1972

УДК 519.214.9

ДВЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛАГАЕМЫХ

А. В. Нагаев, С. С. Ходжабагян

§ 1. Постановка задачи и результаты

Пусть $\xi_j, j=1, 2, \ldots$, независимые случайные величины. При этом

$$M\xi_j=0,\ D\xi_j=\sigma_j^2,\ P\ \{\xi_j<x\}=F_j(x). \tag{1}$$

Образуем суммы

$$\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$$

и пусть

$$P_n(x)=P\ \{\zeta_n\geqslant x\}. \tag{2}$$

Положим далее

$$B_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2. \tag{3}$$

Если выполнено условие Линдеберга: для любого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|u|\geqslant\varepsilon B_n}u^2\,dF_j(u)=o(1), \tag{L}$$

то при $x\asymp B_n$

$$P_n(x)=\left(1-\Phi\left(\frac{x}{B_n}\right)\right)\left(1+o(1)\right).$$

Рассмотрим поведение вероятности (2) в том случае, когда $\frac{x}{B_n}\to\infty$, иными словами, нас интересует проблема больших уклонений. При этом приходится накладывать довольно жесткие ограничения на последовательность распределений (1). В предлагаемой работе считается выполненным следующее условие: при $x\to\infty$

$$P_1^{(j)}(x)=P\ \{\xi_j\geqslant x\}=x^{-\alpha_j}\left(1+\varepsilon_j(x)\right),\qquad \alpha_j>2, \tag{4}$$

где равномерно по j

$$|\varepsilon_j(x)|\leqslant\varepsilon_0(x),$$

причем $\varepsilon_0(x)\to 0$, когда $x\to\infty$.

Верны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (L) *и* (4). *Тогда*

$$P_n(x)=\sum_{j=1}^{n}P_1^{(j)}(x)\quad\left(1+o(1)\right)$$

для значений x, *удовлетворяющих неравенству*

$$x \geqslant \max(n^{\delta},\ B_n^{1+\delta_1}),$$

где δ, δ_1 *– произвольно малые положительные постоянные.*

Теорема 2. *Если выполнены условия* (L) *и* (4), *причем в условии* (4) $\alpha_j \geqslant \alpha_0 > 2$, *то*

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} P_1^{(j)}(x)\left(1+o(1)\right)$$

для значений x, *удовлетворяющих неравенству*

$$x \geqslant \max(n^{\delta},\ B_n \ln B_n),$$

где δ *имеет тот же смысл, что и в теореме* 1.

Нелишне сразу же заметить, что в силу условий (L) и (4)

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|u|\geqslant \varepsilon B_n} u^2\,dF_j(u) \geqslant \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{u>\varepsilon B_n} u^2\,dF_j(u) \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} P_1^{(j)}(\varepsilon B_n) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} P_1^{(j)}(x).$$

Следовательно, при $x \geqslant B_n$

$$\sum_{j=1}^{n} P_1^{(j)}(x) = o(1). \tag{5}$$

Перейдем к доказательству теорем 1 и 2. Обе сформулированные теоремы доказываются при помощи прямых вероятностных рассуждений. Следует также отметить, что приведенные результаты являются частичным перенесением на случай неодинаково распределенных слагаемых результатов работы [1] (см. также работы [2] и [3]).

§ 2. Некоторые вспомогательные утверждения

Легко видеть, что

$$P\{\zeta_n \geqslant x\} = P\left\{\zeta_n \geqslant x;\ \xi_i < \frac{x}{\ln x},\ i \in I_n\right\} +$$

$$+P\left\{\zeta_n \geqslant x;\ \bigcup_{i \notin I_n}\left\{\xi_i \geqslant \frac{x}{\ln x}\right\}\right\}, \tag{6}$$

где $I_n = \{i : \alpha_i > \alpha_1 + C\}$.

Используя условие (4), для всех достаточно больших значений x имеем

$$P\left\{\zeta_n \geqslant x;\ \bigcup_{i \notin I_n}\left\{\xi_i \geqslant \frac{x}{\ln x}\right\}\right\} \leqslant \sum_{i \notin I_n} P\left\{\xi_i \geqslant \frac{x}{\ln x}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i \notin I_n}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\alpha_i} \leqslant 2n\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\alpha_1 + C}.$$

Выберем C настолько большим, чтобы $\frac{1}{C-1}<\delta$. Тогда при $x\geqslant n^{\delta}$ получим

$$P\left\{\zeta_n\geqslant x;\ \bigcup_{i\notin I_n}\left\{\xi_i\geqslant\frac{x}{\ln x}\right\}\right\}=o(x^{-\alpha_1}). \tag{7}$$

Вместо представления (6) теперь можно написать следующее:

$$P\{\zeta_n\geqslant x\}=P\left\{\zeta_n\geqslant x;\ \xi_i<\frac{x}{\ln x},\ i\in I_n\right\}+o(x^{-\alpha_1}). \tag{8}$$

Запишем тождество

$$\begin{aligned}
&P\left\{\zeta_n\geqslant x;\ \xi_i<\frac{x}{\ln x},\ i\in I_n\right\}=\\
&=P\left\{\zeta_n\geqslant x;\ \xi_i<\frac{x}{\ln x},\ i\in I_n;\ \xi_i<\gamma x,\ i\notin I_n\right\}+\\
&+\sum_{j\notin I_n}P\left\{\zeta_n\geqslant x;\ \xi_i<\frac{x}{\ln x},\ i\in I_n;\ \xi_i<\gamma x,\ i\notin I_n,\ i\neq j;\ \xi_j\geqslant\gamma x\right\}+\\
&+P\left\{\zeta_n\geqslant x;\ \xi_i<\frac{x}{\ln x},\ i\in I_n;\ \bigcup_{\substack{i,\,j\notin I_n\\ i\neq j}}\{\xi_i\geqslant\gamma x;\ \xi_j\geqslant\gamma x\}\right\}=\\
&=P_{n0}(x)+\sum_{j\notin I_n}P_{n1}^{(j)}(x)+P_{n2}(x).
\end{aligned} \tag{9}$$

Смысл принятых обозначений очевиден.

Будем последовательно оценивать вероятности $P_{n1}^{(j)}(x)$, $P_{n0}(x)$ и $P_{n2}(x)$. Оценка последней вероятности очень проста:

$$\begin{aligned}
&P_{n2}(x)\leqslant\sum_{\substack{i,\,j\notin I_n\\ i\neq j}}P\{\xi_i\geqslant\gamma x;\ \xi_j\geqslant\gamma x\}\leqslant\Big(\sum_{i\notin I_n}P_1^{(i)}(\gamma x)\Big)^2\leqslant\\
&\leqslant 4\gamma^{-2(\alpha_1+C)}\Big(\sum_{i\notin I_n}P_1^{(i)}(x)\Big)^2=O\left(\Big(\sum_{i\notin I_n}P_1^{(i)}(x)\Big)^2\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Оценке $P_{n1}^{(j)}(x)$ посвящена следующая лемма.

Лемма 1. В условиях теорем 1 и 2 при $x\geqslant B_n\ln B_n$ справедливо следующее соотношение:

$$P_{n1}^{(j)}(x)=P_1^{(j)}(x)\left(1+\delta_n^{(j)}(x)\right),$$

где

$$|\delta_n^{(j)}(x)|\leqslant\delta_n=o(1),\qquad j\notin I_n.$$

Доказательство. Пусть независимые в совокупности случайные величины $\bar{\xi}_i$, $i\in I_n$, $\hat{\xi}_i\in I_n$ имеют следующие законы распределения:

$$\left.\begin{aligned}
&P\{\bar{\xi}_i<u\}=P\left\{\xi_i<u/\xi_i<\frac{x}{\ln x}\right\},\\
&P\{\hat{\xi}_i<u\}=P\{\xi_i<u/\xi_i<\gamma x\}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Поскольку при $x\geqslant B_n\ln B_n$ и всех достаточно больших значениях n

$$\int_{\gamma x}^{\infty}dF_i(u)\leqslant\frac{1}{(\gamma x)^2}\int_{\gamma x}^{\infty}u^2\,dF_i(u)\leqslant\frac{1}{B_n^2}\int_{|u|\geqslant\varepsilon B_n}u^2\,dF_i(u), \tag{12}$$

то в силу условия (L) получаем

$$\int_{\gamma x}^{\infty} dF_i(u) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Из неравенств (12) и (13) следует, что

$$|M\hat{\xi}_i| \leqslant \frac{2}{\gamma x} \int_{\gamma x}^{\infty} u^2\, dF_i(u) \leqslant \frac{1}{B_n} \int_{|u| \geqslant \varepsilon B_n} u^2\, dF_i(u), \tag{14}$$

а

$$|\sigma_i^2 - D\hat{\xi}_i| \leqslant \sigma_i^2 \left| 1 - \frac{1}{F_i(\gamma x)} \right| + 2 \int_{\gamma x}^{\infty} u^2\, dF_i(u) +$$

$$+ \frac{4}{\gamma^2 x^2} \left(\int_{\gamma x}^{\infty} u^2\, dF_i(u) \right)^2 \leqslant 2 \int_{|u| \geqslant \varepsilon B_n} u^2\, dF_i(u) (1 + 2B_n^{-2} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sigma_i^2). \tag{15}$$

Поскольку

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sigma_i^2 = o(B_n^2),$$

то из неравенств (14), (15) и условия (L) следует, что

$$\sum_{i \notin I_n} |M\hat{\xi}_i| = o(B_n), \quad \sum_{i \notin I_n} |\sigma_i^2 - D\hat{\xi}_i| = o(B_n^2). \tag{16}$$

Вполне аналогично устанавливаем, что

$$\sum_{i \in I_n} |M\bar{\xi}_i| = o(B_n), \quad \sum_{i \in I_n} |\sigma_i^2 - D\bar{\xi}_i| = o(B_n^2). \tag{17}$$

Из соотношений (16) и (17) получаем

$$\sum_{i \in I_n} |M\bar{\xi}_i| + \sum_{i \notin I_n} |M\hat{\xi}_i| = o(B_n), \tag{18}$$

а

$$\sum_{i \in I_n} D\bar{\xi}_i + \sum_{i \notin I_n} D\hat{\xi}_i = B_n^2 \Big(1 + o(1)\Big). \tag{19}$$

Еще проще устанавливаем, что

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{i \in I_n} P\left\{\xi_i < \frac{x}{\ln x}\right\} = 1 + o(1), \\ &\prod_{i \notin I_n} P\{\xi_i < \gamma x\} = 1 + o(1). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

С помощью соотношений (20) находим

$$P_{n1}^{(j)}(x) = \prod_{i \in I_n} P\left\{\xi_i < \frac{x}{\ln x}\right\} \prod_{i \notin I_n} P\{\xi_i < \gamma x\} P\{\zeta_{n-1}^{(j)} + \xi_j \geqslant x;$$

$$\xi_j \geqslant \gamma x / \xi_i < \frac{x}{\ln x},\ i \in I_n;\ \xi_i < \gamma x,\ i \notin I_n,\ i \neq j\} =$$

$$= P\{\tilde{\zeta}_{n-1}^{(j)} + \xi_j \geqslant x;\ \xi_j \geqslant \gamma x\} \Big(1 + o(1)\Big), \tag{21}$$

где

$$\tilde{\zeta}_{n-1}^{(j)}=\sum_{i\in I_n}\tilde{\xi}_i+\sum_{\substack{i\notin I_n\\ i\neq j}}\hat{\xi}_i.$$

Поскольку $\left(\text{см. (15)}\right)$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} D\hat{\xi}_i=o\,(B_n^2),$$

то с помощью соотношений (18) и (19) устанавливаем, что

$$M\tilde{\zeta}_{n-1}=o\,(B_n),\quad D\tilde{\zeta}_{n-1}=B_n^2\left(1+o\,(1)\right). \tag{22}$$

Далее

$$P\,\{\tilde{\zeta}_{n-1}+\xi_j\geqslant x,\ \xi_j\geqslant\gamma x\}=P\,\{\xi_j\geqslant\gamma x\}\,P\,\{\tilde{\zeta}_{n-1}\geqslant(1-\gamma)\,x\}+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{(1-\gamma)\,x}P\,\{\xi_j\geqslant x-u\}\,dP\,\{\tilde{\zeta}_{n-1}^{(j)}<u\}. \tag{23}$$

Поскольку $j\notin I_n$, то из условия (4) имеем

$$P\,\{\xi_j\geqslant\gamma x\}\asymp P\,\{\xi_j\geqslant x\}.$$

Поэтому при $x\geqslant B_n\ln B_n$ с помощью соотношений (22) получаем

$$P\,\{\xi_j\geqslant\gamma x\}\,P\,\{\tilde{\zeta}_{n-1}^{(j)}\geqslant(1-\gamma)\,x\}=O\left(P_1^{(j)}(x)\,\frac{B_n^2}{x^2}\right)=o\left(P_1^{(j)}(x)\right). \tag{24}$$

Запишем следующее представление:

$$\int\limits_{-\infty}^{(1-\gamma)\,x}P\,\{\xi_j\geqslant x-u\}\,dP\,\{\tilde{\zeta}_{n-1}^{(j)}<u\}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{-\rho B_n}+\int\limits_{|u|\leqslant\rho B_n}+\int\limits_{\rho B_n}^{(1-\gamma)\,x}=I_1+I_2+I_3, \tag{25}$$

где $\rho\to\infty$ произвольным образом.

Подобно оценке (24) находим

$$\left.\begin{aligned}&I_1\leqslant P\,\{\xi_j\geqslant x\}\,P\,\{\tilde{\zeta}_{n-1}^{(j)}<-\rho B_n\}=o\left(P_1^{(j)}(x)\right),\\&I_3\leqslant P\,\{\xi_j\geqslant\gamma x\}\,P\,\{\tilde{\zeta}_{n-1}\geqslant\rho B_n\}=o\left(P_1^{(j)}(x)\right).\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Из условия (4) следует, что

$$I_2=P_1^{(j)}(x)\int\limits_{|u|<\rho B_n}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\alpha_j}dP\,\{\tilde{\zeta}_{n-1}^{(j)}<u\}\left(1+o\,(1)\right).$$

Выберем $\rho\to\infty$ таким образом, чтобы

$$\rho B_n=o\,(x).$$

Поскольку $j\notin I_n$, то при $|u|<\rho B_n$

$$\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\alpha_j}=1+o\,(1),$$

т.е. $\Big($см. (22)$\Big)$

$$I_2=P_1^{(j)}(x)P\{|\zeta_{n-1}^{(j)}|<\rho B_n\}\Big(1+o(1)\Big)=P_1^{(j)}(x)\Big(1+o(1)\Big). \tag{27}$$

Представления (21), (23), (25) и оценки (24), (26), (27) приводят к утверждению леммы. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Положим*

$$s=(\alpha_1+C)\frac{\ln x}{x}$$

и пусть

$$0<\gamma<\frac{\alpha_0-2}{\alpha_1+C}.$$

В условиях теоремы 2 справедливо следующее утверждение:

$$\int_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} u^2 e^{su}\,dF_j(u)=o(1), \tag{28}$$

равномерно по j, $j\notin I_n$.

Доказательство. Интегрируя по частям (28), находим

$$\int_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} u^2 e^{su}\,dF_j(u)=\int_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x}(2u+su^2)P_1^{(j)}(u)e^{su}\,du-$$

$$-P_1^{(j)}(\gamma x)\gamma^2x^2e^{s\gamma x}+P_1^{(j)}\left(\frac{x}{\ln x}\right)\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2e^{\alpha_1+C}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x}(2u+su^2)P_1^{(j)}(u)e^{su}\,du+P_1^{(j)}\left(\frac{x}{\ln x}\right)\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2e^{\alpha_1+C}. \tag{29}$$

Поскольку $\alpha_j\geqslant\alpha_0>2$, то в силу условия (4) получаем

$$P_1^{(j)}\left(\frac{x}{\ln x}\right)\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2\leqslant 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\alpha_0-2}. \tag{30}$$

Поскольку функция $u^{1-\alpha_j}e^{su}$ при нашем выборе s монотонно растет в промежутке $\left(\frac{x}{\ln x},\ \gamma x\right)$, то

$$\int_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} uP_1^{(j)}(u)e^{su}\,du\leqslant 2(\gamma x)^{2-\alpha_j}e^{\gamma sx}=$$

$$=2\gamma^{2-\alpha_j}x^{\gamma(\alpha_1+C)+2-\alpha_j}\leqslant 2\gamma^{2-\alpha_1-C}x^{\gamma(\alpha_1+C)+2-\alpha_0}. \tag{31}$$

Аналогично получаем

$$s\int_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} u^2P_1^{(j)}(u)e^{su}\,du=O(\ln x\cdot x^{\gamma(\alpha_1+C)+2-\alpha_0}). \tag{32}$$

Из оценок (29)–(32) следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Положим*

$$s=(\alpha_1+C)\frac{\ln x}{x}$$

и пусть $0<\gamma<\frac{\delta_2}{\alpha_1+C}$, *где* $\delta_2>0$ *произвольно малое число. В условиях теоремы 1 справедливо следующее утверждение*:

$$\int\limits_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} e^{su}\,dF_j(u)=o(\sigma_j^2\,x^{-2+\delta_2})$$

равномерно по j, $1\leqslant j\leqslant n$.

Доказательство. Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} e^{su}\,dF_j(u)=s\int\limits_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} e^{su}P_1^{(j)}(u)\,du-$$

$$-P_1^{(j)}(\gamma x)\,e^{s\gamma x}+P_1^{(j)}\left(\frac{x}{\ln x}\right)e^{\frac{sx}{\ln x}}. \tag{33}$$

Пользуясь неравенством Чебышева, устанавливаем, что

$$s\int\limits_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} e^{su}P_1^{(j)}(u)\,du\leqslant\sigma_j^2\,s\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\int\limits_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} e^{su}\,du=O\left(\sigma_j^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 e^{s\gamma x}\right).$$

В силу выбора s и γ имеем

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 e^{s\gamma x}=(\ln x)^2\,x^{\gamma(\alpha_1+C)-2}=o\,(x^{-2+\delta_2}).$$

Таким образом, получаем

$$s\int\limits_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} e^{su}P_1^{(j)}(u)\,du=o\,(\sigma_j^2\,x^{-2+\delta_2}), \tag{34}$$

равномерно по j.

Далее

$$\left.\begin{aligned}
&P_1^{(j)}(\gamma x)\,e^{s\gamma x}=O\,(\sigma_j^2\,x^{\gamma(\alpha_1+C)-2})=o\,(\sigma_j^2\,x^{-2+\delta_2})\\
&P_1^{(j)}\left(\frac{x}{\ln x}\right)e^{\frac{sx}{\ln x}}=O\left(\sigma_j^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)=o\,(\sigma_j^2\,x^{-2+\delta_2})
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

равномерно по j.

Утверждение леммы немедленно следует из соотношений (33)—(35). Лемма доказана.

Лемма 4. *В условиях теоремы 2 при* $x\geqslant B_n\ln B_n$

$$P_{n0}(x)=O\,(x^{-(\alpha_1+C)}).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любой случайной величины η, для которой при некотором $s>0$

$$Me^{s\eta}<\infty,$$

выполняется неравенство чебышевского типа

$$P\,\{\eta\geqslant x\}\leqslant f(s)\,e^{-sx}.$$

Пользуясь этим неравенством и определением вероятности $P_{n0}(x)$ $\Big($см. представление (9)$\Big)$, находим

$$P_{n0}(x) \leqslant e^{-sx} \prod_{i \in I_n} f_{i_1}(s) \prod_{i \notin I_n} f_{i_2}(s), \tag{36}$$

где

$$f_{i_1}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{\ln x}} e^{su}\, dF_i(u), \quad f_{i_2}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\gamma x} e^{su}\, dF_i(u). \tag{37}$$

Положим

$$s = (\alpha_1 + C)\, \frac{\ln x}{x}\,.$$

С помощью оценок

$$\int\limits_{\frac{x}{\ln x}}^{\infty} u^j\, dF_i(u) \leqslant \sigma_i^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{2-j} = \frac{\sigma_i^2 s^{2-j}}{(\alpha_1 + C)^{2-j}}, \qquad j = 0,\ 1,$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{s}} |u|^j e^{su}\, dF_i(u) \leqslant \sigma_i^2 s^{2-j}, \qquad j = 0,\ 1,$$

находим

$$f_{i_1}(s) = 1 + \Theta_i \sigma_i^2 s^2, \tag{38}$$

где $|\Theta| \leqslant \Theta_0$ равномерно по i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Далее, используя лемму 2, получаем

$$\int\limits_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} e^{su}\, dF_i(u) \leqslant \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \int\limits_{\frac{x}{\ln x}}^{\gamma x} u^2 e^{su}\, dF_i(u) = o(s^2) \tag{39}$$

равномерно по i, $i \notin I_n$.

Поскольку при $i \notin I_n$ и достаточно большом X $\Big($см. (4)$\Big)$

$$\sigma_i^2 \geqslant \int\limits_{X}^{\infty} u^2\, dF_i(u) \geqslant X^2 P_1^{(i)}(X) \geqslant X^{2-\alpha_1-C}\Big(1 - \sup_{x \geqslant X} \varepsilon(x)\Big);$$

то из соотношений (37)—(39) следует, что

$$f_{i_2}(s) = 1 + 2\,\Theta_i \sigma_i^2 s^2, \tag{40}$$

где $|\Theta_i| \leqslant \Theta_0$ равномерно по i, $i \notin I_n$.

Возвращаясь к неравенству (36), из представлений (38) и (40) получаем

$$P_{n0}(x) \leqslant \exp\,\{-sx + 2\Theta_0 B_n^2 s^2\}. \tag{41}$$

Если $x \geqslant B_n \ln B_n$, то в силу выбора s из последнего неравенства получаем утверждение леммы 4.

Лемма 5. В условиях теоремы 1 при $x \geqslant B_n^{1+\delta_1}$

$$P_{n0}(x) = O\left(x^{-(\alpha_1 + C)}\right).$$

Доказательство. Пусть величины s, $f_{i_1}(s)$, $f_{i_2}(s)$ имеют тот же смысл, что и при доказательстве леммы 4. Оценки (36) и (38) по-прежнему сохраняют силу. Вместо оценки (40), благодаря лемме 3, получаем

$$f_{i_2}(s)=1+\Theta_i\sigma_i^2x^{-2+\delta_2},\quad |\Theta_i|\leqslant\Theta_0,\qquad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{42}$$

Тогда вместо неравенства (41) имеем

$$P_{n0}(x)\leqslant\exp\{-sx+\Theta_0B_n^2x^{-2+\delta_2}\}.$$

В силу выбора s при $x\geqslant B_n^{\frac{2}{2-\delta_2}}$ из последнего неравенства получаем

$$P_{n0}(x)=O(x^{-(\alpha_1+C)}).$$

Полагая $1+\delta_1=\frac{2}{2-\delta_2}$, приходим к утверждению леммы 5.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Чтобы доказать теорему 1, необходимо собрать воедино представления (8) и (9), оценки (5) и (10), а также утверждения лемм 1 и 5.

Для доказательства теоремы 2 следует сослаться на представления (8) и (9), оценки (5) и (10) и утверждения лемм 1 и 4.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук Узбекской ССР

Поступило в редакцию
2.IV.1970

Литература

1. А. В. Нагаев, Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера, Изв. АН УзССР, 6 (1969), 17–22.
2. Ю. В. Линник, On the probability of large deviations for the sums of independent variables, Proc. of the IVth Berkeley Symp., 1960.
3. С. В. Нагаев, Интегральная предельная теорема для больших уклонений, Изв. АН УзССР, 6 (1962), 37–43.

PORA RIBINIŲ TEOREMŲ NEVIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ DYDŽIŲ SUMOMS

A. V. Nagajevas, S. S. Chodžabagianas

(*Reziumė*)

Straipsnyje įrodytos dvi ribinės teoremos nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumoms, kai dėmenys ξ_j tenkina Lindebergo sąlygą ir $P\{\xi_j\geqslant x\}$ gęsta kaip laipsninės funkcijos su rodikliais, didesniais už 2.

TWO LIMIT THEOREMS FOR NON-IDENTICALLY DISTRIBUTED SUMMANDS

A. V. Nagayev, S. S. Hodjabagian

(*Summary*)

Let ξ_j, $j=1, 2\ldots$ be independent random variables with zero mean variance σ_j^2 and $P\{\xi_j<<x\}=F_j(x)$. Let $P_n(x)=P\{\zeta_n\geqslant x\}$, where

$$\zeta_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j,\quad B_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2$$

Let the Lindeberg's condition (L) and the condition

$$P_1^{(j)}(x)=P\{\xi_j \geqslant x\}=x^{-\alpha_j}\left(1+\varepsilon_j(x)\right),\ \alpha_j \geqslant 2, \tag{1}$$

where $|\varepsilon_j(x)| \leqslant \varepsilon_0(x)$ and $\varepsilon_0(x) \to 0$ if $x \to \infty$, be satisfied.

Then the following two theorems hold.

Theorem 1. If (L), (1), then

$$P_n(x)=\sum_{j=1}^{n} P_1^{(j)}(x)\left(1+o(1)\right)$$

for $x \geqslant \max(n^{\delta}, B_n^{1+\delta_1})$, where $\delta>0$ and $\delta_1>0$ arbitrary small constants.

Theorem 2. If (L) ,(1) with $\alpha_j \geqslant \alpha_0 > 2$, then

$$P_n(x)=\sum_{j=1}^{n} P_1^{(j)}(x)\left(1+o(1)\right)$$

for $x \geqslant \max(n^{\delta}, B_n \ln B_n)$ where $\delta>0$ arbitrary small constants.