1972

УДК 519.21

НЕКОТОРЫЕ РАСШИРЕНИЯ КЛАССА УСТОЙЧИВЫХ ЗАКОНОВ

Ф. Ф. Мишейкис

I. Пусть две функции распределения (ф.р.) $G(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют равенству

$$G(x)=F(x)*G\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (0<c<1). \tag{1}$$

Следуя М. Лоэву ([1], стр. 348), утверждаем, что в таком случае ф.р. $G(x)\in \in L_c$ и $F(x)\in D_c$. Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Обе ф.р. $G(x)$ и $F(x)$, удовлетворяющие равенству* (1), *будут или не будут устойчивыми сразу.*

Ф.р. $G(x)$ называется устойчивой, если для любых $a_1>0$, $a_2>0$ и b_1, b_2 удовлетворяет равенству

$$G(ax+b)=G(a_1x+b_1)*G(a_2x+b_2), \tag{2}$$

где $a>0$ и b некоторые константы. Это сразу означает, что все устойчивые распределения принадлежат классу L_c $(0<c<1)$. Также нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. *Все устойчивые распределения принадлежат классу D_c* $(0<c<1)$.

Определение 1. Считаем, что ф.р. $G(x)$ c-устойчива, если найдется ф.р. $F(x)$, удовлетворяющая равенству (1), которая принадлежит тому же типу, что и $G(x)$.

Две ф.р. $G(x)$ и $F(x)$ принадлежат одному типу, если можно найти константы $a>0$ и b такие, что будет справедливо равенство $F(x)=G(ax+b)$. С учетом равенства (2) справедлива теорема 3.

Теорема 3. *Ф.р. $G(x)$ будет устойчивой тогда и только тогда, когда она c-устойчива для всех c, $0<c<1$.*

Теперь возможно следующее усиление теоремы 1.

Теорема 1′. *Обе ф.р. $G(x)$ и $F(x)$, удовлетворяющие при некотором c, $0<c<1$, равенству* (1), *будут или не будут c_1-устойчивыми* $(0<c_1<1)$ *сразу.*

II. **Теорема 4.** *Каждая c-устойчивая ф.р. $G(x)$ безгранично делимая.*

Доказательство. Пусть характеристическая функция (х. ф.) $g(t)$ соответствует ф.р. $G(x)$. Поскольку ф.р. $G(x)$ c-устойчивая, то найдутся числа c_1, $0<c_1<1$ и b такие, что будет удовлетворено равенство

$$g(t)=g(c_1t)\,g(ct)\,e^{itb}. \tag{3}$$

Используя это равенство, можно сконструировать последовательность серий независимых случайных величин, удовлетворяющих условию предельной пренебрегаемости слагаемых, для сумм которых предельным распределением при надлежащей центрировке будет наша ф.р. $G(x)$. Это и доказывает теорему.

Аналогично можно доказать более содержательное утверждение.

Теорема 5. *Для того чтобы ф.р. $G(x)$ была безгранично делимой, достаточно, чтобы существовали две последовательности чисел $\{c_{1i}\}$ и $\{c_{2i}\}$ $(0<c_{ji}\leqslant a<1, j=1,2;\ i=1,2,\ldots)$ и последовательность ф.р. $\{F_i(x)\}\left(F_1(x)=\right.$ $\left.=G(x)\right)$, чтобы для всех i было выполнено равенство*

$$F_i(x)=F_i\left(\frac{x}{c_{1i}}\right)*F_{i+1}\left(\frac{x}{c_{2i}}+b_i\right), \tag{4}$$

где b_i — некоторые константы.

III. **Теорема 6.** *Для того чтобы ф.р. $G(x)$ была нормальным законом распределения, необходимо и достаточно, чтобы при некотором c, $0<c<1$ было выполнено равенство*

$$G(x)=G\left(\frac{x}{c}\right)*G\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}+b\right). \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость проверяется непосредственно.

Достаточность. Докажем, что только нормальный закон удовлетворяет равенству (5). По теореме 4 имеем, что наша ф.р. $G(x)$ будет безгранич но делимой. Логарифм х.ф. $g(t)$ будет удовлетворять равенству

$$\log g(t)=ibt+\log g(\sqrt{1-c^2}\,t)+\log g(ct).$$

Непосредственно проверяется, что спектральная функция $L(u)$ из формулы Леви

$$\log g(t)=i\gamma t-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\int'\{e^{itu}-1-itu/(1+u^2)\}L(du), \tag{6}$$

где штрих означает, что область интегрирования не содержит нуля, удовлетворяет равенству

$$L(u)=L\left(\frac{u}{\sqrt{1-c^2}}\right)+L\left(\frac{u}{c}\right). \tag{7}$$

Для безгранично делимых законов функция

$$I(u)=\int_0^u u^2L(du)$$

должна быть неубывающей. Из равенства (7) получаем равенство

$$I(u)=(1-c^2)\,I\left(\frac{u}{\sqrt{1-c^2}}\right)+c^2I\left(\frac{u}{c}\right).$$

Отсюда можно написать следующие два неравенства:

$$I(u)-I\left(\frac{u}{c}\right)=(1-c^2)\left[I\left(\frac{u}{\sqrt{1-c^2}}\right)-I\left(\frac{u}{c}\right)\right]\leqslant 0,$$

$$I(u)-I\left(\frac{u}{\sqrt{1-c^2}}\right)=c^2\left[I\left(\frac{u}{c}\right)-I\left(\frac{u}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right]\leqslant 0.$$

Получаем, что при $u>0$ должно быть $L(u)\equiv 0$. Аналогично доказывается, что при $u<0$ также должно быть $L(u)\equiv 0$.

Теорема доказана.

Если ф.р. $G(x)$ c-устойчивая и имеет конечную дисперсию, то обязательно будет удовлетворено равенство (5). Таким образом, получаем следствие 1.

Следствие 1. *Все c-устойчивые распределения, исключая нормальный закон, не имеют конечных дисперсий.*

Аналогичным путем, как и при доказательстве теоремы 6, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 7. *Для всех c-устойчивых распределений (и тем самым для всех устойчивых распределений), исключая нормальный закон, будет выполняться неравенство $c^2+c_1^2<1$, где c_1 определяется равенством* (3), *или неравенство*

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}<\frac{1}{a^2},$$

если мы равенство (3) *запишем в более общей форме* (2).

Таким образом, c-устойчивое распределение является также c_1-устойчивым распределением. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 6, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 8. *Для того чтобы ф.р. $G(x)$ была нормальным законом распределения, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых константах c_i, $0<c_i<1$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ были справедливы равенства*

$$F_i(x)=F_i\left(\frac{x}{c_i}\right)*F_{i+1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-c_i^2}}+b_i\right), \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

где $F_1(x)=F_n(x)=G(x)$, b_i константы, $F_i(x)$ ф.р. — IV. Теперь рассмотрим более подробно каноническое представление c-устойчивых распределений. Поскольку c-устойчивое распределение безгранично делимое, логарифм его х.ф. можно записать в виде (6). Благодаря равенству (3), видно, что должны выполняться следующие два равенства:

$$(1-c^2-c_1^2)\,\sigma^2=0$$

и

$$L(u)=L\left(\frac{u}{c_1}\right)+L\left(\frac{u}{c}\right). \tag{8}$$

В случае, если c-устойчивое распределение не нормальное, то по теореме 7 имеем, что должно быть $\sigma^2=0$, в противном случае $c^2+c_1^2=1$. Всегда найдется единственное число α, $\alpha>0$, удовлетворяющее равенству $1-c^\alpha-c_1^\alpha=0$. Из теоремы 7 следует, что $\alpha<2$, если c-устойчивое распределение не нормальное. Введем функцию $Q_2(x)=-e^{\alpha x}L(e^x)$, определенную на всей оси. Из (8) следует, что для всех x

$$Q_2(x)=c_1^\alpha\, Q_2(x+T_1)+c^\alpha\, Q_2(x+T), \tag{9}$$

где $T_1=-\ln c_1$, $T=-\ln c$. Таким образом, для $x>0$ $L(x)=-x^{-\alpha}\,Q_2(\ln x)$. Аналогично, для отрицательного спектра $L(-x)=x^{-\alpha}\,Q_1(\ln x)$; здесь $x>0$.

Исследуем свойства функций Q_i. Пусть, например, $L(x)\not\equiv 0$ при $x>0$. Из формулы (8) и монотонности функции L следует, что $L>0$ на всей полуоси $x>0$. Таким образом, для каждого x $Q_2(x)>0$. Также при $x\uparrow x_0$ существует предел $\lim Q_2(x)=Q_2(x_0-0)$, а при $x\downarrow x_0$ предел $\lim Q_2(x)=Q_2(x_0+0)$. Таким образом, при $u>0$ $L(u)=-(1/u^\alpha)\,Q_2(\ln u)$. Покажем, что найдутся две константы $\bar a$ и $\bar b$ такие, что для всех $u>0$ $\bar a\leqslant Q_2\leqslant \bar b$. Имеем

$$Q_2(\ln u)=-u^\alpha L(u)=-c^\alpha\left(\frac{u}{c}\right)^\alpha L\left(\frac{u}{c}\right)-c_1^\alpha\left(\frac{u}{c_1}\right)^\alpha L\left(\frac{u}{c_1}\right).$$

Пусть $c\leqslant c_1$. Тогда $T\geqslant T_1$. Берем последовательность интервалов

$$A_i=[u_i,\ u_{i+1}]\qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $u_i=u_0\,c^{-i}$, $u_0>0$ — некоторое фиксированное число. Пусть

$$a_i=\inf_{u\in A_i}\Big(-u^\alpha L(u)\Big),$$

$$b_i=\sup_{u\in A_i}\Big(-u^\alpha L(u)\Big).$$

При помощи равенства (9) получаем неравенства

$$\ldots\geqslant b_k\geqslant\ldots\geqslant b_1\geqslant b_0\geqslant a_0\geqslant a_1\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant\ldots.$$

Таким образом, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\bar a\geqslant 0$. Пусть

$$a_i=-\underline{u}_i^\alpha L(\underline{u}_i),\ \text{где}\ \underline{u}_i\in A_i,$$
$$b_i=-\bar u_i^\alpha L(\bar u_i),\ \text{где}\ \bar u_i\in A_i$$

эти равенства понимаются как предельные). Пусть $\bar a=0$. Это значит, что при $i\to\infty$ $-\underline{u}_i^\alpha\,L(\underline{u}_i)\to 0$. Но

$$-\underline{u}_i^\alpha L(\underline{u}_i)\geqslant -u_i^\alpha L(\bar u_{i+1})=-\left(\frac{u_i}{\bar u_{i+1}}\right)^\alpha \bar u_{i+1}^\alpha\,L(\bar u_{i+1})\geqslant$$
$$\geqslant -\left(\frac{u_i}{u_{i+2}}\right)^\alpha \bar u_{i+1}^\alpha L(\bar u_{i+1})=-c^{2\alpha}\bar u_{i+1}^\alpha L(\bar u_{i+1})\xrightarrow[i\to\infty]{}0.$$

Это значит, что при $i\to\infty$ $\lim b_i=0$ тоже, что невозможно, поскольку $L(u)<0$. Это значит, что $\bar a>0$ и

$$\bar a\leqslant\bar b\leqslant c^{-2\alpha}\,\bar a,$$

где $\bar b=\lim\limits_{k\to\infty} b_k$. Тем более

$$\bar a\leqslant Q_2(\ln u_0)\leqslant\bar b\leqslant \bar c^{-2\alpha}\,\bar a.$$

Поскольку равенство (9) означает выполнение неравенств

$$\min\{Q_2(x+T_1),\ Q_2(x+T)\}\leqslant Q_2(x)\leqslant\max\{Q_2(x+T_1),\ Q_2(x+T)\},$$

то окончательно получаем, что

$$\bar a\leqslant Q_2(\ln u)\leqslant\bar b\leqslant\bar c^{-2\alpha}\bar a,$$

где $u>0$.

Аналогично, для $u<0$ имеем

$$L(u)=\frac{1}{|u|^\alpha}\,Q_1(\ln|u|),$$

где

$$0\leqslant\bar{\bar a}\leqslant Q_1(\ln|u|)\leqslant\bar{\bar b}\leqslant\bar c^{-2\alpha}\,\bar{\bar a}.$$

Из монотонности функции $L(u)$ следует, что для всех x и всех $h>0$ $e^{\alpha h} Q_i(x-h)-e^{-\alpha h} Q_i(x+h) \geqslant 0$.

Таким образом, мы доказали необходимость следующего утверждения.

Теорема 9. *Для того чтобы ф.р. $G(x)$ была с-устойчивой* $\left(\textit{мы считаем } c=\min(c, c_1)\right)$, *необходимо и достаточно, чтобы либо G была нормальной ф.р., либо х.ф. ф.р. G должна иметь вид*

$$\log g(t)=i\gamma t+\int' \{e^{itx}-1-itx/(1+x^2)\} L(dx),$$

где спектральная функция имеет вид

$$L(x)=|x|^{-\alpha} Q_1(\ln|x|),\quad x<0,$$
$$L(x)=-x^{-\alpha} Q_2(\ln x),\quad x>0,$$

где $0<\alpha<2$, Q_i удовлетворяют равенству

$$Q_i(x)=c_1^\alpha Q_i(x+T_1)+c^\alpha Q_i(x+T),$$

причем $T_1=-\ln c_1$, $T=-\ln c$, *а также выполняются неравенства*

$$a_i \leqslant Q_i(x) \leqslant b_i \leqslant c^{-2\alpha} a_i,$$

здесь $a_i \geqslant 0$, $a_1+a_2>0$, и для всех x и всех $h>0$

$$e^{\alpha h} Q_i(x-h)-e^{-\alpha h} Q_i(x+h) \geqslant 0.$$

Достаточность проверяется непосредственно. Теоремы 6 и 7 завершают доказательство нашей теоремы.

При помощи этой теоремы, используя один результат В. М. Круглова ([2]), нетрудно доказать следующее утверждение, обобщающее следствие 1.

Теорема 10. *с-устойчивое распределение, отличное от нормального, имеет конечные абсолютные моменты порядков $0<\delta<\alpha$ и бесконечные при $\delta \geqslant \alpha$ (параметр α, $0<\alpha<2$, установлен в теореме 9).*

V. **Теорема 11.** *В каждой точке с-устойчивая ф.р. $G(x)$ дифференцируема бесконечное число раз. Более того, при $\alpha>1$, $G(x)$ — целая функция, при $\alpha=1$ $G(x)$ — аналитическая функция в некоторой полосе положительной ширины, содержащей действительную прямую.*

Доказательство. Введем функцию $u(t)=-\ln|g(t)|$. С помощью равенства (3) получаем равенство

$$u(t)=u(ct)+u(c_1 t).$$

Обозначим

$$K(\ln t)=\frac{u(t)}{|t|^\alpha}.$$

Покажем, что $K(u) \geqslant a>0$. Имеем

$$\frac{u(t)}{|t|^\alpha}=c^\alpha \frac{u(ct)}{|ct|^\alpha}+c_1^\alpha \frac{u(c_1 t)}{|c_1 t|^\alpha}. \tag{10}$$

Фиксируем, например, $t_0>0$ и обозначим

$$A_i=[t_0 c^{i+1},\ t_0 c^i] \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Также обозначим

$$a_i=\min_{t\in A_i}\frac{u(t)}{t^\alpha}=\frac{u(\underline{t}_i)}{\underline{t}_i^\alpha},\ \text{где}\ \underline{t}_i\in A_i,$$

$$b_i=\max_{t\in A_i}\frac{u(t)}{t^\alpha}=\frac{u(\bar t_i)}{\bar t_i^\alpha},\ \text{где}\ \bar t_i\in A_i.$$

Из равенства (10) следуют неравенства

$$\ldots\geqslant b_k\geqslant\ldots\geqslant b_1\geqslant b_0\geqslant a_0\geqslant a_1\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant\ldots.$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$. Допустим, что это не так, т.е.

$$\frac{u(\underline{t}_i)}{\underline{t}_i^\alpha}\xrightarrow[i\to\infty]{}0.$$

Ясно, что

$$\frac{u(\bar t_i)}{\bar t_i^\alpha}\xrightarrow[i\to\infty]{}b>0$$

и тем самым

$$\frac{u(\bar t_i)\,\underline{t}_i^\alpha}{u(\underline{t}_i)\,\bar t_i^\alpha}=k_i\xrightarrow[i\to\infty]{}\infty.$$

Это значит, что

$$g(\bar t_i)=\left[g\left(\frac{\bar t_i}{\underline{t}_i}\,\underline{t}_i\right)\right]^{k_i\left(\frac{\bar t_i}{\underline{t}_i}\right)^\alpha}. \tag{11}$$

Таким образом, спектральная функция $L(x)$ должна удовлетворять равенству

$$L(x)=k_i\left(\frac{\bar t_i}{\underline{t}_i}\right)^\alpha L\left(\frac{\bar t_i}{\underline{t}_i}\,x\right).$$

Поскольку х.ф. $g(t)$ c-устойчивая, то по теореме 9

$$L(x)=\begin{cases}|x|^{-\alpha}Q_1(\ln|x|)\ \text{при}\ x<0,\\ -x^{-\alpha}Q_2(\ln x)\ \text{при}\ x>0,\end{cases}$$

где $0<\bar a\leqslant Q_i(u)\leqslant\bar b<\infty$. Пусть $L(x)\not\equiv 0$ при $x>0$. Тогда должно выполняться равенство

$$-x^{-\alpha}Q_2(\ln x)=-k_i\left(\frac{\bar t_i}{\underline{t}_i}\right)^\alpha\left(\frac{\bar t_i}{\underline{t}_i}\right)^{-\alpha}x^{-\alpha}Q_2\left(\ln\left(\frac{\bar t_i}{\underline{t}_i}\,x\right)\right).$$

Поскольку $k_i\xrightarrow[i\to\infty]{}\infty$, то получаем, что $g(t)=e^{i\gamma t}$. Таким образом, $K(u)\geqslant a$ и тем самым

$$|g(t)|\leqslant\exp(-a|t|^\alpha).$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы. Остальные утверждения доказываются аналогично, как в ([2]).

Теорема доказана.

VI. В. М. Круглов ([2]) ввел класс распределений $\mathfrak{A}$, который определяется как множество распределений $G(x)$, х.ф. $g(t)$ которых удовлетворяют равенству

$$g(t)=g^r(ct)\,e^{ibt}, \tag{12}$$

где $r>1$, $0<c<1$, G — некоторые числа. Нетрудно убедиться, что устойчивые распределения принадлежат классу $\mathfrak{A}$. В. М. Круглов, в частности, решил следующую задачу.

Пусть дана последовательность $\{\xi_n\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с ф.р. $F(x)$ и х.ф. $f(t)$. Образуем последовательность

$$\zeta_n = \frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{b_n} + a_n,$$

где $b_n>0$ и a_n — некоторые числа. Пусть

$$P\{\zeta_{n_j} \leqslant x\} \underset{j\to\infty}{\Rightarrow} G(x), \tag{13}$$

где $\{n_j\}$ некоторая последовательность натуральных чисел. В. М. Круглов показал, что ф.р. $G(x)$, определенные при помощи соотношения (13), если при этом еще удовлетворены условия

$$\lim_{j\to\infty} \frac{n_{j+1}}{n_j} = r, \qquad 1 \leqslant r < \infty, \tag{14}$$

принадлежат классу $\mathfrak{A}$. В случае $r=1$ в пределе (13) стоит устойчивое распределение $G(x)$.

По результатам А. Я. Хинчина ([3], стр. 198) следует, что если не накладывать никаких условий на последовательность $\{n_j\}$, то в пределе (13) можно получить любое безгранично делимое распределение. Докажем следующее утверждение.

Теорема 12. *Если в пределе* (13) *стоит ф.р.* $G(x)\in\mathfrak{A}$, *то обязательно существует бесконечный предел*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{n_{j+1}}{n_j} = \infty. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть в пределе (13) стоит собственная ф.р. $G(x)\in \in\mathfrak{A}$. Это значит, что

$$f^{n_j}\left(\frac{t}{b_{n_j}}\right) e^{ia_{n_j}t} \underset{j\to\infty}{\Rightarrow} g(t).$$

Пусть предел (15) не существует. Тогда найдется подпоследовательность $\{j(k)\}$, такая, что

$$\frac{n_{j(k)+1}}{n_{j(k)}} \underset{k\to\infty}{\to} r, \qquad 1 \leqslant r < \infty.$$

Для этой подпоследовательности напишем равенство

$$f^{n_{j(k)+1}}\left(\frac{t}{b_{n_{j(k)+1}}}\right) e^{ia_{n_{j(k)+1}}t} =$$

$$= f^{n_{j(k)}}\left(\frac{t}{b_{n_{j(k)+1}}}\right) f^{n_{j(k)}\left[\frac{n_{j(k)+1}}{n_{j(k)}}-1\right]}\left(\frac{t}{b_{n_{j(k)+1}}}\right) e^{ia_{n_{j(k)+1}}t}.$$

Можно выделить некоторую подпоследовательность $\{j'(k)\}$ такую, что х.ф.

$$f^{n_{j'(k)}}\left(\frac{t}{b_{n_{j'(k)+1}}}\right) \Rightarrow g(ct)\,e^{idt} \qquad (0<c<1).$$

Таким образом, удовлетворено равенство

$$g(t) = g^r(ct)\, e^{ibt},$$

а это означает, что $G(x) \in \mathfrak{A}$, т.е. противоречит условию нашей теоремы.

Теорема доказана.

VII. Можно ввести следующее обобщение понятия c-устойчивых распределений.

Определение 2. Считаем, что ф.р. $G(x) \in \mathfrak{P}$, если ее х.ф. $g(t)$ при некоторых $c_1, c_2, \ldots, c_n > 0$, где $\infty > n \geqslant 2$, удовлетворяет равенству

$$g(t) = \left(\prod_{j=1}^{n} g(c_j t)\right) e^{iat}, \tag{16}$$

где a — константа.

Нетрудно убедиться, что $0 < c_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Также без особых осложнений мы в состоянии доказать следующие, соответствующие аналогичным теоремам для c-устойчивых распределений утверждения.

Теорема 4′. *Каждая ф.р. $G(x) \in \mathfrak{P}$ безгранично делимая.*

Теорема 6′. *Для того чтобы ф.р. $G(x)$ была нормальным законом распределения, необходимо и достаточно, чтобы при некотором n, $2 \leqslant n < \infty$, она удовлетворяла равенству* (16), *где* $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$.

Теорема 7′. *Для всех распределений из класса $\mathfrak{P}$, исключая нормальный закон, будет выполняться неравенство* $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 < 1$.

Теорема 9′. *Для того чтобы ф.р. $G(x) \in \mathfrak{P}$, необходимо и достаточно, чтобы либо G была нормальной ф.р., либо х.ф. ф.р. G должна иметь вид*

$$\log g(t) = i\gamma t + \int' \{ e^{itx} - 1 - itx \mid (1 + x^2) \} L(dx),$$

где спектральная функция имеет вид

$$L(x) = |x|^{-\alpha} Q_1(\ln|x|), \qquad x < 0,$$
$$L(x) = -x^{-\alpha} Q_2(\ln x), \qquad x > 0,$$

где α, $0 < \alpha < 2$, фиксированное, Q_i удовлетворяет равенству

$$Q_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{\alpha} Q_i(x + T_j),$$

где $T_j = -\ln c_j$ (мы считаем $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n$), а также неравенства

$$a_i \leqslant Q_i(x) \leqslant b_i \leqslant c_1^{-2\alpha} a_i,$$

где $a_i \geqslant 0$, $a_1 + a_2 > 0$, и для всех x и всех $h > 0$

$$e^{\alpha h} Q_i(x - h) - e^{-\alpha h} Q_i(x + h) \geqslant 0.$$

Теорема 10′. *Ф.р. $G(x) \in \mathfrak{P}$, если оно не нормальное, имеет конечные абсолютные моменты порядков $0 < \delta < \alpha$ и бесконечные при $\delta \geqslant \alpha$.*

Теорема 11′. *В каждой точке ф.р. $G(x) \in \mathfrak{P}$ дифференцируема бесконечное число раз. Более того, при $\alpha > 1$ $G(x)$ — целая функция, при $\alpha = 1$ $G(x)$ — аналитическая функция в некоторой полосе положительной ширины, содержащей действительную прямую.*

VIII. Можно пойти еще дальше и ввести такое обобщение понятия c-устойчивых распределений, которое будет охватывать как класс распределений $\mathfrak{P}$, так и упомянутый класс $\mathfrak{A}$, введенный В. М. Кругловым.

Определение 3. Считаем, что ф.р. $G(x) \in \mathfrak{X}$, если ее х.ф. $g(t)$ при некоторых $c_1, c_2, \ldots, c_n > 0$; $r_1, r_2, \ldots, r_n > 1$, где $\infty > n \geqslant 1$, удовлетворяет равенству

$$g(t) = \left(\prod_{j=1}^{n} g^{r_j}(c_j t)\right) e^{iat}, \tag{17}$$

где a — константа (случай $n=1$, $r_1=1$ исключаем).

Теперь сформулируем основные утверждения о структуре класса $\mathfrak{X}$, доказательство которых аналогично соответствующим теоремам о c-устойчивых распределениях.

Теорема 4″. *Каждая ф.р. $G(x) \in \mathfrak{X}$ безгранично делимая.*

Теорема 6″. *Для того чтобы ф.р. $G(x)$ была нормальным законом распределения, необходимо и достаточно, чтобы она при некотором $n \geqslant 1$ (если $n=1$), то считаем $r_1 \neq 1$) удовлетворяла равенству* (17), *где* $\sum_{i=1}^{n} r_i \, c_i^2 = 1.$

Теорема 7″. *Для всех распределений из класса $\mathfrak{X}$, исключая нормальный закон, будет выполняться неравенство* $\sum_{i=1}^{n} r_i c_i^2 < 1.$

Поскольку $G(x)$ безгранично делимый закон, то из равенства (17) видим, что $G(x)$ при всех c_i будет удовлетворять равенству (1). Это значит, что $c_i < 1$ и что ф.р. $G(x) \in L_{c_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Теорема 9″. *Для того чтобы ф.р. $G(x) \in \mathfrak{X}$, необходимо и достаточно, чтобы либо G была нормальной ф.р., либо х.ф. ф.р. $G(x)$ должна иметь вид*

$$\log g(t) = i\gamma t + \int' \{e^{itx} - 1 - itx \,|\, (1+x^2)\} \, L(dx),$$

где спектральная функция имеет вид

$$L(x) = |x|^{-\alpha} Q_1(\ln|x|), \qquad x < 0,$$
$$L(x) = -x^{-\alpha} Q_2(\ln x), \qquad x > 0,$$

где α, $0 < \alpha < 2$, фиксированное, Q_i удовлетворяют равенству

$$Q_i(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j c_j^{\alpha} Q_i(x + T_j),$$

где $T_j = -\ln c_j$ (мы считаем $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$), а также выполняются неравенства

$$a_i \leqslant Q_i(x) \leqslant b_i \leqslant c^{-2\alpha} a_i,$$

где $a_i \geqslant 0$, $a_1 + a_2 > 0$, и для всех x и всех $h > 0$

$$e^{\alpha h} Q_i(x-h) - e^{-\alpha h} Q_i(x+h) \geqslant 0.$$

Теорема 10″. *Ф.р. $G(x) \in \mathfrak{X}$, если оно не нормальное, имеет конечные абсолютные моменты порядков $0 < \delta < \alpha$ и бесконечные при $\delta \geqslant \alpha$.*

Теорема 11″. *В каждой точке ф.р. $G(x) \in \mathfrak{X}$ дифференцируема бесконечное число раз. Более того, при $\alpha>1$ $G(x)$ целая функция, при $\alpha=1$ $G(x)$ — аналитическая функция в некоторой полосе положительной ширины, содержащей действительную прямую.*

IX. Частным случаем теоремы 6″ является один явно не сформулированный результат В. М. Круглова.

Теорема А. *Для того чтобы ф.р. $G(x)$ была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы ее х.ф. $g(t)$ удовлетворяла равенству*

$$g(tc)=g^{c^2}(t)\,e^{itb},$$

где c, $0<c<\infty$, $c\neq 1$ — некоторое число.

Теоремы 6, 8, 6′, 6″, а также одна теорема из монографии Е. Лукача ([4], стр. 184), характеризуют нормальный закон распределения. Следующая теорема, характеризующая нормальный и пуассонов законы, также имеет прототип в книге Е. Лукача ([4], стр. 185).

Теорема 13. *Для того чтобы безгранично делимая х.ф. $g(t)$ была или пуассонова типа, или нормальной, необходимо и достаточно, чтобы каждый ее множитель $f(t)$ при некотором α, $\alpha>1$, удовлетворял равенству*

$$g(t)=e^{iat}f^{\alpha}(t),$$

где a — константа.

Доказательство. Необходимость проверяется непосредственно.

Достаточность. Запишем логарифм х.ф. $g(t)$ в следующей форме:

$$\log g(t)=i\gamma t+\int\{e^{itu}-1-itu/(1+u^2)\}\,\frac{1+u^2}{u^2}\,d\mathcal{T}(u),$$

где $\mathcal{T}(u)$ — неубывающая функция ограниченной вариации. Поскольку

$$f(t)=g^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,e^{-\frac{iat}{\alpha}},$$

то

$$\log f(t)=i\,\frac{\gamma-a}{\alpha}\,t+\int\{e^{itu}-1-itu/(1+u^2)\}\,\frac{1+u^2}{u^2}\,d\,\frac{1}{\alpha}\,\mathcal{T}(u).$$

Но это возможно лишь в случае, если $\mathcal{T}(u)$ возрастает только в одной точке.

Теорема доказана.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
29.XI.1971

Литература

1. М. Лоэв, Теория вероятностей, М., 1962.
2. В. М. Круглов, Об одном классе предельных распределений в гильбертовом пространстве, Liet. matem. rink., XII, № 3 (1972).
3. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1949.
4. E. Lukacs, Characteristic functions, Now York, 1960.

KAI KURIE STABILIŲ DĖSNIŲ KLASĖS PRAPLĖTIMAI

F. Mišeikis

(*Reziumė*)

Sakysime, jog charakteringa funkcija $G(x) \in \mathfrak{X}$, jei ji tenkina lygybę (17). Teoremoje 4″ įrodome, jog pasiskirstymai iš klasės $\mathfrak{X}$ yra be galo dalūs, o teoremoje 9″ apibrėžiame jų kanoninį išdėstymą.

CERTAIN EXTENSIONS OF THE CLASS OF STABLE DISTRIBUTIONS

F. Mišeikis

(*Summary*)

The characteristic function $G(x) \in \mathfrak{X}$ is assumed if the equation (17) is satisfied. In the theorem 4″ shows that all distributions from the class $\mathfrak{X}$ are infinitely divisibles, and the theorem 9″ determines the canonical representation of the distributions from the class $\mathfrak{X}$.