1972

УДК 519.21

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ СУММ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ*

Б. Григелионис

1. Пусть $X_{nr}(t)=\left(X_{nr}^{(1)}(t), \ldots, X_{nr}^{(N)}(t)\right)$, $t\geqslant 0$, $r=1, \ldots, k_n$, – независимые N-мерные непрерывные справа случайные процессы, такие, что приращения компонент $X_{nr}^{(k)}(t)$ принимают только неотрицательные целые значения и $\mathbf{P}\{X_{nr}^{(k)}(0)=0\}=1$, $k=1, \ldots, N$.

Пусть

$$X_n(t)=\left(\sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}^{(1)}(t), \ldots, \sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}^{(N)}(t)\right), \tag{1}$$

и обозначим $X_0(t)=\left(X_0^{(1)}(t), \ldots, X_0^{(N)}(t)\right)$, $t\geqslant 0$, – непрерывный справа N-мерный пуассоновский процесс с независимыми компонентами и ведущей функцией $\lambda(t)=\left(\mathbf{E}\,X_0^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{E}\,X_0^{(N)}(t)\right)=\left(\lambda^{(1)}(t), \ldots, \lambda^{(N)}(t)\right)$.

Поскольку большинство исследований по теории массового обслуживания и теории надежности основано на предположении, что входящий поток является пуассоновским и во многих практических случаях может быть представлен как сумма большого числа слагаемых малой интенсивности, важной проблемой является исследование условий, при которых суммы (1) близки к некоторому процессу Пуассона.

При естественном предположении малости слагаемых, что при каждом фиксированном $t>0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{N} X_{nr}^{(k)}(t)>0\right\}=0, \tag{2}$$

в работе [1] мы нашли необходимые и достаточные условия сходимости сумм 1) к пуассоновскому процессу в смысле слабой сходимости конечномерных распределений $X_n(t)$ к соответствующим конечномерным распределениям пуассоновского процесса. Получен следующий результат.

Теорема 1. *При условии* (2) *конечномерные распределения* $X_n(t)$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям пуассоновского процесса* $X_0(t)$

---

* Работа как сообщение представлялась на Международную конференцию по точечным случайным процессам (Нью-Йорк, 1971).

с ведущей функцией $\lambda(t)=\left(\lambda^{(1)}(t), \ldots, \lambda^{(N)}(t)\right)$ *тогда и только тогда, когда для каждого фиксированного* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\{X_{nr}^{(k)}(t)>0\}=\lambda^{(k)}(t), \qquad k=1, \ldots, N, \tag{4}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{N} X_{nr}^{(k)}(t)>1\right\}=0. \tag{5}$$

При дополнительном условии стационарности и ординарности некоторые общие результаты были ранее получены К. Пальмом [2], А. Я. Хинчиным [3], Г. А. Ососковым [4], автором [5], И. Р. Гольдманом [6] для одномерных точечных процессов и И. Керстаном и К. Маттесом [7], автором [8], Е. Цинляром [9] для многомерных точечных процессов.

Предположим, что точечные процессы $X_{nr}(t)=\left(X_{nr}^{(1)}(t), \ldots, X_{nr}^{(N)}(t)\right)$, $r=1, \ldots, k_n$, стационарны и ординарны, т.е. для всех $m\geqslant 1$, $0\leqslant t_0< \ldots < t_m$ и $nt>0$ распределения вероятностей приращений $X_{nr}(t_k+t)-X_{nr}(t_{k-1}+t)$, $k=1, \ldots, m$, не зависят от t и

$$\lim_{t\to 0+} t^{-1}\mathbf{P}\{\tilde{X}_{nr}(t)>0\}=0,$$

где

$$\tilde{X}_{nr}(t)=\sum_{k=1}^{N} X_{nr}^{(k)}(t).$$

Если $\tilde{\lambda}_{nr}=E\tilde{X}_{nr}(1)<\infty$, то существуют функции Пальма–Хинчина

$$\varphi_{nr}^{(k)}(j, t)=\lim_{s\to 0+}\mathbf{P}\{X_{nr}^{(k)}(t+s)-X_{nr}^{(k)}(s)=j \mid X_{nr}^{(k)}(s)>0\}$$

и

$$\tilde{\varphi}_{nr}(j, t)=\lim_{s\to 0+}\mathbf{P}\{\tilde{X}_{nr}(t+s)-\tilde{X}_{nr}(s)=j \mid \tilde{X}_{nr}(s)>0\}, \qquad j=0, 1, \ldots$$

Если предположить, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\tilde{\lambda}_{nr}=0, \tag{6}$$

то условие (2), очевидно, будет выполнено.

Следствие 1. *При условии* (6) *конечномерные распределения* $X_n(t)$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям стационарного пуассоновского процесса с параметром* $\lambda=(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(N)})$ *тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^{(k)}\int_0^t \varphi_{nr}^{(k)}(0, u)\,du=\lambda^{(k)}t, \qquad k=1 \ \ldots, N, \tag{7}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\tilde{\lambda}_{nr}\int_0^t \tilde{\varphi}_{nr}(1, u)\,du=0, \tag{8}$$

где
$$\lambda_{nr}^{(k)} = \mathbf{E}\, X_{nr}^{(k)}(1).$$

2. В некоторых ситуациях важно найти не только условия слабой сходимости конечномерных распределений сумм $X_n(t)$ к конечномерным распределениям пуассоновского процесса, но также найти условия, при которых распределения широкого класса функционалов от $X_n(t)$ сходятся к распределениям функционалов от предельного пуассоновского процесса. С этой целью используем некоторые общие результаты А. В. Скорохода [10] и Ч. Стоуна [11].

Следуя работе Ч. Стоуна [11], обозначим K — пространство всех N-мерных функций $x(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, которые в каждой точке имеют пределы слева и непрерывны справа. Определим на K топологию Скорохода J_1: утверждаем, что последовательность $x_n(t)$ J_1 — сходится к $x(t)$, если существует последовательность взаимооднозначных отображений $\lambda_n(t)$ интервала $[0, \infty)$ в себя такая, что для каждого $t > 0$
$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \lambda_n(s) - s| \to 0 \text{ и } \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \left\| x_n(s) - x\left(\lambda_n(s)\right) \right\| \to 0$$
при $n \to \infty$, где $\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{N} x_k^2$ для $x = (x_1, \ldots, x_N)$.

Обозначим $\mathcal{C}$ класс всех функционалов f на K, таких, что $f\left(X_n(\cdot)\right)$ являются случайными величинами и f непрерывен в J_1 топологии почти всюду относительно меры на K, соответствующей процессу $X_0(t)$.

Утверждаем, что последовательность $X_n(t)$ слабо сходится к $X_0(t)$, если для всех $f \in \mathcal{C}$ распределения $f\left(X_n(\cdot)\right)$ слабо сходятся к распределению $f\left(X_0(\cdot)\right)$ при $n \to \infty$.

Из теоремы, доказанной Ч. Стоуном в [11], получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Последовательность $X_n(t)$ слабо сходится к $X_0(t)$ тогда, когда конечномерные распределения $X_n(t)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям $X_0(t)$ при $n \to \infty$ и для всех фиксированных $T > 0$*
$$\lim_{\substack{n \to \infty;\\ c \to 0}} \mathbf{P}\left\{ \sup_{\substack{t-c<t_1<t<t_2<t+c;\\ 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T}} \min\left(\| X_n(t_1) - X_n(t) \|, \| X_n(t) - X_n(t_2) \| \right) > 0 \right\} = 0.$$

Легко можно доказать, что
$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{\substack{t-c<t_1<t<t_2<t+c;\\ 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T}} \min\left(\| X_n(t_1) - X_n(t) \|, \| X_n(t) - X_n(t_2) \| \right) > 0 \right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{ \sum_{k=1}^{N} X_{nr}^{(k)}(T) > 1 \right\} + \int_0^T \left(\tilde{\lambda}_n(t+c) - \tilde{\lambda}_n(t-c) \right) d\tilde{\lambda}_n(t), \tag{9}$$
где $\tilde{\lambda}_n(t) = \sum_{=1}^{k_n} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}\, X_{nr}^{(k)}(t)$ для $t \geqslant 0$ и равно нулю для $t < 0$.

Комбинируя теорему 1 и (9), получаем общие условия слабой сходимости последовательности $X_n(t)$ к пуассоновскому процессу $X_0(t)$. Некоторые результаты для одномерных точечных процессов недавно получены Р. Банисом.

Следствие 2. *Последовательность* $X_n(t)$ *слабо сходится к пуассоновскому процессу с ведущей функцией* $\lambda(t)=\left(\lambda^{(1)}(t), \dots, \lambda^{(N)}(t)\right)$, *если выполнены условия* (2)—(4) *и для каждого фиксированного* $T>0$

$$\lim_{\substack{n\to\infty;\\ c\to 0}} \int_0^T \left(\tilde{\lambda}_n(t+c)-\tilde{\lambda}_n(t-c)\right) d\tilde{\lambda}_n(t)=0.$$

Предположим теперь, что точечные процессы $X_{nr}(t)= X_{nr}^{(1)}(t), \dots, X_{nr}^{(N)}(t)\Big)$, $r=1, \dots, k_n$, стационарны и ординарны и существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr}^{(k)}=\lambda^{(k)}, \qquad k=1, \dots, N. \tag{10}$$

Из следствия 1, теоремы 2, (9) и (10) вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *При условиях* (8) *и* (10) *последовательность* $X_n(t)$ *слабо сходится к стационарному пуассоновскому процессу с параметром* $\lambda=(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)})$ *тогда, когда при каждом фиксированном* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr}^{(k)} \varphi_{nr}^{(k)}(0, t)=\lambda^{(k)}, \qquad k=1, \dots, N,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \tilde{\lambda}_{nr} \tilde{\varphi}_{nr}(0, t)=\tilde{\lambda},$$

где

$$\tilde{\lambda}=\sum_{k=1}^{N} \lambda^{(k)}.$$

3. В качестве примера исследуем случай марковских процессов восстановления.

Пусть $I_j^{(n,r)}$, $j\geqslant 0$, $r=1, \dots, k_n$, — конечные цепи Маркова с пространством состояний $E=\{1, \dots, N\}$, начальными распределениями $a_i^{(n,r)}=\mathbf{P}\{I_0^{(n,r)}=i\}$ и матрицами переходных вероятностей $\|p_{ij}^{(n,r)}\|$, $1\leqslant i, j\leqslant N$. Обозначим $N^{(n,r)}(t)=\max\left\{j: \sum_{k=0}^{j} X_k^{(n,r)}<t\right\}$, где $X_0^{(n,r)}, \dots, X_k^{(n,r)}, \dots$ — последовательности неотрицательных случайных величин, независимых при разных индексах r и таких, что

$$\mathbf{P}\{X_0^{(n,r)}=0\}=1,$$

$$\mathbf{P}\{I_1^{(n,r)}=j,\ X_1^{(n,r)}<t \mid I_0^{(n,r)}=i\}=p_{ij}^{(n,r)} \hat{F}_{ij}^{(n,r)}(t)=\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t),$$

$$\mathbf{P}\{I_{k+1}^{(n,r)}=j,\ X_{k+1}^{(n,r)}<t \mid I_0^{(n,r)}, \dots, I_{k-1}^{(n,r)}, X_1^{(n,r)}, \dots, X_k^{(n,r)},$$

$$I_k^{(n,r)}=i\}=p_{ij}^{(n,r)} F_{ij}^{(n,r)}(t)=Q_{ij}^{(n,r)}(t),\ k\geqslant 1,$$

для всех

$$t \geqslant 0,\ i,\ j \in E;\ \hat{F}_{ij}^{(n,\ r)}(t),\ F_{ij}^{(n,\ r)}(t)$$

– заданные функции распределения на $[0, \infty)$.

Определим марковские процессы восстановления равенством

$$X_{nr}(t) = \left(X_{nr}^{(1)}(t),\ \ldots,\ X_{nr}^{(N)}(t)\right),\ t \geqslant 0,$$

где

$$X_{nr}^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{N^{(n,\ r)}(t)} \delta_{jI_k^{(n,\ r)}},\ \delta_{ij} = 1 \text{ при } i=j,\ \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Предположение (2) в случае марковских процессов восстановления эквивалентно условию:

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \leqslant r \leqslant k_n} \sum_{i,\ j=1}^{N} a_i^{(n,\ r)} \hat{Q}_{ij}^{(n,\ r)}(t) = 0 \tag{11}$$

при всех фиксированных $t > 0$.

Используя теорему 1, И. Сапаговас [12] доказал, что *при условии* (11) *конечномерные распределения сумм марковских процессов восстановления* $X_n(t)$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям пуассоновского процесса с ведущей функцией* $\lambda(t) = \left(\lambda^{(1)}(t),\ \ldots,\ \lambda^{(N)}(t)\right)$ *тогда и только тогда, когда для всех фиксированных* $t > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{k_n} \sum_{i=1}^{N} a_i^{(n,\ r)} \hat{Q}_{ik}^{(n,\ r)}(t) = \lambda^{(k)}(t), \qquad k = 1,\ \ldots,\ N,$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{k_n} \sum_{i,\ j,\ k=1}^{N} a_i^{(n,\ r)} \hat{Q}_{ij}^{(n,\ r)}(t) * Q_{jk}^{(n,\ r)}(t) = 0,$$

*где * обозначает символ свертки.*

Пусть

$$H_i^{(n,\ r)}(t) = \sum_{j=1}^{N} Q_{ij}^{(n,\ r)}(t),\ 0 < \eta_i^{(n,\ r)} = \int_0^{\infty} t dH_i^{(n,\ r)}(t) < \infty,\ i = 1,\ \ldots,\ N,$$

и системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_j^{(n,\ r)} p_{jk}^{(n,\ r)} = \pi_k^{(n,\ r)},\ \sum_{k=1}^{N} \pi_k^{(n,\ r)} = 1,$$

$r = 1,\ \ldots,\ k_n$, имеют единственные решения.

В случае, когда

$$a_i^{(n,\ r)} = \frac{\pi_i^{(n,\ r)} \eta_i^{(n,\ r)}}{\sum_{j=1}^{N} \pi_j^{(n,\ r)} \eta_j^{(n,\ r)}}$$

и

$$\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=\frac{1}{\eta_i^{(n,r)}}\int_0^t\left(p_{ij}^{(n,r)}-Q_{ij}^{(n,r)}(u)\right)du,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ N,\ r=1,\ \ldots,k_n,$$

хорошо известно [13, 14], что точечные процессы $X_{nr}(t)$, $r=1, \ldots, k_n$, стационарны.

Используя теорему 2, (9) и результат Сапаговаса, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Если для всех фиксированных* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\substack{1\le r\le k_n;\\ 1\le i,\ j\le N}} Q_{ij}^{(n,r)}(t)=0,$$

то последовательность сумм стационарных марковских процессов восстановления слабо сходится к стационарному пуассоновскому процессу с параметром $\lambda=(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(N)})$ *тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\frac{\pi_k^{(n,r)}}{\sum\limits_{j=1}^{N}\pi_j^{(n,r)}\eta_j^{(n,r)}}=\lambda^{(k)},\qquad k=1,\ \ldots,\ N.$$

Заметим, что в теореме 4 слагаемые $X_{nr}(t)$, $r=1, \ldots, k_n$, не обязательно ординарны. Они будут ординарными тогда и только тогда, когда

$$Q_{ij}^{(n,r)}(+0)=0,\quad i,j=1,\ \ldots,\ N,\ r=1,\ \ldots,\ k_n.$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
30.IX.1971.

Литература

1. Б. Григелионис, Предельные теоремы для сумм многомерных ступенчатых случайных процессов, Liet. matem rink., X, 1 (1970), 29–49.
2. K. Palm, Intensitätsschwankungen im Fernsprechenverkehr, Ericsson Technics, **44** (1943), 1–189.
3. А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Труды ин-та им. В. А. Стеклова, **49**(1955), 3–122.
4. Г. А. Ососков, Одна предельная теорема для потоков однородных событий, Теория вероятн. и ее примен. **1**, 2(1956), 274–282.
5. Б. Григелионис, О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Теория вероятн. и ее применен., VIII, 2(1963), 189–194.
6. J. R. Goldman, Stochastic point processes: limit theorems, Ann. Math. Statist., **38** (1967), 771–779.
7. И. Керстан, К. Маттес, Обобщение теоремы Пальма–Хинчина, Укр. мат. ж., **17**, № 4(1965), 29–36.
8. Б. Григелионис, О композициях целочисленных случайных мер, Liet matem. rink., **VI**, 3(1966), 359–363.
9. E. Çinlar, On the superposition of m-dimensional point processes, J. Appl. Prob., **5** (1968), 169–176.
10. А. В. Скороход, Предельные теоремы для случайных процессов, Теория вероятн. и ее применен., **1**(1956), 289–319.

11. C. Stone, Weak convergence of stochastic processes defined on semiinfinite time intervals, Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 5 (1963), 694–696.
12. И. Сапаговас, О сходимости сумм марковских процессов восстановления к многомерному процессу Пуассона, Liet. matem. rink., **IX**, 4 (1969), 817–826.
13. R. Pyke, Markov renewal processes with finitely many states, Ann. Math. Statist., **32** (1961), 1243–1259.
14. R. Pyke, R. Schaufele, The existence and uniqueness of stationary measures for Markov renewal processes, Ann. Math. Statist., **37** (1966), 1439–1462.

APIE DAUGIAMAČIŲ ATSITIKTINIŲ TAŠKINIŲ PROCESŲ SUMŲ SILPNĄ KONVERGENCIJĄ

B. Grigelionis

(Reziumė)

Darbe rastos bendros sąlygos, kad daugiamačių atsitiktinių taškinių procesų sumos konverguotų A. Skorochodo J_1 topologijoje į daugiamatį Puasono procesą. Stacionarių Markovo atstatymo procesų atveju gautos pakankamos tokios konvergencijos sąlygos.

ON WEAK CONVERGENCE OF THE SUMS OF MULTIDIMENSIONAL STOCHASTIC POINT PROCESSES

B. Grigelionis

(Summary)

In the present paper general conditions have been found for weak convergence in the A. Skorochod topology J_1 of the sums of multidimensional stochastic point processes to the multidimensional Poisson process. In the case of stationary Markov renewal processes sufficient conditions are given for such convergence.