1972

УДК 519.21

КРИТЕРИИ ЭРГОДИЧНОСТИ ОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ В СПЕЦИАЛЬНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I

З. Навицкас

В статье предлагаются некоторые критерии положительности состояний однородных (в отношении времени) марковских цепей в специальном фазовом пространстве. Эти критерии более удобны для практического пользования, чем применявшиеся до настоящего времени.

§ 1. Введение

1. Эргодические свойства однородных цепей в основном исследованы в терминах типа „возвратность". Но для практических целей такая эргодическая теория мало пригодна, так как установление возвратности в общем случае ничуть не легче, чем исследование самой эргодичности данной марковской цепи.

Поэтому целесообразно найти такие критерии эргодичности, которые можно было бы легко практически проверить. Очевидно, эти условия должны быть выражены в терминах условных вероятностей перехода через один шаг.

Конечно, найти критерии эргодичности указанного типа в самом общем случае невозможно. Сначала необходимо исследовать довольно простые марковские цепи, а затем уже перейти к более сложным.

2. Прежде всего сжато изложим основные, хорошо известные факты из теории эргодичности марковских цепей (см. [1], часть I).

Пусть дано фазовое пространство E (счетное множество) и марковская цепь $(x_n,\ n\geqslant 0)$ со значениями из E, определяемая условными вероятностями перехода через один шаг:

$$p_{ab}=\boldsymbol{P}\{x_{n+1}=b \quad x_n=a\}$$

для всех $n\geqslant 0$ и $a,\ b\in E$.

Предположим далее, что все состояния $(x_n,\ n\geqslant 0)$ являются одним существенным классом.

Корректность и согласованность условных вероятностей, а также наличие абстрактного пространства (пространства траекторий) Ω и σ-алгебр $\mathfrak{F}_s=\sigma(x_n,\ 0\leqslant n\leqslant s)$, $\mathfrak{F}\supset\mathfrak{F}_s$ с индуцированной на $\mathfrak{F}$ вероятностной мерой $\boldsymbol{P}$ посредством условных вероятностей будем предполагать всегда, далее не упоминая об этом.

I. Если система уравнений

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{a\in E} u_a p_{ab} = u_b \qquad (b\in E) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{1.1}$$

имеет хоть одно ненулевое положительное суммируемое решение, т.е.

$$u_a > 0, \quad \sum_{a\in E} u_a < +\infty,$$

то оно в виде

$$u_a' = \frac{u_a}{\sum_{c\in E} u_c} = p_a^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} P\{ x_n = a \mid x_0 = b \}$$

единственно и является стационарным распределением цепи $(x_n, n\geqslant 0)$ с положительными состояниями.

II. Заметим, что и в общем случае возвратности марковской цепи $(x_n, n\geqslant 0)$ система (1.1) имеет также положительное решение и оно единственно если $u_a=1$ для какого-то фиксированного состояния $a\in E$ может быть удо-, влетворяющим условию

$$\sum_{a\in E} u_a = +\infty$$

(т.е. когда состояния цепи $(x_n, n\geqslant 0)$ нулевые). Кроме того, нетрудно доказать, что система (1.1) всегда имеет хотя бы одно положительное, может быть даже неограниченное решение.

III. Если марковская цепь $(x_n, n\geqslant 0)$ возвратна, тогда для любых функций (a), $g(a)$ с областью определения E и областью значений $(-\infty, \infty)$ справедливо соотношение (см. [1], теор. 15.1, стр. 134)

$$P\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} g(x_i)} = \frac{\sum_{a\in E} f(a)\, u_a}{\sum_{a\in E} g(a)\, u_a} \right\} = 1, \tag{1.2}$$

когда ряды

$$\sum_{a\in E} f(a)\, u_a, \quad \sum_{a\in E} g(a)\, u_a$$

конечны и не равны нулю.

3. Рассмотрим (см. [1], § 12, стр. 106) специальную марковскую цепь $(x'_n, n\geqslant 0)$. В фазовом пространстве $E_1=\{j: j=0, 1, 2, \ldots\}$ с условными вероятностями перехода через один шаг, равными

$$p_{ij}=\begin{cases} \lambda_i, & \text{если } j=i+1, \quad i\geqslant 0,\\ 1-\lambda_i, & \text{если } j=i-1, \quad i\geqslant 1,\\ 0 & \text{во всех остальных случаях,}\end{cases}$$

где $\lambda_i>0$, $\lambda_0=1$, и любым начальным распределением

$$\left\{ p_i^{(0)}: p_i^{(0)}\geqslant 0, \quad p_i^{(0)}=P\{x'_0=i\}, \quad i=0, 1, 2, \ldots, \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(0)}=1 \right\}.$$

Марковская цепь $(x'_n, n\geqslant 0)$ возвратна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-\lambda_i}{\lambda_i}=+\infty, \tag{1.3}$$

и имеет стационарное распределение при выполнении (1.3) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{1-\lambda_i} > +\infty. \tag{1.4}$$

Как видно, проблема эргодичности в этом случае решена.

4. Заметим, что из неравенств

$$0<c_1\leqslant\lambda_i\leqslant c_2<1 \quad (i>0), \tag{1.5}$$

и сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \tag{1.6}$$

следует (1.3) и (1.4). Этим фактом мы часто будем пользоваться.

5. Целесообразно $(x'_n, n\geqslant 0)$ разумно обобщить. При определении какой-нибудь марковской цепи мы в дальнейшем не будем специально говорить о начальном распределении, так как оно для нас несущественно, хотя его существование предполагается.

Введем несколько определений.

Пусть $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность непустых множеств, число элементов которых не превышает определенного числа $N>0$, тогда фазовое пространство определим $E=\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n\times\{n\})$, где $\{n\}$ — множество из одного элемента n.

Обозначим

$$\rho(a, b)=|i-j|,$$

где $a=(a', i)$, $b=(b', j)$ и $a', b'\in\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$.

Определение 1.1. *Марковскую цепь* $(x_n^{(\bar{E})},\ n\geqslant 0)$ в $\bar{E}$ *с одним существенным классом состояний назовем:*

а) простой, если

$$p_{ab}=P\left\{x_{n+1}^{(\bar{E})}=b \mid x_n^{(\bar{E})}=a\right\}=\begin{cases}\geqslant 0, & \text{когда } \rho(a,\ b)\leqslant \mathrm{const},\\ \equiv 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

б) полунепрерывной, если

$$A_n\subset A,\quad (n\geqslant 0), \tag{1.7}$$

где A — *какое-нибудь множество с конечным числом элементов и*

$$p_{ab}=\begin{cases}\geqslant 0, & \text{если}\quad a=(a',\ j)\in b=(b',\ i),\ a',\ b'\in A,\ \rho(a,\ b)\leqslant 1,\\ \equiv 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

в) непрерывной (следуя Спицеру [2]), *если имеют место* (1.7) *и*

$$p_{ab}=\begin{cases}\geqslant 0, & \text{если } \rho(a,b)=0,\ a,\ b\in\bar{E},\\ \geqslant 0, & \text{если } a=(a',\ i),\ b=(a',\ j),\ a'\in A,\ \rho(a,\ b)=1,\\ \equiv 0 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Определение 1.2. *Две марковские цепи назовем эквивалентными, если они обе одновременно являются или эргодическими с положительными состояниями, или эргодическими с нулевыми состояниями, или просто невозвратными.*

Замечание 1. 1 Из вышесказанного ясно, что если система (1.1) (которую в дальнейшем будем называть стохастической системой уравнений марковской цепи $(x_n,\ n\geqslant 0)$) имеет суммируемое положительное решение, то соответствующая $(x_n,\ n\geqslant 0)$ является эргодической с положительными состояниями.

Замечание 1.2. В дальнейшем (за исключением марковских цепей с конечным числом состояний) встречаются марковские цепи только с одним существенным классом состояний, и об этом больше не будем упоминать.

Замечание 1.3. По каждой стохастической системе уравнений можно однозначно восстановить фазовое пространство и условные вероятности, т.е. восстановить марковскую цепь $(x_n,\ n\geqslant 0)$, которой соответствует данная стохастическая система. Этим фактом мы часто будем пользоваться.

В настоящей статье отыщем критерии эргодичности только для простых марковских цепей (выраженных, как уже говорили, в терминах условных вероятностей перехода через один шаг).

6. Введем важное для нас понятие кусков марковской цепи $(x_n^{(\bar{E})},\ n\geqslant 0)$. Обозначим:

$$\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}=\{(a',\ j):a'\in A,\ n_1\leqslant j\leqslant n_2\},\quad 0<n_1\leqslant n_2,$$

$$\Gamma'_{n_1}=\{(a',\ n_1-1)\ :\ a'\in A\},$$

$$\Gamma''_{n_2}=\{a',\ n_2+1)\ :\ a'\in A\},$$

$$\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}=\Gamma'_{n_1}\cup\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}\cup\Gamma''_{n_2},$$

$$\Gamma_{n_1n_2}=\Gamma'_{n_1}\cup\Gamma''_{n_2}.$$

Определение 1.3. *Куском I типа полунепрерывной марковской цепи* $(x_n^{(\bar{E})}, n\geqslant 0)$ *в фазовом пространстве* $\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}$ *с границей* $\Gamma_{n_1 n_2}$ *назовем обрывающуюся в* $\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}$ *марковскую цепь* $(v_n, n\geqslant 0)$ *с условными вероятностями перехода через один шаг*:

$$P\{v_{n+1}=b \mid v_n=a\}=\bar{q}_{ab}=\begin{cases} p_{ab}, & \text{если} \quad a\in\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}, \\ 0, & \text{если} \quad a\in\Gamma_{n_1 n_2}, \quad a\neq b, \\ 1, & \text{если} \quad a=b \quad a\in\Gamma_{n_1 n_2}. \end{cases}$$

С цепью $(v_n, n\geqslant 0)$ можно связать совокупность гармонических неотрицательных функций $\{f(x) : x\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}\}$, определяемых условием

$$\sum_{b\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}} \bar{q}_{ab} f(b)=f(a), \quad (a\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}).$$

Существует система гармонических функций $\{f_a(b) : a\in\Gamma_{n_1 n_2}\}$ (которые назовем базовыми), удовлетворяющих

$$f_a(b)=\delta(a, b),$$

где

$$a, \ b\in\Gamma_{n_1 n_2}.$$

Нам понадобятся величины, определяемые следующим образом:

$$G_{n_2+1}\Big((b', j)\Big)=\sum_{a'\in A} f_{(a', n_2+1)}\Big((b', j)\Big),$$

где

$$n_1\leqslant j\leqslant n_2 \ ^*).$$

В настоящей работе будет указан способ вычисления базовых гармонических функций, когда даны условные переходные вероятности через один шаг марковской цепи $(v_n, n\geqslant 0)$.

7. **Определение 1.4.** *Куском II типа полунепрерывной марковской цепи* $(x_n^{(\bar{E})}, n\geqslant 0)$ *в фазовом пространстве* $\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}$ *с границей* $\Gamma_{n_1 n_2}$ *назовем марковскую цепь* $(u_n, n\geqslant 0)$ *с условными вероятностями перехода через один шаг.*

$$P\{u_{n+1}=b \mid u_n=a\}=\bar{\bar{q}}_{ab}=\begin{cases} p_{ab}, & \text{если} \quad a\in\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2} \quad \text{или} \quad a\in\Gamma_{n_1 n_2}, \ b\in\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}, \\ \hat{q}_{ab}, & \text{если} \quad a, b\in\Gamma'_{n_1} \quad \text{или} \quad a, \ b\in\Gamma''_{n_2} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях} \ ^{**}). \end{cases}$$

Совокупность $\{\hat{q}_{ab} : a, b\in\Gamma_{n_1 n_2}\}$ *назовем краевым условием куска II типа.*

---

* Здесь и далее предполагается, что величины, определенные для состояний $a\bar{\in}\bar{E}$ равны нулю.

** Предполагается, что $\sum_{b\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}} \bar{\bar{q}}_{ab}\equiv 1$ для всех $a\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}$.

С каждым куском II типа можно связать совокупность гармонических мер $\{\varkappa(a)\}$ (где $a \in \bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}$), определяемых следующим образом:

$$\sum_{a \in \bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}} \varkappa(a)\,\bar{\bar{q}}_{ab} = \varkappa(b), \quad (b \in \bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}), \tag{1.8}$$

$$\sum_{a \in \bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}} \varkappa(a) = 1, \tag{1.9}$$

$$\varkappa(a) \geqslant 0, \quad (a \in \bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}). \tag{1.10}$$

Каждому краевому условию соответствует только одна гармоническая мера.

Введем векторы

$$\varkappa(\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}, j) = \frac{1}{\Delta}\left(\varkappa\left((a', j)\right), \ \varkappa\left((a_2', j)\right), \ \ldots, \ \varkappa\left((a_m', j)\right)\right), \tag{1.11}$$

где

$$\Delta = \sum_{a' \in A} \varkappa\left((a', j)\right) \quad \text{и} \quad \{a_i'\}_{i=1}^m = A.$$

Каждое $\{\hat{q}_{ab}\}$ определяет один вектор типа (1.11). Итак, если краевое условие пробегает всевозможные значения, то получаем совокупность векторов типа (1.11), которую обозначим через $\mathfrak{M}_j(\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2})$.

В настоящей работе доказывается, что при довольно общих предположениях имеет место:

$$\mathfrak{M}_j(\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}) \supset \mathfrak{M}_j(\bar{\mathfrak{U}}_{m_1}^{m_2}), \tag{1.12}$$

если только

$$\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2} \subset \bar{\mathfrak{U}}_{m_1}^{m_2}, \tag{1.13}$$

и

$$\lim_{n_2 \to \infty} \mathfrak{M}_j(\bar{\mathfrak{U}}_1^{n_2}) = \{\varkappa^{(\infty)}(j)\}, \tag{1.14}$$

состоящий из единственного элемента

$$\varkappa^{(\infty)}(j) = \left(\varkappa^{(\infty)}(a_1', j), \ \ldots, \ \varkappa^{(\infty)}(a_m', j)\right), \tag{1.15}$$

если только

$$\hat{q}_{ab} = p_{ab}, \quad (a, \ b \in \Gamma_1'). \tag{1.16}$$

Гармонические меры, а также векторы типа (1.11), можно вычислять непосредственно по формулам (1.8), (1.9) и (1.10).

8. Для полунепрерывных цепей $(x_n^{(E)}, \ n \geqslant 0)$ критерии эргодичности удобнее всего выразить через величины $\{\varkappa_j^{(\infty)}\}_{j=0}^{\infty}$ и $\left\{G_m\left((b', j)\right) : b' \in A\right\}$, так как будут указаны довольно простые и пригодные для практического пользования способы вычисления этих величин. В общем случае $\varkappa^{(\infty)}(j)$ можно вычислить с желаемой точностью только через конечное число арифметических

операций и тем самым получить оценки соответствующего ряда типа (1.18), если известны условные вероятности перехода через один шаг марковской цепи $(x_n^{(\bar{E})},\ n\geqslant 0)$. В этом и состоит преимущество предлагаемых критериев эргодичности.

/ Кроме того, доказывается, что каждую простую марковскую цепь можно эквивалентно преобразовать в полунепрерывную или в непрерывную.

Справедлива теорема 1.

Теорема 1. *Пусть даны:* а) *полунепрерывная марковская цепь* $(x_n^{(\bar{E})},$ $n\geqslant 0)$; б) *подпоследовательность натуральных чисел* $0=j_0<j_1<\ \dots\ <j_s\ \dots$ *и* $\{G_{j_s+1}((b',\ j_s)) : b'\in A\}$, *вычисляемые из куска I типа марковской цепи* $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *в фазовом пространстве* $\overline{\mathrm{U}}_{j_{s-1}+1}^{j_{s+1}-1}$ *и выполняются неравенства*

$$0<c_1\leqslant\sum_{b'\in A}G_{j_{s+1}}\left((b',j_s)\right)\cdot\varkappa^{(\infty)}\left((b',j_s)\right)\leqslant c_2<1,\ |j_s-j_{s+1}|<\text{const.}\tag{1.17}$$

для всех $s\geqslant 0$ *и условие* (4.2). *Тогда необходимым и достаточным критерием положительности состояний марковской цепи* $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *является сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{s=1}^{k}\frac{\sum\limits_{b'\in A}G_{j_{s+1}}\left((b',\ j_s)\right)\cdot\varkappa^{(\infty)}\left((b',\ j_s)\right)}{1-\sum\limits_{b'\in A}G_{j_{s+1}}\left((b',j_s)\right)\cdot\varkappa^{(\infty)}\left((b',j_s)\right)}<+\infty\ .\tag{1.18}$$

В настоящей работе также указывается метод, как, используя изложенные утверждения, можно найти (в общем случае приближенно) стационарное распределение марковской цепи $(x_n^{(\bar{E})},\ n\geqslant 0)$, если оно существует.

9. Параграфы 2, 3, 4 и 5 являются вспомогательными: в них рассматриваются те преобразования марковских цепей, которые будут необходимы при установлении критерия эргодичности. В § 5 дается практический способ, как каждую простую марковскую цепь эквивалентно преобразовать в непрерывную. В § 6 приводится доказательство теоремы 1.1, а в заключительных параграфах – разные практические критерии эргодичности (т.е. разные аналоги ряда (1.18)) и приближенный метод отыскания стационарного распределения.

Основная идея доказательства теоремы 1.1 – выяснение связи между гармоническими функциями, мерами и положительными состояниями марковс кой цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$. Это делается с помощью марковских цепей, вложенных в цепь $(x_n^{(\bar{E})},\ n\geqslant 0)$.

§ 2. Общие преобразования

Прежде всего необходимо выяснить те преобразования марковских цепей, при которых эти цепи остаются эквивалентными. Здесь приводятся две леммы, которые дают некоторый ответ на этот вопрос.

Лемма 2.1. *Пусть дана марковская цепь* $(x_n,\ n\geqslant 0)$ *со значениями из* E *и условными вероятностями через один иаг* $\{p_{ab}\}$ $(a,\ b\in E)$. *Пусть далее* *имеется последовательность чисел* $\{c_a : 0 < K_1 \leqslant c_a \leqslant K_2 < +\infty,\ a \in \boldsymbol{E}\}$, *удовлетворяющая условию*

$$c_a \leqslant \frac{1}{1-p_{aa}}\,; \tag{2.1}$$

тогда марковская цепь $(\tilde{x}_n,\ n \geqslant 0)$ *со значениями из* $\boldsymbol{E}$ *и условными вероятностями перехода через один шаг*

$$\boldsymbol{P}\{\tilde{x}_{n+1}=b \mid \tilde{x}_n=a\}=\tilde{p}_{ab}=\begin{cases} c_a \cdot p_{ab}, & \text{когда}\quad a \neq b, \\ 1-c_a(1-p_{aa}), & \text{когда}\quad a=b, \end{cases} \tag{2.2}$$

эквивалентна марковской цепи $(x_n,\ n \geqslant 0)$.

Доказательство. Для $(\tilde{x}_n,\ n \geqslant 0)$ стохастическая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{b \in E} q_b \tilde{p}_{ba}=q_a \qquad (a \in \boldsymbol{E}). \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{2.3}$$

Имея в виду (2.1), (2.2) и то, что

$$p_{aa}=1-\sum_{b \in E \setminus \{a\}} p_{ab},$$

получаем

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{b \in E \setminus \{a\}} p_{ba}\, c_b\, q_b=\Big(\sum\limits_{b \in E \setminus \{a\}} p_{ab}\Big)\, c_a\, q_a \qquad (a \in \boldsymbol{E}). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Заменим $c_a q_a$ через p_a и получим стохастическую систему уравнений для $(x_n,\ n \geqslant 0)$:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{b \in E} p_{ba} \cdot p_b=p_a \qquad (a \in \boldsymbol{E}) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{2.4}$$

Очевидно, что из (2.4) также следует (2.3), и решения систем уравнений (2.3) и (2.4) связаны формулой

$$p_a=c_a\, q_a. \tag{2.5}$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что преобразование, определяемое соотношением (2.2), инвариантно относительно возвратности, так как оно по сути дела есть равномерное преобразование меры P на σ-алгебре $\mathfrak{F}$.

Из сказанного следует доказательство леммы.

Замечание 2.1. Пусть имеем однородную марковскую цепь $(x_n,\ n \geqslant 0)$ в фазовом пространстве $\boldsymbol{E}$ с одним существенным классом состояний.

I. Состояния положительны тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ и $i\in E$ существует конечное подмножество $E_0\ (i,\ \varepsilon)\subset E$ и имеет место

$$P\{x_n(\omega)\in E_0 \quad \text{для всех} \quad n\geqslant 0\,|\,x_0=i\}>1-\varepsilon. \tag{2.6}$$

II. Состояния $(x_n,\ n\geqslant 0)$ нулевые тогда и только тогда, когда для любого $i\in E$ и конечного подмножества $E_0\subset E$ существуют возрастающие с вероятностью 1 последовательности случайных неотрицательных целых чисел $\{n'_k(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{n''_k(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$ и, кроме того, имеет место

$$P\{\lim_{k\to\infty} n'_k(\omega)=\infty\}=1, \tag{2.7}$$

$$P\{\lim_{k\to\infty} n''_k(\omega)=\infty\}=1, \tag{2.8}$$

$$P\{x_{n'_k}\in E\backslash E_0 \quad \text{для всех} \quad k\geqslant 0\,|\,x_0=i\}=1, \tag{2.9}$$

$$P\{x_{n''_k}\in E_0 \quad \text{для всех} \quad k\geqslant 0\,|\,x_0=i\}=1. \tag{2.10}$$

III. Марковская цепь $(x_n,\ n\geqslant 0)$ невозвратна тогда и только тогда, когда для любого $i\in E$ и конечного подмножества $E_0\subset E$ существует $N(i,\varepsilon)>0$ и выполняется

$$P\{x_n(\omega)\in E\backslash E_0 \quad \text{для всех} \quad n\geqslant N(i,\ \varepsilon)\,|\,x_0=i\}>1-\varepsilon. \tag{2.11}$$

Доказательство. Достаточность (2.6) очевидна, необходимость доказана в [1] (стр. 65, 66, теор. 7.4 и ее следствие).

Необходимость (2.8) и (2.10) очевидна. Допустим, что существует конечное подмножество E'_0, и для любой возможной последовательности $\{n'_k(\omega) : n'_k(\omega)\geqslant 0\}$, удовлетворяющей (2.7), имеет место

$$P\{x'_{n'_k}\in E\setminus E'_0 \quad \text{для всех} \quad k\geqslant 0\,|\,x_0=i\}<1-\varepsilon, \qquad (\varepsilon>0),$$

но это равносильно

$$P\{x_n\in E''_0 \quad \text{для всех} \quad n\geqslant 0\,|\,x_0=i\}>\varepsilon,$$

где конечное подмножество $E''_0\subset E$, и тогда в силу известных свойств марковских цепей состояния $(x_n,\ n\geqslant 0)$ положительны. Итак, противоречие доказывает необходимость (2.7) и (2.9).

Достаточность (2.7), ..., (2.11) очевидна.

Необходимость (2.11) следует из того, что невозвратная марковская цепь принимает каждое значение из E с вероятностью 1 лишь конечное число раз.

Лемма 2.2. *Пусть дана марковская цепь $(x_n,\ n\geqslant 0)$ со значениями в E и бесконечная последовательность марковских моментов $\{\tau_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих*

$$\mathbf{M}_{x0}(\tau_0(\omega))<+\infty, \tag{2.12}$$

$$P\{\tau_{n+1}(\omega)>\tau_n(\omega)\}=1,\ \mathbf{M}_{x_{\tau_n}}(\tau_{n+1}-\tau_n)\leqslant c<+\infty. \tag{2.13}$$

для любого конечного $n\geqslant 0$.

Если $y_n(\omega)=x_{\tau_n(\omega)}$ *определяет для всех* n *марковскую цепь* $(y_n, n\geqslant 0)$ *со свойствами:*

а) *однородную (по отношению к времени);*

б) *с одним существенным бесконечным классом состояний;*

в) *с начальным распределением*

$$\hat{p}_d^{(0)}=P\{y_0=d\}=P\{x_{\tau_0}=d\mid x_0=a\}$$

и условными вероятностями перехода через один шаг

$$\hat{p}_{dc}=P\{y_{n+1}=c\mid y_n=d\}=P\{x_{\tau_{n+1}}=c\mid x_{\tau_n}=d\}\quad (n>0),$$

тогда $(x_n, n\geqslant 0)$ *и* $(y_n, n\geqslant 0)$ *эквивалентны.*

Доказательство. В силу наложенных ограничений на $(y_n, n\geqslant 0)$ для марковских цепей $(y_n, n\geqslant 0)$ и $(x_n, n\geqslant 0)$ применимо замечание 2.1.

Пусть $(x_n, n\geqslant 0)$ эргодична с положительными состояниями. В силу определения $(y_n, n\geqslant 0)$, строго марковского свойства цепи $(x_n, n\geqslant 0)$ и замечания 2.1 для любого $\varepsilon>0$, $a\in E$ и $d\in\{b:P\{x_{\tau_0}=b\mid x_0=a\}>0\}$ существует конечное подмножество $E_0\subset E$ и имеет место

$$\begin{aligned}
&P\{y_n\in E_0 \quad \text{для всех} \quad n\geqslant 0\mid y_0=d\}=\\
&=P\{x_{\tau_n}\in E_0 \quad \text{для всех} \quad \tau_n\geqslant 0\mid x_{\tau_0}=d\}=\\
&=P\{x_{\tau_n-\tau_0}\in E_0 \quad \text{для всех} \quad \tau_n-\tau_0\geqslant 0\mid x_0=d\}\geqslant\\
&\geqslant P\{x_n\in E_0 \quad \text{для всех} \quad n\geqslant 0\mid x_0=d\}>1-\varepsilon,
\end{aligned}$$

т.е. $(y_n, n\geqslant 0)$ также является эргодической с положительными состояниями.

Пусть $(x_n, n\geqslant 0)$ невозвратна. E_1 – фазовое пространство цепи $(y_n, n\geqslant 0)$. Так как множество $E_1\subset E$ бесконечно, то для каждого конечного подмножества E_0, $E_0'=E_1\backslash E_0$ не пусто. Аналогично предыдущему случаю, для любого $\varepsilon>0$, $d\in E$ и $a\in\{b:P\{x_{\tau_0}=b\mid x_0=d\}\geqslant 0\}$ существует такое конечное число $N(\varepsilon, a)>0$, при котором выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
&1-\varepsilon<P\{x_n\in E_0' \quad \text{для всех} \quad n\geqslant N(\varepsilon, a)\mid x_0=a\}=\\
&=P\{x_{n+\tau_0}\in E_0' \quad \text{для всех} \quad n\geqslant N(\varepsilon, a)\mid x_{\tau_0}=a\},\\
&|P\{x_{n+\tau_0}\in E_0' \quad \text{для всех} \quad n\geqslant N(\varepsilon, a)\mid x_{\tau_0}=a\}-\\
&-P\{x_{\tau_m}\in E_0' \quad \text{для всех} \quad m\geqslant 2N(\varepsilon, a)\mid x_{\tau_0}=a\}|<\varepsilon
\end{aligned}$$

(что в силу (2.12) возможно, если $N(\varepsilon, a)$ достаточно большой), т.е. $(y_n, n\geqslant 0)$ является невозвратной цепью.

Пусть $(x_n, n\geqslant 0)$ возвратна с нулевыми состояниями. Фиксируем конечное подмножество $E_0'\subset E_1$ и $a\in\{b:P\{x_{\tau_0}=b\mid x_0=d\}>0\}$.

Моменты времени $n\geqslant 0$ разбиваем на две возрастающие непересекающиеся последовательности $\{n_k'(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{n_k''(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющие

$$P\{x_{n_k'}(\omega)\in E\backslash E_0'\mid x_0=a\}=1, \tag{2.14}$$

$$P\{x_{n_k''}(\omega)\in E_0'\mid x_0=a\}=1. \tag{2.15}$$

Очевидно,

$$P\{\lim_{k\to\infty} n'_k=\infty\}=P\{\lim_{k\to\infty} n''_k=\infty\}=1.$$

В силу (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) и свойств а) и б) можно выбрать подпоследовательности $\{\bar n'_k\}_{k=0}^{\infty}\subset\{n'_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\bar n''_k\}_{k=0}^{\infty}\subset\{n''_k\}_{k=0}^{\infty}$ со свойствами:

$$P\{x_{\bar n'_k}=y_{m'}\in E_1\setminus E'_0\mid x_0=a\}=1,$$

$$P\{x_{\bar n''_k}=y_{m''}\in E'_0\mid x_0=a\}=1,$$

$$P\{\lim_{k=\infty}\bar n'_k=+\infty\}=P\{\lim_{k\to\infty}\bar n''_k=+\infty\}=1,$$

откуда обычным способом получаем

$$P\{y_{m'}\in E_1\setminus E'_0\quad \text{для всех}\quad m'\geqslant 0\mid y_0=a\}=1,$$

$$P\{y_{m''}\in E'_0\quad \text{для всех}\quad m''\geqslant 0\mid y_0=a\}=1,$$

$$P\{\lim_{n'_k\to\infty} m'=\infty\}=P\{\lim_{n''_k\to\infty} m''=\infty\}=1,$$

где $a\in\left\{b:P\{x_{\tau_0}=b\mid x_0=d\}>0\right\}$, т.е. $(y_n,\ n\geqslant 0)$ является возвратной марковской цепью с нулевыми состояниями.

Этим доказательство леммы заканчивается.

Ради упрощения изложения до конца настоящей работы (за исключением § 6) положим $A_j\equiv A\ (j\geqslant 0)$, так как все результаты, полученные для $(x_n^{(\hat E)},\ n\geqslant 0)$, где $\hat E=\bigcup_{n=0}^{\infty}(A\times\{n\})$, без принципиальных изменений будут пригодны и для $(x_n^{(\hat E)},\ n\geqslant 0)$.

§ 3. Гармонические функции

Коротко изложим хорошо известные свойства гармонических функций. Пусть дан кусок I типа на $\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}$ марковской цепи $(x_n^{(\hat E)},\ n\geqslant 0)$.

I. *Если $f_a(b)$ базовая гармоническая функция, то*

$$f_a(b)=P\{v_{\tau(\omega)}=a\mid v_0=b\},\tag{3.1}$$

$$G_{n_2+1}(b)=P\{v_{\tau(\omega)}\in\Gamma''_{n_2}\mid v_0=b\},\tag{3.2}$$

где

$$\tau(\omega)=\inf\{m:v_m\in\Gamma_{n_1n_2},\ v_k\in\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2},\ 0\leqslant k<m\}.$$

Отсюда следует существование нетривиальных (т.е. тождественно неравных константе) гармонических функций для любого куска I типа, марковской цепи $(x_n^{(\hat E)},\ n\geqslant 0)$, когда $0<n_1\leqslant n_2<+\infty$.

II. *Принцип максимума и минимума. Пусть $f(a)$ гармоническая функция, тогда справедливо*

$$\min_{a\in\Gamma_{n_1n_2}}\{f(a)\}\leqslant f(b)\leqslant\max_{a\in\Gamma_{n_1n_2}}\{f(a)\}.\tag{3.3}$$

III. *Любая неотрицательная гармоническая функция представима в виде*:

$$f(b)=\sum_{a\in\Gamma_{n_1n_2}} c_a f_a(b), \tag{3.4}$$

где множители $c_a\geqslant 0$.

IV. *Пусть на* $\Gamma_{n_1n_2}$ *дана функция* $g(a)$ $\left(g(a)\geqslant 0,\ a\in\Gamma_{n_1n_2}\right)$, *тогда существует единственная гармоническая функция* $f(b)$ *в* $\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}$, *удовлетворяющая условию*

$$f(b)\equiv g(b)\qquad (b\in\Gamma_{n_1n_2}) \tag{3.5}$$

и имеющая вид

$$f(c)=\sum_{b\in\Gamma_{n_1n_2}} g(b)\, f_b(c)\quad (c\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}). \tag{3.6}$$

Вычислять базовые гармонические функции удобнее всего с помощью свойства 1. По формуле полной вероятности получаем

$$\boldsymbol{P}\{v_\tau=a\mid v_0=b\}=\sum_{m=0}^{\infty}\boldsymbol{P}\{v_m=a,\ \tau=m\mid v_0=b\}.$$

Обозначим:

$$\boldsymbol{P}\{v_m=(a',j),\ \tau=m\}=p_{(a',j)}^{(m)},$$

$$\boldsymbol{P}\{v_m=(c',k)\}=p_{(c',k)}^{(m)},$$

где

$$a',\ c'\in A;\ j=n_1+1,\ n_2-1;\ n_1\leqslant k\leqslant n_2.$$

Тогда опять по формуле полной вероятности имеем

$$p_a^{(0)}=\boldsymbol{P}\{v_0=a\},\quad (a\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}),$$

$$p_a^{(m)}=\sum_{c\in\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}}\bar{q}_{ca}\,p_c^{(m-1)},\quad (a\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2})\ (m\geqslant 1). \tag{3.7}$$

Обозначим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_b^{(m)}=K(\{p_a^{(0)}\},\ b),\quad (b\in\bar{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}). \tag{3.8}$$

Тогда, просуммировав по m (3.7) и подставив в результат (3.8), получаем систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ K(\{p_a^{(0)}\},\ b)=\sum\limits_{c\in\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}}\bar{q}_{cb}\,K(\{p_a^{(0)}\},\ c)+p_b^{(0)},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right. \tag{3.9}$$

где

$$b \in \bar{\mathfrak{U}}^{n_2}_{n_1} \quad \text{и} \quad K(\{p_a^{(0)}\},\ b)$$

является функцией Грина обрывающейся марковской цепи $(v_n,\ n \geqslant 0)$ при начальном распределении

$$\left\{ p_a^{(0)} : a \in \bar{\mathfrak{U}}^{n_2}_{n_1},\ \sum_{a \in \bar{\mathfrak{U}}^{n_2}_{n_1}} p_a^{(0)} = 1 \right\},$$

существование, положительность и конечность которой хорошо известны (см. [5]).

Положим

$$K(\{p_b^{(0)}\},\ a) = K(c,\ a)$$

при $p_a^{(0)} = \delta(a,\ c)$, где c фиксировано. Тогда имеют место следующие свойства.

V. $K(\{p_b^{(0)}\},\ a) = \sum\limits_{b \in \bar{\mathfrak{U}}^{n_2}_{n_1}} p_b^{(0)} K(b,\ a).$

VI. $K(b,\ a) = \pi(b,\ a) \cdot K(a,\ a),$

где

$$\pi(b,\ a) = \boldsymbol{P}\{ v_n = a \text{ для некоторого } n \mid v_0 = b \}.$$

VII. $f_a(c) = K(c,\ a) \quad (a \in \Gamma_{n_1 n_2},\ c \in \bar{\mathfrak{U}}^{n_2}_{n_1}).$

VIII. *Прямым вычислением легко проверяется*:

$$\tilde{K}(a,\ a) = c_a K(a,\ a) \quad (a \in \mathfrak{U}^{n_2}_{n_1}),$$

$$\tilde{K}(a,\ a) = K(a,\ a) \quad (a \in \Gamma_{n_1 n_2}),$$

$$\tilde{\pi}(b,\ a) = \pi(b,\ a) \quad (b \in \bar{\mathfrak{U}}^{n_2}_{n_1}),$$

$$\tilde{f}_a(b) = f_a(b) \quad (a \in \Gamma_{n_1 n_2},\ b \in \bar{\mathfrak{U}}^{n_2}_{n_1}),$$

где $\tilde{K}(a, a)$, $\tilde{\pi}(b, a)$, $\tilde{f}_a(b)$ — *соответственно функция Грина, вероятность достижения* a *из* b *и гармоническая функция преобразованного по описанному в лемме 2.1 способу куска 1 типа марковской цепи* $(\tilde{x}^{(\hat{E})}_n,\ n \geqslant 0)$.

Итак, искомая базовая функция $f_a(b)$ находится по формуле VII, а $K(b, a)$ — из системы уравнений (3.9) при соответствующем выборе начальных распределений, т.е. $p_c^{(0)} = \delta(c,\ b)$.

§ 4. Вложенные цепи Маркова

Пусть имеем полунепрерывную марковскую цепь $(x_n^{(\hat{E})},\ n \geqslant 0)$ и бесконечную подпоследовательность целых чисел $I = \{j_s : 0 \leqslant j_0 < j_1 < \ldots,\ j_{s+1} - j_s \leqslant \leqslant \mathrm{const}$. Опишем важные для нас конкретные преобразования полунепрерывных марковских цепей, которыми часто будем пользоваться.

Определение 4.1. *Последовательность марковских моментов* $\{\tau_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ *назовем последовательностью I типа, если*

$$\tau_{k+1}(\omega)=\inf\Big\{m: m>\tau_k,\ x_m^{(\hat{E})}\in\{(a',\ j_{s+1}): a'\in A\}\cup,$$
$$\cup\ \{(a',\ j_{s-1}): a'\in A\}\Big\},$$

где

$$\tau_0(\omega)=\inf\{m: m\geqslant 0,\ x_m^{(\hat{E})}\in\hat{E}_1\} \tag{4.1}$$

и

$$x_{\tau_k}^{(\hat{E})}=(a',\ j_s)$$

при

$$\hat{E}_1=\bigcup_{s=0}^{\infty}(A\times\{j_s\})\ \text{ и }\ (a',\ j_s)\in\hat{E}_1.$$

Определение 4.2. *Последовательность марковских моментов* $\{\tau_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ *назовем последовательностью II типа, если имеет место* (4.1) *и*

$$\tau_k(\omega)=\inf\{m: m>\tau_{k-1}(\omega),\ \ x_m^{(\hat{E})}\in\hat{E}_1\}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Образуем случайные функции I (II) типа

$$y_n^{(\hat{E}_1)}(\omega)=x_{\tau_n(\omega)}^{(\hat{E})}(\omega),$$

где $\{\tau_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность марковских моментов I (II) типа.

Изложим некоторые свойства случайных функций $(y_n,\ n\geqslant 0)$ и последовательностей марковских моментов $\{\tau_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$. До конца этой работы будем предполагать выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{b'\in A} p_{a(b',\,j-1)}\geqslant c_1>0,\ \sum_{b'\in A} p_{a(b',\,j+1)}\geqslant c_1>0\ (a\in\hat{E},\ j>0). \tag{4.2}$$

1. *Случайная функция I (II) типа является однородной марковской цепью* $(y_n^{(\hat{E}_1)},\ n\geqslant 0)$ *с описанными в лемме 2.2 свойствами.*

2. *Последовательность марковских моментов I (II) типа удовлетворяет условиям* (2.12) *и* (2.13).

Доказательство очевидно.

Определение 4.3. *Случайную функцию* $(y_n^{(\hat{E}_1)},\ n\geqslant 0)$ *I (II) типа назовем (следуя Кендалу, см.* [3]) *вложенной марковской цепью I (II) типа цепи* $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *в фазовом пространстве* $\hat{E}_1$, *а сам процесс вычисления параметров случайной функции* $(y_n^{(\hat{E}_1)},\ n\geqslant 0)$ *I (II) типа — вложением.*

3. *Марковская цепь* $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *и соответствующие ей вложенные марковские цепи I и II типов эквивалентны.*

Доказательство получаем, применив лемму 2.2.

4. *В случае, когда* $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *возвратно, то*

$$\frac{u_a}{u_b}=\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}_b},$$

где $a,\ b\in\hat{E}_1$ *и* $\{u_a: u_a>0,\ a\in\hat{E}\}$, $\{\bar{u}_a: \bar{u}_a>0,\ a\in\hat{E}_1\}$, *соответственно решения стохастически хсистем уравнений маркоеской цепи* $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *и вложенной марковской цепи* II типа $(y_n^{(\hat{E}_1)},\ n\geqslant 0)$.

Доказательство. Марковская цепь $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$ в силу ее возвратности и $(y_n^{(\hat{E}_1)}, n\geqslant 0)$ (II типа) эргодичны. Тогда имеем (см. [1], теор. 15.1, стр. 134)

$$P\left\{\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\chi_a(x_n^{(\hat{E})})}{\sum_{n=1}^{N}\chi_b(x_n^{(\hat{E})})}=\frac{u_a}{u_b}\right\}=1,$$

$$P\left\{\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\chi_a(y_n^{(\hat{E}_1)})}{\sum_{n=1}^{N}\chi_b(y_n^{(\hat{E}_1)})}=\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}_b}\right\}=1,$$

где

$$\chi_a(b)=\begin{cases}1, & \text{если } a=b\\ 0, & \text{если } a\neq b\end{cases}\quad \text{и}\quad a,\ b\in\hat{E}_1.$$

Но, с другой стороны, по определению $(y_n^{(\hat{E}_1)}, n\geqslant 0)$ имеет место

$$P\left\{\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\chi_a(y_n^{(\hat{E}_1)})}{\sum_{n=1}^{N}\chi_b(y_n^{(\hat{E}_1)})}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\chi_a(x_{\tau_n}^{(\hat{E})})}{\sum_{n=1}^{N}\chi_b(x_{\tau_n}^{(\hat{E})})}=\right.$$

$$\left.=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{\tau_N}\chi_a(x_n^{(\hat{E})})}{\sum_{n=1}^{\tau_N}\chi_b(x_n^{(\hat{E})})}=\lim_{M\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{M}\chi_a(x_n^{(\hat{E})})}{\sum_{n=1}^{M}\chi_b(x_n^{(\hat{E})})}\right\}=1,$$

так как

$$P\{\omega : x_k^{(\hat{E})}\neq a,\ b;\ a,\ b\in\hat{E} \text{ для всех } k\geqslant 0\ k\neq\tau_n(\omega)\}=1$$

и

$$P\{\lim_{N\to\infty}\tau_N=+\infty\}=1.$$

Свойство доказано.

Вычислим условные переходные вероятности через один шаг вложенной марковской цепи I типа.

Если построить кусок I типа на $\bar{\mathfrak{U}}_{j_{s-1}+1}^{j_{s+1}-1}$ и вычислить базовые гармонические функции $\left\{f_a(b) : a,\ b\in\bar{\mathfrak{U}}_{j_{s-1}+1}^{j_{s+1}-1}\right\}$, тогда в силу вероятностных свойств базовых гармонических функций имеет место

$$P\{y_{n+1}^{(\hat{E}_1)}=a\mid y_n^{(\hat{E}_1)}=b\}=\bar{p}_{ba}=f_a(b),$$

где

$$a,\ b \in \mathfrak{U}_{j_{s-1}+1}^{j_{s+1}-1},\ j_s \in I,\ s=0,1,2,\ldots .$$

Для вычисления условных вероятностей перехода через один шаг вложенной цепи II типа определим кусок марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n \geqslant 0)$ следующим образом:

а) фазовое пространство имеет вид:

$$\mathfrak{D}_{j_{s-1}}^{j_{s+1}} = U_{j_{s-1}+1}^{j_s-1} \cup \{(0,\ a',\ j_s) : a' \in A\} \cup \mathfrak{U}_{s+1}^{j_{s+1}-1}$$

(здесь $\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2} = \varnothing$, если $n_1 > n_2$) с границами

$$\Gamma'_{j_{s-1}+1},\ \bar{\Gamma}_{j_s} = \{(a',\ j_s) : a' \in A\},\ \Gamma''_{j_{s+1}-1};$$

б) марковская цепь

$$(z_n,\ n \geqslant 0) \text{ в } \bar{\mathfrak{D}}_{j_{s-1}}^{j_{s+1}} = \mathfrak{D}_{j_{s-1}}^{j_{s+1}} \cup \Gamma'_{j_{s-1}+1} \cup \bar{\Gamma}_{j_s} \cup \Gamma''_{j_{s+1}-1}$$

имеет условные вероятности через один шаг:

$$P\{z_{n+1}=b \mid z_n=a\} = \hat{\hat{q}}_{ab} = \begin{cases} p_{ab}, & \text{если } a \in \mathfrak{U}_{j_{s-1}+1}^{j_s-1} \cup \mathfrak{U}_{j_{s+1}}^{j_{s+1}-1},\ b \in \bar{\mathfrak{U}}_{j_{s-1}}^{j_{s+1}}, \\ p_{\bar{a}b}, & \text{если } a=(0,\ a',\ j_s),\ a' \in A,\ \bar{a}=(a',\ j_s),\ b \in \bar{\mathfrak{U}}_{j_{s-1}}^{j_{s+1}}, \\ 1, & \text{если } a=b,\ b \in \Gamma'_{j_{s-1}+1} \cup \Gamma''_{j_{s+1}-1} \cup \bar{\Gamma}_{j_s}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для $(z_n,\ n \geqslant 0)$ в $\bar{\mathfrak{D}}_{j_{s-1}}^{j_{s+1}}$ существует система базовых функций

$$\left\{ f_a(b) : b \in \bar{\mathfrak{D}}_{j_{s-1}}^{j_{s+1}},\quad a \in \Gamma'_{j_{s-1}+1} \cup \Gamma''_{j_{s+1}-1} \cup \bar{\Gamma}_{j_s} \right\},$$

которые можно вычислить обычным путем. Если обозначить условные вероятности через один шаг вложенной марковской цепи II типа

$$P\{y_{n+1}^{(\hat{E}_1)} = b \mid y_n^{(\hat{E}_1)} = a\} = \bar{\bar{p}}_{ab},$$

тогда, как и в предыдущем случае, получим

$$\bar{\bar{p}}_{ab} = f_b(a),$$

где

$$a=(a',\ j_s);\ b \in \Gamma'_{j_{s-1}+1} \cup \bar{\Gamma}_{j_s} \cup \Gamma''_{j_{s+1}-1};\ j_s \in I,\ s=0,1,2,\ \ldots \text{ и } \bar{a}=(0,\ a',\ j_s).$$

Замечание 4.1. Если во вложенную в $\hat{E}_1$ марковскую цепь II типа марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n \geqslant 0)$ вложить марковскую цепь I типа в E_1, получим вложенную в $\hat{E}_1$ марковскую цепь I типа марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n \geqslant 0)$.

Замечание 4.2. Вложить марковскую цепь I (II) типа, очевидно, можно и в кусок I (II) типа марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n \geqslant 0)$, предварительно на длежащим способом выбрав фазовое пространство для вложенных марковских цепей.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю проф. Б. И. Григелионису за постоянное внимание к работе.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 1.XI.1971

Литература

1. Чжун Кай-Лай, Однородные цепи Маркова, М., „Мир", 1964.
2. Ф. Спицер, Принципы случайного блуждания, М., „Мир", 1969.
3. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Введение в теорию массового обслуживания, М., „Наука", 1966.
4. Е. В. Дынкин, Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963.
5. Е. Б. Дынкин, Граничная теория марковских процессов (дискретный случай), Успехи математических наук, XXIV, вып. 2(146) (1969), 3–43.
6. С. Карлин, Основы теории случайных процессов, М., „Мир", 1971.
7. В. А. Малышев, Случайные блуждания, уравнения Винера—Хопфа в четверти плоскости, автоморфизмы Галуа (препринт), изд. МГУ, 1970.
8. I. L. Doob, Discrete potential theory and boundaries, Journal of mathematics and mechanics, 8 (3) (1959), 433–458.

HOMOGENINIŲ MARKOVO GRANDINIŲ, DEFINUOTŲ SPECIALIOJE FAZINĖJE ERDVĖJE, ERGODIŠKUMO KRITERIJAI. I

Z. Navickas

(*Reziumė*)

Darbe siūlomi nauji homogeninių Markovo grandinių, definuotų specialioje fazinėje erdvėje, būsenų teigiamumo kriterijai, išreikšti sąlyginių perėjimo per vieną žingsnį tikimybių terminais, t. y. (1.18) eilute.

Šioje darbo dalyje aprašomos invariantinės ergodiškumo atžvilgiu grandinių transformacijos, įvedami nauji pagalbiniai parametrai ir išnagrinėjamos jų savybės.

THE CRITERIA FOR THE ERGODICITY OF THE HOMOGENEOUS MARKOV CHAINS WITH SPECIAL PHASE SPACE. I

Z. Navickas

(*Summary*)

The paper presents some new criteria in terms of one-step transition probabilities (see (1.18) for the ergodicity of homogeneous Markov chains with the special phase space.

The first part of the paper deals with transformations of the Markov chains invariant in respect to ergodicity. The new auxiliary parameters are introduced and their properties investigated.