УДК 519.21

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ф. Ф. Мишейкис

Следуя М. Лоэву ([1], стр. 348), утверждаем, что закон распределения (з.р.) $G \in L_c$ $(0<c<1)$, если его характеристическая функция (х.ф.) $g(t)$ удовлетворяет равенству

$$g(t)=f_c(t)\,g(ct), \tag{1}$$

где $f_c(t)$ – некоторая х.ф. Для нас также представляет интерес класс распределений L, введенный А. Я. Хинчиным, и класс распределения I_0, введенный Ю. В. Линником. Известно ([2], стр. 156), что з.р. $G \in L$, если и только если его х.ф. $g(t)$ для любого c, $0<c<1$, удовлетворяет равенству (1), где $f_c(t)$ х.ф. Распределения класса L безгранично делимы. Класс I_0 ([3], стр. 145) составляют все з.р. G, которые не имеют не безгранично делимых компонент. В дальнейшем воспользуемся каноническим представлением безгранично делимого закона G в форме Леви:

$$\log g(t)=i\gamma t-\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\int_{-\infty}^{0}\left\{e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right\}dM(u)+$$

$$+\int_{0}^{\infty}\left\{e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right\}dN(u), \tag{2}$$

где функции спектра $M(u)$ и $N(u)$

1) не убывают соответственно в интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$;
2) удовлетворяют соотношениям $M(-\infty)=M(+\infty)=0$ и

$$\int_{-\varepsilon}^{0} u^2\,dM(u)+\int_{0}^{\varepsilon} u^2\,dN(u)<\infty$$

при любом конечном $\varepsilon>0$.

Также нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема А ([2], стр. 159). Для того чтобы з.р. $G \in L$, необходимо и достаточно, чтобы функции $M(u)$ и $N(u)$ в формуле (2) при каждом значении u имели правую и левую производные и чтобы функции

$$uM'(u) \quad (u<0),$$
$$uN'(u) \quad (u>0)$$

были невозрастающими (при этом $M'(u)$ и $N'(u)$ означают любые из производных – правую или левую, в разных точках, быть может, различные).

Теорема Б ([3]), стр. 145). Для того чтобы безгранично делимый закон G, имеющий гауссову компоненту, содержал только безгранично делимые компоненты, необходимо, чтобы его пуассонов спектр (множество точек возрастания функций $M(u)$ и $N(u)$) был конечным или счетным. При этом, если положительный спектр (множество точек возрастания функции $N(u)$) пронумеровать по порядку возрастания (т.е. большую частоту снабдить бóльшим индексом, а индексом 0 сопровождается свободно выбранная частота) μ_k ($k=0$, ± 1, ± 2, ...), то соотношения μ_k/μ_{k-1} должны быть натуральными числами, большими единицы. Аналогично с отрицательным спектром.

Теорема В ([3], стр. 245). Пусть существуют константы $k>0$, $c>0$ такие, что $N'(u)>k$ почти везде на интервале $(0, c)$. Тогда соответствующий безгранично делимый закон $G\overline{\in}I_0$ (т.е. G имеет не безгранично делимые компоненты). Такое же утверждение верно, если $M'(u)>k$ почти везде на $(-c, 0)$.

Теорема Г ([3], стр. 183). Если пуассонов спектр безгранично делимого закона G имеет вид, указанный в теореме Б, и ограничен, то $G\in I_0$, т.е. имеет только безгранично делимые компоненты.

2. **Теорема 1.** *Для того чтобы з.р. G был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы $G\in L$ и $G\in I_0$.*

Доказательство. Известно, что нормальный закон принадлежит классам распределений I_0 и L. Покажем, что других законов, общих этим классам, не существует.

Пусть з.р. $G\in I_0$ и имеет гауссову компоненту. Из теоремы Б следует, что его пуассонов спектр обязательно будет конечным или счетным, а из теоремы А вытекает, что $G\overline{\in}L$.

Пусть з.р. $G\in I_0$ и не имеет нормальной компоненты. Функции спектра $M(u)$ и $N(u)$ можно записать в виде

$$M(u)=a_1 M_1(u)+a_2 M_2(u)+a_3 M_3(u),$$

$$N(u)=b_1 N_1(u)+b_2 N_2(u)+b_3 N_3(u),$$

где a_i, $b_i\geqslant 0$ $(i=1, 2, 3)$, $M_1(u)$, $N_1(u)$ – абсолютно непрерывные, $M_2(u)$, $N_2(u)$ – сингулярные, $M_3(u)$, $N_3(u)$ – дискретные функции спектра некоторых безгранично делимых законов.

В случае $a_3>0$ $(b_3>0)$ из теоремы А получаем, что $G\overline{\in}L$.

Пусть $b_1>0$ $(a_1>0)$. В силу теоремы В необходимо исследовать следующие три возможности.

1. Существует такая константа $c>0$, что

$$\mu\{u: N'(u)=0, \quad u\in(0, c)\}=0,$$

где μ – мера Лебега

$$\Big(\mu\{u: M'(u)=0, \quad u\in(-c, 0)\}=0\Big),$$

но при всякой константе $c>0$ и всякой константе $k>0$

$$\mu\{u: N'(u)\leqslant k, \quad u\in(0, c)\}>0$$

$$\Big(\mu\{u: M'(u)\leqslant k, \quad u\in(-c, 0)\}>0\Big).$$

2. Существует константа $c>0$ такая, что

$$\mu\{u: N'(u)>0, \quad u\in(0, c)\}=0$$

$$\left(\mu\{u: M'(u)>0, \quad u\in(-c, 0)\}=0\right).$$

3. Для каждой константы $c>0$

$$\mu\{u: N'(u)>0, \quad u\in(0, c)\}>0$$

и

$$\mu\{u: N'(u)=0, \quad u\in(0, c)\}>0$$

$$\Big(\mu\{u: M'(u)>0, \quad u\in(-c, 0)\}>0$$

и

$$\mu\{u: M'(u)=0, \ u\in(-c, 0)\}>0\Big).$$

В случае 2 найдется интервал (c_1, c_2) $(c\leqslant c_1<c_2)$, где почти всюду $N'(u)>$ >0. По теореме А получаем, что $G\bar{\in}L$.

В случае 3 фиксируем $c>0$ и берем

$$c_1=\mu\{u: N'(u)>0, \quad u\in(0, c)\}>0.$$

Поскольку

$$\mu\{u: N'(u)=0, \quad u\in(0, c_1)\}>0,$$

то найдутся точки $u>c_1$, где или $N'(u)$ не будет существовать, или $uN'(u)$ будет возрастать, откуда следует, что $G\bar{\in}L$.

Разберем случай 1. Фиксируем константу $c>0$ и берем константу $k>0$ настолько маленькую, что

$$c_2=\mu\{u: N'(u)>k, \quad u\in(0, c)\}>0.$$

Поскольку

$$\mu\{u: N'(u)\leqslant k, \quad u\in(0, c_2)\}>0,$$

то найдутся точки $u\geqslant c_2$, где или $N'(u)$ не будет существовать, или $u\,N'(u)$ будет возрастать. Опять получаем, что $G\bar{\in}L$.

Остался случай $b_1=0$, $b_3=0$, $b_2>0$ $(a_1=0,\ a_3=0,\ a_2>0)$. Найдется интервал (c_1, c_2) $(0<c_1<c_2)$, где $N(c_2)-N(c_1)>0$.

Следовательно, найдутся точки $u\in[c_1, c_2]$, в которых не будет существовать левая или правая производная $N'(u)$. По теореме А получаем, что $G\bar{\in}L$.

Теорема доказана.

3. **Теорема 2.** *В классе законов с гауссовой компонентой, из которого исключен сам гауссов закон, с классом I^0 пересекаются те и только те классы распределений L_c, для которых $c=1/k$, $k\in\{2, 3, \ldots\}$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть з.р. $G\in I_0$. Из теоремы Б следует, что его пуассонов спектр будет конечным или счетным. Пусть также $G\in L_c$, где $0<c<1$. Тогда найдется х.ф. $f_c(t)$ такая, что будет удовлетворено равенство (1). Пуассонов спектр х.ф. $f_c(t)$ тоже будет конечным (но не пустым) или счетным. Тогда логарифм х.ф. можно представить в виде

$$\log f(t)=i\gamma t-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\left\{e^{i\mu_m t}-1-\frac{i\mu_m t}{1+\mu_m^2}\right\}+$$
$$+\sum\lambda_{-n}\left\{e^{-i\nu_n t}-1+\frac{i\nu_n t}{1+\nu_n^2}\right\},$$

где $\lambda_m>0$, если $m\leqslant m_0$, $\lambda_m=0$ если $m>m_0$, $\lambda_{-n}>0$, если $n\leqslant n_0$, $\lambda_{-n}=0$, если $n>n_0$ $(1<m_0+n_0\leqslant\infty)$, $\mu_m>0$, $\nu_n>0$. Поскольку равенство (1) эквивалентно равенству

$$g(t)=\prod_{i=0}^{\infty} f_c(c^i t), \tag{3}$$

то

$$\log g(t)=\sum_{i=0}^{\infty} \log f_c(c^i t)=$$
$$=i\gamma' t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m\left\{e^{i\mu'_m t}-1-\frac{i\mu'_m t}{1+\mu'^2_m}\right\}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} \lambda'_{-n}\left\{e^{-i\nu'_n t}-1+\frac{i\nu'_n t}{1+\nu'^2_n}\right\}.$$

Пусть, например $\lambda_1>0$, $\mu_1>0$. Тогда среди частот μ'_m по формуле (3) должны быть частоты $\mu_1 c^i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$. Пусть $\mu'_i>\mu'_j$. Поскольку $g(t)\in I_0$, то по теореме Б $\mu'_i/\mu'_j=k$, где $k\in\{2, 3, \ldots\}$. Это значит, что также должно быть $\mu_1/\mu_1 c=$ $=k$, откуда получаем необходимость нашей теоремы.

Достаточность. Покажем, что при $c=1/k$, $k\in\{2, 3, \ldots\}$, в составе класса L_c сможем найти ненормальные з.р., имеющие нормальную компоненту, которые также принадлежат классу I_0.

Пусть х.ф. $f_c(t)$ является х.ф. композиции нормального и пуассонова законов. Тогда логарифм х.ф. можно записать в виде

$$\log f_c(t)=i\gamma t-\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\left\{e^{i\mu t}-1-\frac{i\mu t}{1+\mu^2}\right\}\lambda,$$

где $\mu>0$, $\lambda>0$. Составим сумму

$$\sum_{j=0}^{\infty} \log f_c(tc^j)=i\gamma t\sum_{j=0}^{\infty} c^j-$$
$$-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\sum_{j=0}^{\infty} c^{2j}+\sum_{j=0}^{\infty}\left\{e^{i\mu c^j t}-1-\frac{i\mu c^j t}{1+\mu^2}\right\}\lambda=$$
$$=i\gamma' t-\frac{\sigma^2 t^2}{2(1-c^2)}+\int\left\{e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right\}dN(u), \tag{4}$$

где $N(u)$ будет изменяться только в точках $\mu_j=\mu c^j, j=0, -1, -2, \ldots$; так как величина этого изменения λ, то $N(u)=(j-1)\lambda$, когда $u\in[\mu_{j+1}, \mu_j)$, $N(u)=0$, когда $u\in[\mu_0, \infty)$. Поскольку для каждого $\varepsilon>\mu_0$

$$\int_0^{\varepsilon} u^2\, dN(u)=\sum_{j=0}^{\infty} c^{2j}\lambda=\frac{\lambda}{1-c^2}<\infty,$$

то получаем, что при помощи формулы (4) записано каноническое представление некоторого безгранично делимого закона G, т.е.

$$g(t)=\prod_{j=0}^{\infty} f_c(c^j t)=f_c(t)\, g(ct).$$

Следовательно, этот з.р. $G \in L_c$. Пусть $c = 1/k$, $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Видим, что тогда $\mu_{j+1}/\mu_j = k$, т.е. пуассонов спектр имеет вид, установленный в теореме Б. Поскольку этот спектр ограничен частотой μ_0, то по теореме Г $G \in I_0$.

Теорема доказана.

Пусть теперь

$$f_c(t) = i\gamma t + \left\{ e^{i\mu t} - 1 - \frac{i\mu t}{1+\mu^2} \right\} \lambda,$$

где $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Тогда в выражении (4) будет $\sigma = 0$. Пусть $c = 1/k$, $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Таким образом, мы опять получили з.р. $G \in L_{1/k}$, спектр которого ограничен и имеет вид, указанный в теореме Б, но только теперь этот закон не содержит гауссовой компоненты. По теореме Г этот закон принадлежит также классу распределений I_0. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. *Классы распределений* L_c, *для которых* $c \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}$, *с классом* I_0 *пересекаются также в классе законов без гауссовой компоненты.*

4. Пусть логарифм х.ф. $g(t)$ можно записать в виде

$$\log g(t) = \int_{-\infty}^{0} \{ e^{itu} - 1 - itu/(1+u^2) \} \varphi(u)\, du + \int_{0}^{\infty} \{ e^{itu} - 1 - itu/(1+u^2) \} \psi(u)\, du, \tag{5}$$

где функции $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ почти всюду неотрицательны и непрерывны и для каждого $\varepsilon > 0$ удовлетворяют условию

$$\int_{-\varepsilon}^{0} u^2 \varphi(u)\, du + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 \psi(u)\, du < \infty.$$

Р. Кюппанс доказал необходимость ([4]), а И. В. Островский ([5]) достаточность следующей теоремы.

Теорема Д. Для того чтобы х.ф. $g(t)$, имеющая вид (5), не содержала неразложимых компонент (т.е., чтобы $g(t) \in I_0$), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $r > 0$, при которой выполняются условия:

(1) $\varphi(u) \equiv 0$ почти всюду, $\psi(u) = 0$ почти всюду, если $u \bar{\in} [r, 2r]$;

(2) $\psi(u) \equiv 0$ почти всюду, $\varphi(u) = 0$ почти всюду, если $u \bar{\in} [-2r, -r]$.

Эту теорему используем при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4. *В классе законов, определяемых формулой* (5), *классы распределений* I_0 *и* L_c $(0 < c < 1)$ *не пересекаются.*

Доказательство. Для того чтобы закон распределения $G \in I^0$, должны выполняться условия теоремы Д. Пусть выполняются условия (1) теоремы Д. Тогда з.р. $G \in I_0$ и ее функция спектра будет следующая:

$$N(u) = -\int_{u}^{\infty} \psi(x)\, dx.$$

Допустим, что $g(t)\in L_c$ $(0<c<1)$ и пусть $N_1(u)$ функция спектра, соответствующая х.ф. $f_c(t)$, которую определяет равенство (1). Получаем равенство

$$N(u)=N_1(u)+N\left(\frac{u}{c}\right),$$

или

$$N(cu)=N_1(cu)+N(u).$$

Фиксируем число

$$u=\frac{4}{1+c}r>2r$$

и получаем равенство

$$N\left(\frac{4c}{1+c}r\right)=N_1\left(\frac{4c}{1+c}r\right)+N\left(\frac{4}{1+c}r\right).$$

Поскольку $N(2r)=0$, то должно быть

$$a=N_1\left(\frac{4c}{1+c}r\right)=N\left(\frac{4c}{1+c}r\right).$$

Если было бы $a<0$, то для $u<r$ получили бы, что

$$N(cu)\leqslant a+N(u),$$

а это невозможно, поскольку при $u\leqslant r$ $N(u)=N(r)$. Пусть число r подобрали таким образом, что для каждого $\varepsilon>0$

$$\mu\{u:\psi(u)>0,\quad u\in[2r-\varepsilon,\ 2r]\}>0.$$

Но это означает, что $a<0$, и тем самым $G\bar{\in}L_c$ для всех c, $0<c<1$. Доказательство аналогично, если будут выполняться условия (2) теоремы Д.

Теорема доказана.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
29.XI.1971

Литература

1. М. Лоэв, Теория вероятностей, М., 1962.
2. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., 1949.
3. Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, ЛГУ, 1960.
4. R. Cuppens, On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with continuous poisson spectrum II, Pacific Journal of math., **29**, № 3 (1969).
5. И. В. Островский, О разложениях безгранично делимых законов без гауссовой компоненты, ДАН СССР, **162**, № 1(1965), 48–51.

APIE KAI KURIAS PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ KLASES

F. Mišeikis

(*Reziumė*)

Pagrindinis šio straipsnio rezultatas yra ši teorema: jeigu neišsigimusi pasiskirstymo funkcija $G(x)\in L$ ir $G(x)\in I_0$, tai ji yra normalinė.

ABOUT CERTAIN CLASSES OF LIMITING LAWS

F. Mišeikis

(*Summary*)

The next theorem results from the present paper: if a nondegenerate distribution function $G(x)$ is self-decomposable and has no indecomposable factors, then $G(x)$ is normal.