УДК 519. 214

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. М. Круглов

Пусть дана последовательность одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ со значениями в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Рассмотрим новую последовательность случайных величин

$$\eta_n = \frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{b_n} + a_n, \tag{1}$$

где $b_n>0$ – действительные числа, a_n – элементы из H. В работе [1] доказано, что, если при некотором выборе чисел $b_n>0$ и элементов a_n существует собственное предельное распределение для величин (1), то характеристическая функция (х. ф.) предельного закона имеет вид либо

$$g(y) = e^{i(a,\, y) - \frac{1}{2}(Sy,\, y)}, \tag{2}$$

где a – фиксированный элемент, S – некоторый s-оператор, либо

$$g(y) = \exp\left[i(a,\ y) + \int \left(e^{i(x,\, y)} - 1 - \frac{i(x,\ y)}{1+\|x\|^2}\right) dM\right]^{*)}, \tag{3}$$

где a – элемент, M – спектральная мера, конечная на дополнении каждой окрестности Θ (нуль H) и такая, что

1) $\int\limits_{\|x\|<1} \|x\|^2\, dM < \infty$,

2) существует число $0<\alpha<2$ такое, что для любого числа $\Lambda>0$ и любого множества $A \in \mathfrak{R}$ $M(\lambda^{-1}A) = \lambda^{\alpha} M(A)$. Здесь $\mathfrak{R}$ σ-алгебра борелевских множеств пространства H. В работе [1] такие распределения называются устойчивыми с показателем α. Предположим, что параметр n в (1) пробегает не весь натуральный ряд, а последовательность n_j, которая удовлетворяет условию

$$n_j < n_{j+1}, \quad \lim_{j\to\infty} \frac{n_{j+1}}{n_j} = r, \quad 1 \leqslant r < \infty. \tag{4}$$

Целью этой заметки является описание класса $\mathfrak{A}$ предельных распределений для величин η_{n_j} при условии, что $\{n_j\}$ удовлетворяет условию (4). Ясно, что класс $\mathfrak{A}$ содержит все устойчивые распределения.

---

*) $(x,\ y)$, $\|y\|$, как обычно, обозначают скалярное произведение и норму в H.

Теорема. *Для того чтобы распределение $G\in\mathfrak{A}$ необходимо и достаточно, чтобы х. ф. g имела вид: либо* (2), *либо* (3), *где функция множеств M удовлетворяет условиям:*

1) *существуют числа $0<\alpha<2$, $T>0$ такие, что для любого измеримого множества A $M(A)=e^{\alpha T}\cdot M(e^{T}\cdot A)$,*

2) *является мерой, $M(A)<\infty$, $A=\{y:\|y\|1\}$.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим f х.ф. случайной величины ξ_1. По условию имеем: равномерно на каждом шаре конечного радиуса

$$\lim_{j\to\infty}[f(b_j^{-1}y)]^{n_j}\cdot e^{i(a_j,y)}=g(y). \tag{5}$$

Так как $|g|\not\equiv 1$, то существует элемент $y\in H$ такой, что $|g(y)|<1$. Положим $\varphi(t)=f(ty)$, $q(t)=g(ty)$. Заметим, что $q(t)$ собственная х.ф. действительной случайной величины. Из (5) следует, что равномерно на каждом ограниченном сегменте $c\leqslant t\leqslant d$

$$\lim_{j\to\infty}[\varphi(b_j^{-1}t)]^{n_j}e^{ic_jt}=q(t), c_j=(a_j,y). \tag{6}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $r>1$. Имеем

$$\left[\varphi\left(\frac{t}{b_{j+1}}\right)\right]^{n_{j+1}}\cdot e^{ic_{j+1}t}=\left[\varphi\left(\frac{t}{b_{j+1}}\right)\right]^{n_j}\cdot\left[\varphi\left(\frac{t}{b_{j+1}}\right)\right]^{n_j\left[\frac{n_{j+1}}{n_j}-1\right]}\times$$
$$\times e^{ic_{j+1}t}. \tag{7}$$

По теореме А. Я. Хинчина ([2], стр. 95), существуют последовательность $\{j'\}$ и числа $\gamma_{j'}$ такие, что х.ф. $[\varphi(b_{j'+1}^{-1}t)]^{n_{j'}}\cdot e^{i\gamma_{j'}t}$ сходятся к некоторой х.ф. ψ. По другой теореме А. Я. Хинчина ([3], стр. 45), либо $|\psi|\equiv 1$, либо $\psi(t)=q(at)e^{ibt}$, где $a>0$, b — некоторые числа. Так как $|q|\not\equiv 1$, то $\psi(t)=$ $=q(at)\cdot e^{ibt}$. Переходя в (7) к пределу по подпоследовательности $\{j'\}$, получим, что q удовлетворяет функциональному уравнению

$$q(t)=[q(at)]^{r}\cdot e^{ibt},\quad 0<a<1. \tag{8}$$

Покажем, что $0<a<1$. Случай $a=1$ исключается, так как q — собственная х.ф. Пусть $a>1$. Из (8) следует, что для любого натурального n $|q(a^{-n}t)|\leqslant$ $\leqslant|q(t)|$. Полагая $n\to\infty$, получим $|q(t)|=1$, т.е. $|q|\equiv 1$. Докажем, что

$$\lim_{j\to\infty}b_j/b_{j+1}=a. \tag{9}$$

Пусть для некоторой последовательности $\{j'\}$ $b_{j'}/b_{j'+1}\to c$. Если $c=0$ или $c=\infty$, то из (7) легко получим, что $|q|\equiv 1$. Следовательно, $0<c<\infty$. Так же, как (8), докажем, что $q(t)=[q(ct)]^{r}e^{idt}$, где d — некоторое число. Если $a\neq c$, то из равенства $|q(at)|=|q(ct)|$ следует, что $|q|\equiv 1$. Из сказанного заключаем, что последовательность $\{b_j/b_{j+1}\}$ ограничена и имеет единственную предельную точку a. Равенство (9) доказано. Используя (5) и (9), получим

$$g(y)=\lim_{j\to\infty}[f(b_{j+1}^{-1}y)]^{n_{j+1}}\cdot e^{i(a_{j+1},y)}=$$
$$=\lim_{j\to\infty}\left[\left(f\left(\frac{b_j}{b_{j+1}}\cdot b_j^{-1}y\right)\right)^{n_j}e^{i\left(\frac{b_j}{b_{j+1}}a_j,y\right)}\right]^{\frac{n_{j+1}}{n_j}}\cdot e^{i\left(a_{j+1}-\frac{b_j}{b_{j+1}}a_j,y\right)}. \tag{10}$$

Так как х.ф., заключенные в квадратных скобках, сходятся равномерно на каждом шаре конечного радиуса к $g(ay)$, то последовательность

$$\exp\left\{ i\left(a_{j+1}-\frac{b_j}{b_{j+1}}\, a_j,\ y\right)\right\}$$

сходится равномерно на каждом шаре вида $\{y: \|y\|\leqslant c\}$ к непрерывной функции $g(y)/g(ay)$. Отсюда заключаем, что элементы $a_{j+1}-b_j/b_{j+1}.\ a_j$ сходятся по норме к некоторому элементу $b\in H$. Учитывая это, получим из (10)

$$g(y)=[g(ay)]^r\cdot e^{i(b,\,y)},\quad 0<a<1. \tag{11}$$

2. Пусть $r=1$. Покажем, что в этом случае $g(y)$ — устойчивая х.ф. Назначим любое число $0<\nu<1$ и выберем подпоследовательность $n_{m(j)}$ такую, чтобы

$$n_{m(j)}<n_j,\quad \lim_{j\to\infty}\frac{n_{m(j)}}{n_j}=\nu .$$

С помощью тождества (7), в котором n_{j+1} заменено на n_j, а n_j на $n_{m(j)}$, так же, как (11), докажем

$$g^{\nu}(y)=g(ay)\cdot e^{i(b,\,y)}, \tag{12}$$

где $a=a(\nu)>0$ — некоторое число, $b=b(\nu)$ — некоторый элемент. Полагая $\nu=n^{-1}$, $n=1, 2, \ldots$, получим из (12), что g — устойчивая х.ф. [1].

Таким образом, наша задача сводится к описанию безгранично делимых б.д. распределений, удовлетворяющих уравнению (11). Напомним каноническое представление б.д. х.ф. g [4]:

$$g(y)=\exp\left[i(a_0,\ y)-\frac{1}{2}(Sy,\ y)+\int\left(e^{i(x,\,y)}-1-\frac{i(x,\ y)}{1+\|x\|^2}\right)dM\right], \tag{13}$$

где a_0 элемент из H, S — s-оператор, M — спектральная мера, конечная на дополнении каждой окрестности нуля H и такая, что $\int\limits_{\|x\|<1}\|x\|^2\,dM<\infty$.

Это представление единственно. Из (11) и (13) следует

$$(1-ra^2)(Sy,\ y)=0,\quad y\in H, \tag{14}$$

$$M(A)=rM(a^{-1}\cdot A),\quad A\in\mathfrak{R}. \tag{15}$$

Существует единственное число $\alpha>0$ такое, что $ra^{\alpha}=1$. Покажем, что, если $\alpha\geqslant 2$, то $M\equiv 0$. Предположим противное, т.е., что $\alpha\geqslant 2$, но $M\not\equiv 0$. Заметим, что $M(A_0)>0$, $A_0=\{y: a\leqslant\|y\|<1\}$. (Если $M(A_0)=0$, то из (15) следует, что $M\equiv 0$). Обозначим $A_n=a^n\cdot A_0$. Имеем

$$\int\limits_{\|x\|<1}\|x\|^2\,dM=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{A_n}\|x\|^2\,dM\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}a^{2(n+1)}\cdot M(A_n)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^{2(n+1)}\cdot r^n\cdot M(A_0)=\infty,\quad \left(M(A_n)=r^n M(A_0)\right),$$

так как $ra^2\geqslant 1$. Это противоречит свойству спектральной меры. Из сказанного следует, что, если $\alpha=2$, то предельное распределение G нормально (см. (13)), если $0<\alpha<2$, то $S=0$ (см. (13) и (14)) и х. ф. имеет вид (3). Докажем, что спектральная мера M удовлетворяет условиям, пере численным в формулировке теоремы. Условие 2) очевидно. Положим $T=-\ln a$. Из (15) следует

$$M(A)=e^{\alpha T}\cdot M(e^T\cdot A), \quad A\in\mathfrak{R}.$$

Достаточность. Пусть функция множеств M удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы. Докажем, что она является спектральной мерой. Обозначим $A_n=\{y : a^{n+1}\leqslant \|y\|<a^n\}$, $a^n=e^{-T}$, $r=a^{-\alpha}$. В силу свойства 1) имеем

$$\int\limits_{\|x\|<1}\|x\|^2\,dM=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{A_n}\|x\|^2\,dM\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}a^{2n}\cdot M(A_n)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^{2n}\cdot r^n M(A_0)<\infty,$$

так как $a^2r<1$. Из свойств 1) и 2) функции M легко следует, что мера дополнения каждой окрестности нуля H конечна. Функция g, соответствующая спектральной мере M по формуле (3), есть х.ф. и удовлетворяет уравнению

$$g(y)=[g(ay)]^r\cdot e^{i(b,\,y)},$$

где b — некоторый элемент из H. Последнее соотношение показывает, что $G\in\mathfrak{A}$. Теорема доказана.

Москва

Поступило в редакцию
15.II.1971

Литература

1. R. Iate, On stable distributions in Hilbert space, Studia Math., XXX, (1968), 63–71.
2. Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, Изд-во Ленинградского ун-та, 1960.
3. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., ГТТТ, 1949.
4. K. R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric spaces, Academic Press, New-York – London, 1967.

APIE VIENĄ RIBINIŲ PASISKIRSTYMŲ KLASĘ HILBERTO ERDVĖJE

V. Kruglovas

(*Reziumė*)

Aprašoma klasė ribinių pasiskirstymų atsitiktinių dydžių (1) sumoms, esant sąlygai, kad parametras n perbėga seką n_j, tenkinančią sąlygą (4).

ON A CLASS OF LIMIT DISTRIBUTIONS IN HILBERT SPACE

V. M. Kruglov

(*Summary*)

The paper describes a class of limit distributions for the sums of random variables (1) under condition that runs over series $\{n_j\}$ satisfying the condition (4).