[ur, dashed, "F_2"'] & \end{tikzcd}$$

Пусть в пространстве G/H заданы произвольные подмногообразия (F, N^m) и (Φ, L^m) и некоторый диффеоморфизм

$$\psi : N^m \to L^m.$$

Задача I. Установить, является ли диффеоморфизм ψ эквивалентностью подмногообразий (F, N^m) и (Φ, L^m).

Теперь допустим, что заданы два вложения

$$F_1 : N^m \to M^n,$$

$$F_2 : N^m \to M^n$$

многообразия N^m.

Задача II. Установить, являются ли эквивалентными эти вложения.

Задача I легко сводится к задаче II. Для этого достаточно лишь к вложению

$$F : N^m \to M^n$$

присоединить вложение

$$\Phi \circ \psi : N^m \to M^n.$$

Укажем одну схему решения задачи II для однородных пространств G/H с достаточно m-подвижной стационарной подгруппой H, которая получается путем применения аппарата, развиваемого в работе [1].

Пусть

$$F : N^m \to M^n, \quad \Phi : N^m \to M^n$$

два вложения многообразия N^m. Так как стационарная подгруппа H пространства G/H достаточно m-подвижна, то расслоения

$$FB_0^p(M^n) \quad \text{и} \quad \Phi B_0^p(M^n)$$

обладают редукциями соответственно

$$FQ_m^p(n) \quad \text{и} \quad \Phi Q_m^p(n).$$

Если существует элемент $g \in G$, определяющий эквивалентность рассматриваемых вложений, то он индуцирует изоморфизм

$$g^p : FB_0^p(M^n) \to \Phi B_0^p(M^n)$$

главных расслоений.

Как известно, структура главного расслоения $B_0^p(M^n)$ задается фиксацией репера $r_0^p \in B^p(M^n)$, порождающего некоторый изоморфизм

$$r: G(G/H,\ H) \to B_0^p(M^n)$$

главных расслоений.

В пространстве G определена каноническая лево-инвариантная 1 — форма Θ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{H}$ группы G. Изоморфизм r позволяет эту форму перенести в пространство $B_0^p(M^n)$. В дальнейшем просто будем говорить, что форма Θ определена в этом пространстве.

Так, определенная форма Θ будет инвариантна относительно левых сдвигов пространства $B_0^p(M^n)$, индуцированных действием группы движений G. Более точно, если $g \in G$ и

$$g^p: B_0^p(M^n) \to B_0^p(M^n)$$

соответствующий изоморфизм, то

$$\delta g^p(\Theta) = \Theta,$$

где δg^p означает „кодифференциал“ отображения g^p, т.е. отображением g^p индуцированное „коотображение“ дифференциальных форм.

Пусть

$$F\pi^p: FB_0^p(M^n) \to N_F^m$$

каноническая проекция этого расслоения.

Определение. *Лифтом (в общем случае определенным лишь локально) вложения*

$$F: N^m \to M^n$$

называется отображение

$$f: N^m \to FQ_m^p(n),$$

определяющее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} N^m \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "F"'] & FQ_m^p(n) \arrow[d, "F\pi^p"] \\ & M^n. \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Через

$$\varphi: L^m \to \Phi B_0^p(M^n)$$

обозначим лифт вложения Φ.

Лифты рассматриваемых вложений многообразия N^m (в общем случае в некоторой окрестности этого многообразия) определяют 1 — формы

$$\Theta_f = \delta f(\Phi), \quad \Phi_\varphi = \delta\varphi(\Theta)$$

со значением в алгебре Ли $\mathfrak{H}$.

Вышесказанное приводит к следующему следствию.

Следствие. *Если вложения F и Φ эквивалентны, то для каждой точки $x \in N^m$ можно указать такую ее окрестность U, над которой они обладают лифтами, удовлетворяющими условию*

$$\Theta_f = \Theta_\varphi.$$

Один из этих лифтов можно выбрать произвольно, другой индуцируется g^p — отображением пространства $B_0^p(M^n)$.

В этой теории центральное место занимает следующая теорема.

Теорема. *Пусть заданы два вложения*

$$F: N^m \to M^n,$$

$$\Phi: N^m \to M^n$$

многообразия N^m. Если над некоторой окрестностью $U \subset N^m$ они обладают лифтами

$$f: U \to FQ_m^p(n),$$

$$\varphi: U \to \Phi Q_m^p(n)$$

такими, что

$$\Phi_f = \Phi_\varphi,$$

то вложения

$$F|_U, \quad \Phi|_U$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть $x \in U$ — произвольная точка этой окрестности. Так как $f(x)$ и $\varphi(x)$ — два репера расслоения $B_0^p(M^n)$, то существует единственный элемент g группы G такой, что

$$f(x) = g^p \varphi(x).$$

Совершим левый сдвиг пространства G/H при помощи элемента g и соответствующий сдвиг расслоения $B_0^p(M^n)$ при помощи g^p. Получим новое вложение

$$\tilde{F} = g \circ \Phi: N^m \to M^n,$$

и его лифт

$$\tilde{f} = g^{p+1} \circ \varphi: N^m \to \tilde{F}Q_m^p(n)$$

такой, что

$$\Theta_{\tilde{f}} = \Theta_f.$$

Кроме того, лифты $f, \tilde{f}$ пересекаются над точкой $F(x)$.

В силу уравнения Маурера—Картана, формы $d\Theta_f$ и $d\Theta_{\tilde{f}}$ удовлетворяют равенствам вида

$$d\Theta_f = -\frac{1}{2}[\Theta_f, \Theta_f], \quad d\Theta_{\tilde{f}} = -\frac{1}{2}[\Theta_{\tilde{f}}, \Theta_{\tilde{f}}].$$

Легко проверить, что тогда равенству такого же вида удовлетворяет и форма

$$\omega_f = \Theta_f - \Theta_{\tilde{f}}.$$

Это значит, что уравнение

$$\omega_f = 0$$

вполне интегрируемо и через каждую начальную точку проходит единственное его решение. Тем самым при фиксированном отображении f существует единственный лифт φ, проходящий через заданную точку пространства $B_0^p(M^n)$ и удовлетворяющий равенству

$$\Theta_\varphi = \Theta_f.$$

Так как лифты f и $\tilde{f}$ удовлетворяют этому равенству, то они являются решениями уравнения

$$\omega_f = 0$$

и, кроме того, имеют общую точку. Это показывает, что лифты f и F полностью совпадают, т.е.

$$f(y) = \tilde{f}(y)$$

для произвольной точки $y \in U$. Однако тогда

$$F\pi^p\left(f(y)\right) = F\pi^p\left(\tilde{f}(y)\right)$$

и в силу коммутативности диаграмм (*)

$$F|_U = \tilde{F}|_U.$$

Тем самым

$$F|_U = g \circ \Phi|_U,$$

что и доказывает теорему.

Утверждение теоремы носит локальный характер. Однако с ее помощью можно получить и некоторые результаты относительно глобальной эквивалентности.

В заключение несколько слов о канонизации репера.

Пусть

$$f\colon N^m \to FQ_0^p(M^n)$$

некоторый лифт вложения

$$F\colon N^m \to M^n.$$

Если множество

$$\mathfrak{H}_f = \bigcup_{x \in N^m} \Theta_f\left(T^0(N^m)\right)$$

не порождает пространства $\mathfrak{H}$, то можно указать некоторое подпространство $\tilde{\mathfrak{H}}_f$, его содержащее. Для определения эквивалентности вложения F с некоторым другим вложением достаточно рассматривать только те лифты, для которых указанные множества лежат в подпространстве $\tilde{\mathfrak{H}}_f$, так как это свойство форм Θ_f сохраняется при левых сдвигах. Такое ограничение лифтов и является частичной канонизацией репера.

Обычно стараются найти такой лифт f, относительно которого подпространство $\tilde{\mathfrak{H}}_f$ является минимальным среди всех возможных. Если он существует, то принадлежащие ему точки пространства $FQ^p_m(n)$ обычно называются „каноническими реперами“. Построение такого лифта называется „канонизацией репера“.

Общая схема канонизации репера дана в работе [1].

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
15.III.1971