1972

УДК 519.21

К ИГРОВОМУ ВАРИАНТУ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ

Р. Морквенас, Г. Прагараускас

1. Пусть в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ заданы последовательность $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{F}_n \subset \ldots$ σ-подалгебр $\mathscr{F}$ и функции $x_n(\omega)$, $\varphi_n(\omega)$, измеримые относительно $\mathscr{F}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим следующую игру двух игроков. Первый игрок может остановить процесс в те моменты n, когда $\varphi_n > 0$, а второй в те моменты, когда $\varphi_n < 0$. При остановке в момент n второй игрок получает от первого x_n. Во всей работе подразумевается, что стратегии первого игрока – марковские моменты σ (с индексами или без них), удовлетворяющие условию $\varphi_\sigma > 0$ при $\sigma < \infty$; стратегии второго – марковские моменты (с индексами или без них), удовлетворяющие условию $\varphi_\tau < 0$ при $\tau < \infty$. Пусть $\mathbf{E}X$ интеграл по вероятностной мере $\mathbf{P}$. Средний выигрыш второго игрока, соответствующий стратегиям σ, τ, равен $\mathbf{E}x_{\sigma\wedge\tau}$*).

Предположим, что выполнено следующее условие A.

Условие **A.** $\mathbf{E}\{\sup_n |x_n|\} < \infty$.

При этом условии в [1] доказано существование цены игры:

$$W_n = \operatorname*{Inf}_{\sigma \geqslant n} \operatorname*{Sup}_{\tau \geqslant n} \mathbf{E}(x_{\sigma\wedge\tau} \mid \mathscr{F}_n) = \operatorname*{Sup}_{\tau \geqslant n} \operatorname*{Inf}_{\sigma \geqslant n} \mathbf{E}(x_{\sigma\wedge\tau} \mid \mathscr{F}_n)$$

и построены ε-оптимальные стратегии. Условимся обозначать

$$\operatorname*{Sup}_{\alpha \in I} x_\alpha \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha \in I} x_\alpha, \quad \operatorname*{Inf}_{\alpha \in I} x_\alpha \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{\alpha \in I} x_\alpha,$$

(см., например, [2]). В настоящей работе найден рекуррентный способ отыскания цены игры.

2. Введем

$$\overline{W}_n^N = \operatorname*{Inf}_{\sigma \geqslant n} \operatorname*{Sup}_{\tau \geqslant n} \mathbf{E}(x_{\sigma\wedge\tau\wedge N} \mid \mathscr{F}_n),$$

$$\underline{W}_n^N = \operatorname*{Sup}_{\tau \geqslant n} \operatorname*{Inf}_{\sigma \geqslant n} \mathbf{E}(x_{\sigma\wedge\tau\wedge N} \mid \mathscr{F}_n),$$

где $N \geqslant n$.

Теорема 1. *Почти наверное*

$$\overline{W}_n^N = \underline{W}_n^N \text{ и } W_n^N = \overline{W}_n^N = \underline{W}_n^N$$

---

*) $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$; x_∞ по определению равно 0.

удовлетворяет уравнению

$$W_n^N=\begin{cases}\mathbf{E}(W_{n+1}^N\mid\mathscr{F}_n)\wedge x_n & (\text{п. н. } \varphi_n>0)\\ \mathbf{E}(W_{n+1}^N\mid\mathscr{F}_n)\vee x_n & (\text{п. н. } \varphi_n<0)\\ \mathbf{E}(W_{n+1}^N\mid\mathscr{F}_n) & (\text{п. н. } \varphi_n=0)\end{cases}\tag{1}$$

для $N>n$ *и* $W_N^N=x_N$ (п.н.).

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 в [1] вытекает, что $\overline{W}_n^N$ удовлетворяет уравнению (1).

При замене x_n на $(-x_n)$ и φ_n на $(-\varphi_n)$ функции $\underline{W}_n^N$ переходят в $(-\overline{W}_n^N)$. Поэтому $\underline{W}_n^N$ также удовлетворяет уравнению (1).

Непосредственно из определения следует, что

$$\overline{W}_N^N=\underline{W}_N^N=x_N \ (\text{п. н.}), \text{ т.е. } W_N^N=x_N \ (\text{п. н.}).$$

Теперь из рекуррентных уравнений (1) по индукции получаем, что почти наверное $\overline{W}_n^N=\underline{W}_n^N$; следовательно, $W_n^N=\overline{W}_n^N=\underline{W}_n^N$ удовлетворяет уравнению (1).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Существует предел*

$$\lim_{N\to\infty} W_n^N=W_n^* \ \text{ и } \ W_n^*=W_n \ (\text{п. н.}).$$

Доказательство. Сначала докажем существование предела.

Пусть

$$\tilde{W}_n=\varlimsup_{N\to\infty} W_n^N \ \text{ и } \ \underset{\sim}{W}_n=\varliminf_{N\to\infty} W_n^N.$$

Для любого фиксированного $\varepsilon>0$ введем марковские моменты

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon=\inf\{t:t\geqslant n,\ \varphi_t>0,\ x_t\leqslant \underset{\sim}{W}_t+\varepsilon\},$$

$$\tilde{\tau}_\varepsilon=\inf\{t:t\geqslant n,\ \varphi_t<0,\ x_t\geqslant \tilde{W}_t-\varepsilon\}\tag{2}$$

(если множество пусто, считаем соответствующий момент равным $+\infty$.) Пусть

$$\Lambda_n^N=\{t:n\leqslant t\leqslant N,\ \varphi_t<0\} \ \text{ и } \ \tilde{x}_n^N=\{\max_{t\in\Lambda_n^N} x_t\}\vee 0.$$

При $m<n$ имеем

$$W_n^N=\operatorname*{Inf}_{\sigma\geqslant n}\operatorname*{Sup}_{\tau\geqslant n}\mathbf{E}(x_{\sigma\wedge\tau\wedge N}\mid\mathscr{F}_n)\leqslant\operatorname*{Sup}_{\tau\geqslant n}\mathbf{E}(x_{\tau\wedge N}\mid\mathscr{F}_n)\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{E}(\tilde{x}_n^N\mid\mathscr{F}_n)\leqslant\mathbf{E}(\tilde{x}_m^N\mid\mathscr{F}_n)\ (\text{п.н.}),$$

где первое неравенство получается, если взять, например, $\sigma=\infty$. В силу условия **A**, к последовательности $\tilde{x}_m^N$ (по N) применима лемма Фату. Поэтому

$$\tilde{W}_n=\varlimsup_{N\to\infty} W_n^N\leqslant\varlimsup_{N\to\infty}\mathbf{E}(\tilde{x}_m^N\mid\mathscr{F}_n)\leqslant\mathbf{E}(\varlimsup_{N\to\infty}\tilde{x}_m^N\mid\mathscr{F}_n)\,(\text{п.н.}).$$

Обозначив $\varlimsup\limits_{N\to\infty}\tilde{x}_m^N=\tilde{x}_m$, имеем

$$\tilde{W}_n\leqslant\mathbf{E}(\tilde{x}_m\mid\mathscr{F}_n)\ (\text{п.н.})$$

Поэтому для

$$\varlimsup_{n\to\infty}\tilde{W}_n\leqslant\mathbf{E}(\tilde{x}_m\mid\mathscr{F}_\infty)=\tilde{x}_m\ (\text{п.н.}),$$

где $\mathscr{F}_\infty$ — σ-алгебра, порожденная σ-алгебрами $\mathscr{F}_n$, $n=0, 1, \ldots$ Из последнего неравенства вытекает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \tilde{W}_n \leqslant \overline{\lim_{\substack{t\in\Lambda_0\\ t\to\infty}}} x_t \vee 0 \quad (\text{п.н.}), \tag{3}$$

где $\Lambda_n=\Lambda_n^\infty$ и Λ_0 считаем бесконечной. Если Λ_0 конечно, правую часть неравенства (3) считаем равной 0.

В силу уравнения (1) для всех $N>n$

$$W_n^N \leqslant x_n \qquad (\text{п.н. } \varphi_n>0),$$

и

$$\tilde{W}_n \leqslant x_n \qquad (\text{п.н. } \varphi_n>0). \tag{4}$$

Так как для всех $N>n$

$$W_n^N \leqslant \mathbf{E}(W_{n+1}^N \mid \mathscr{F}_n) \qquad (\text{п.н. } \varphi_n \geqslant 0),$$

то, применив лемму Фату, получаем, что

$$\tilde{W}_n \leqslant \mathbf{E}(\tilde{W}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \qquad (\text{п.н. } \varphi_n \geqslant 0). \tag{5}$$

К уравнению

$$W_n^N \leqslant x_n \vee \mathbf{E}(W_{n+1}^N \mid \mathscr{F}_n) \qquad (\text{п.н.})$$

применяя лемму Фату, получаем, что

$$\tilde{W}_n \leqslant x_n \vee \mathbf{E}(\tilde{W}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \qquad (\text{п.н.}). \tag{6}$$

Пусть

$$V_t = \tilde{W}_{\tilde{\tau}_\varepsilon \wedge t}.$$

Из (2), (5) и (6) вытекает, что

$$\mathbf{E}(\tilde{W}_{t+1} \mid \mathscr{F}_t) \geqslant \tilde{W}_t \qquad (\text{п.н. } t<\tilde{\tau}_\varepsilon).$$

Поэтому для любого $t \geqslant n$

$$\mathbf{E}(V_{t+1} \mid \mathscr{F}_t) = 1_{\{\tilde{\tau}_\varepsilon>t\}}\mathbf{E}\ (\tilde{W}_{t+1} \mid \mathscr{F}_t) + \sum_{m=n}^{t} 1_{\{\tilde{\tau}_\varepsilon=m\}}\tilde{W}_m \geqslant$$

$$\geqslant 1_{\{\tilde{\tau}_\varepsilon>t\}}\tilde{W}_t + 1_{\{\tilde{\tau}_\varepsilon\leqslant t\}}\tilde{W}_{\tilde{\tau}_\varepsilon} = V_t \qquad (\text{п.н.}),$$

где 1_A — характеристическая функция множества A.

Следовательно, $(V_t, \mathscr{F}_t)$ — субмартингал и для любого $\sigma \geqslant n$ и $t \geqslant n$

$$\mathbf{E}(V_{\sigma\wedge t} \mid \mathscr{F}_n) \geqslant V_n = \tilde{W}_n \qquad (\text{п.н}). \tag{7}$$

Применив к (7) лемму Фату, получаем, что

$$\mathbf{E}(\overline{\lim_{t\to\infty}}\ V_{\sigma\wedge t} \mid \mathscr{F}_n) \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \mathbf{E}(V_{\sigma\wedge t} \mid \mathscr{F}_n) \geqslant \tilde{W}_n \qquad (\text{п.н.}). \tag{8}$$

Заметим, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ V_{\sigma\wedge t} = \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \tilde{W}_{\tilde{\tau}_\varepsilon\wedge\sigma\wedge t} = \tilde{W}_{\tilde{\tau}_\varepsilon\wedge\sigma} \qquad (\text{п.н. } \tilde{\tau}_\varepsilon \wedge \sigma < \infty). \tag{9}$$

В силу (2) при $\tilde{\tau}_\varepsilon=\infty$ справедливо

$$\overline{\lim_{\substack{t\in\Lambda_0\\ t\to\infty}}}\ \tilde{W}_t > \overline{\lim_{\substack{t\in\Lambda_0\\ t\to\infty}}}\ x_t.$$

Очевидно $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \tilde{W}_n \geqslant \overline{\lim\limits_{\substack{t\in\Lambda_0\\ t\to\infty}}}\ W_t$, если Λ_0 бесконечно.

Таким образом, в силу (3)

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ V_{\sigma\wedge t}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \tilde{W}_n \leqslant 0 \qquad (\text{п.н. } \tilde{\tau}_\varepsilon \wedge \sigma=\infty). \tag{10}$$

Из (8), (9) и (10), считая $\tilde{W}_\infty=0$, получаем, что для всех $\sigma \geqslant n$

$$\mathbf{E}(\tilde{W}_{\tilde{\tau}_\varepsilon} V_\sigma \mid \mathscr{F}_n) \geqslant \tilde{W}_n \qquad (\text{п.н.}). \tag{11}$$

Так как $\varphi_\sigma > 0$, из (2) и (4) вытекает

$$x_{\sigma\wedge\tilde{\tau}_\varepsilon} \geqslant \tilde{W}_{\sigma\wedge\tilde{\tau}_\varepsilon} - \varepsilon \qquad (\text{п.н.}). \tag{12}$$

Теперь из (11) в силу (12) следует, что для всех $\sigma \geqslant n$

$$\tilde{W}_n \leqslant \mathbf{E}(x_{\sigma\wedge\tilde{\tau}_\varepsilon} \mid \mathscr{F}_n) + \varepsilon \qquad (\text{п.н.}). \tag{13}$$

Заменяя x_n на $(-x_n)$ и φ_n на $(-\varphi_n)$, получаем, что для любого $\tau \geqslant n$

$$\underset{\sim}{W}_n \geqslant \mathbf{E}(x_{\tilde{\sigma}_\varepsilon\wedge\tau} \mid \mathscr{F}_n) - \varepsilon \qquad (\text{п.н.}). \tag{14}$$

Из (13) и (14), заметив, что $\underset{\sim}{W}_n \leqslant \tilde{W}_n$, имеем

$$\mathbf{E}(x_{\tilde{\sigma}_\varepsilon\wedge\tau} \mid \mathscr{F}_n) - \varepsilon \leqslant \underset{\sim}{W}_n \leqslant \tilde{W}_n \leqslant \mathbf{E}(x_{\sigma\wedge\tilde{\tau}_\varepsilon} \mid \mathscr{F}_n) + \varepsilon \qquad (\text{п.н.}) \tag{15}$$

(для всех $\sigma \geqslant n$ и $\tau \geqslant n$).

Если взять в (15) $\sigma=\tilde{\sigma}_\varepsilon$ и $\tau=\tilde{\tau}_\varepsilon$, получим, что

$$0 \leqslant \tilde{W}_n - \underset{\sim}{W}_n \leqslant 2\varepsilon \qquad (\text{п.н.}).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\tilde{W}_n = \underset{\sim}{W}_n \qquad (\text{п.н.}),$$

т.е. существует предел

$$\lim_{N\to\infty} W_n^N = W_n^* = \tilde{W}_n = \underset{\sim}{W}_n.$$

Введем марковские моменты

$$\sigma_\varepsilon^* = \inf\{t : t \geqslant n,\ \varphi_t > 0,\ x_t \leqslant W_t^* + \varepsilon\},$$

$$\tau_\varepsilon^* = \inf\{t : t \geqslant n,\ \varphi_t < 0,\ x_t \geqslant W_t^* - \varepsilon\}$$

(опять, если множество пусто, считаем соответствующий момент равным $+\infty$).

Легко видеть, что

$$\sigma_\varepsilon^* = \tilde{\sigma}_\varepsilon \ \text{ и } \ \tau_\varepsilon^* = \tilde{\tau}_\varepsilon.$$

Таким образом, из (15) для всех $\sigma \geqslant n$ и $\tau \geqslant n$ имеем

$$\mathbf{E}(x_{\sigma_\varepsilon^*\wedge\tau} \mid \mathscr{F}_n) - \varepsilon \leqslant W_n^* \leqslant \mathbf{E}(x_{\sigma\wedge\tau_\varepsilon^*} \mid \mathscr{F}_n) + \varepsilon \qquad (\text{п.н.}). \tag{16}$$

В [1] доказано, что для всех $\sigma \geqslant n$ и $\tau \geqslant n$

$$\mathbf{E}(x_{\sigma_\varepsilon\wedge\tau} \mid \mathscr{F}_n) - \varepsilon \leqslant W_n \leqslant \mathbf{E}(x_{\sigma\wedge\tau_\varepsilon} \mid \mathscr{F}_n) + \varepsilon \qquad (\text{п.н.}), \tag{17}$$

где

$$\sigma_\varepsilon = \inf\{t : t \geqslant n,\ \varphi_t > 0,\ x_t \leqslant W_t + \varepsilon\},$$

$$\tau_\varepsilon = \inf\{t : t \geqslant n,\ \varphi_t < 0,\ x_t \geqslant W_t - \varepsilon\}.$$

Положим в неравенствах (17) $\sigma=\sigma_\varepsilon^*$, а в (16) $\tau=\tau_\varepsilon$. Тогда из правого неравенства в (17) и левого в (16) имеем, что

$$W_n \leqslant W_n^* + 2\varepsilon \qquad (\text{п.н.}).$$

Ввиду призвольности ε

$$W_n \leqslant W_n^* \qquad (\text{п.н.}). \tag{18}$$

Если взять $\sigma=\sigma_\varepsilon$ в (16) и $\tau=\tau_\varepsilon^*$ в (17), то из левого неравенства в (17) и правого в (16) получим

$$W_n^* \leqslant W_n + 2\varepsilon, \qquad (\text{п.н.}),$$

и ввиду произвольности ε

$$W_n^* \leqslant W_n \qquad (\text{п.н.}). \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что

$$W_n^* = W_n \qquad (\text{п.н.}),$$

что и заканчивает доказательство теоремы 2.

3. Пользуясь методом доказательства теоремы 2, можно легко показать, что стратегии

$$\sigma_0^N = \inf\{t : n \leqslant t \leqslant N,\ \varphi_t > 0,\ x_t = W_t^N\},$$

$$\tau_0^N = \inf\{t : n \leqslant t \leqslant N,\ \varphi_t < 0,\ x_t = W_t^N\}$$

(если множество пусто, считаем соответствующий момент равным N) являются оптимальными „урезанными" стратегиями в том смысле, что

$$\mathbf{E}(x_{\sigma_0^N \wedge \tau \wedge N} \mid \mathscr{F}_n) \leqslant W_n^N \leqslant \mathbf{E}(x_{\sigma \wedge \tau_0^N \wedge N} \mid \mathscr{F}_n) \qquad (\text{п.н.})$$

для всех $\sigma \geqslant n$, $\tau \geqslant n$.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность Б. Григелионису за внимание к работе.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
1.XI.1971

Литература

1. Е. Б. Дынкин, Игровой вариант задачи об оптимальной остановке, ДАН СССР, **185** 1(1969), 16–19.
2. Ж. Неве, Математические основы теории вероятностей, М., „Мир", 1969.

OPTIMALAUS STABDYMO UŽDAVINYS KAIP LOŠIMAS

R. Morkvėnas, H. Pragarauskas

Reziumė)

Sakykime, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — tikimybinė erdvė, ir joje išskirta nemažėjanti šeima $\mathscr{F}$ σ-poalgebrių $\{\mathscr{F}_n, n=0, 1, \ldots\}$ ir apibrėžtos $\mathscr{F}_n$ išmatuojamos funkcijos x_n, φ_n. Pirmas lošėjas gali stabdyti procesą x_n tada, kai $\varphi_n > 0$, o antras, — kai $\varphi_n < 0$. Jei procesas buvo sustabdytas momentu n, tai antrasis lošėjas gauna iš pirmojo x_n reikšmę. Tarkime, kad $\mathbf{E}(\sup_n |x_n|) < \infty$. Darbe yra nagrinėjamas „nupiautas" procesas. Surasta „nupiauto" proceso vertė W_n^N bei optimalios lošėjų strategijos σ_0^N ir τ_0^N Įrodyta, kad $\lim_{N\to\infty} W_n^N = W_n$ b. v., kur W_n — „nenupiauto" proceso vertė.

ON OPTIMAL STOPPING AS GAME

R. Morkvėnas, H. Pragarauskas

(*Summary*)

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ be a probability space. Let $\{\mathcal{F}_n, n=1, 0, \ldots\}$ be a nondecreasing family of σ-subalgebras of $\mathcal{F}$ and x_n, φ_n — $\mathcal{F}_n$-measurable functions. The process x_n may be stopped by the first player at a moment n if $\varphi_n>0$ and by the second one if $\varphi_n<0$. The second player gets from the first one the payoff x_n if the process is stopped at the moment n.

Suppose that $\mathrm{E}(\sup_n |x_n|)<\infty$. Then we prove that there exists the value of „bounded" process — W_n^N, optimal „bounded" strategies σ_0^N, τ_0^N and $\lim_{N\to\infty} W_n^N = W_n$ a. s. where W_n — the value of „unbounded" process.