1972

УДК 511.3

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ АРИФМЕТИЧЕСКИХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

З. Юшкис

Функция $g(m)$, определенная на множестве целых положительных чисел и принимающая вещественные или комплексные значения, называется мультипликативной, если для любой пары взаимно простых m, n

$$g(mn)=g(m)\,g(n) \quad \text{и} \quad g(1)=1.$$

Через $\frac{1}{n}N\ \{m\leqslant n,\ \ldots\}$ обозначим частоту целых положительных $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям, которые каждый раз будут указываться в скобках вместо многоточия.

А. Бакштису [1] удалось найти весьма широкие условия, при которых функции распределения

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\ N\{m\leqslant n, g(m)<x\}, \tag{1}$$

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\ N\{m\leqslant n,\ (e^{-A(n)}|g(m)|)^{\frac{1}{B(n)}}\ \operatorname{sgn} g(m)<x\}, \tag{2}$$

где $A(n)$ и $B(n)$ – нормирующие показатели, а $g(m)$ – вещественная мультипликативная функция, сходятся к некоторой функции распределения $F(x)$ в каждой точке непрерывности последней, а также $F_n(0)\to F(0)$ и $F_n(+0)\to F(+0)$. В статье Й. Кубилюса и З. Юшкиса [4] оценивается быстрота сходимости законов распределения (2) к предельному закону некоторых классов мультипликативных функций. Аналогичными вопросами функций распределения (1) занимался А. Лауринчикас в своей дипломной работе. Настоящая статья посвящена оценке разности $F_n(x)-F(x)$, где $F_n(x)$ – функции распределения, определенные в [1].

Здесь, как и в [4], используем преобразования Меллина и теорию распределения значений произведений независимых случайных величин, изложенную в статье В.М. Золотарева [3]. Для любой функции распределения $F(x)$ положим

$$w_{kF}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}{}' |x|^{it}\operatorname{sgn}^k x\,dF(x) \quad (k=0,\ 1),$$

где штрих указывает, что точка $x=0$ исключается из области интегрирования. Функции $w_{kF}(t)$ определены для всех вещественных t. Их называют характеристическими преобразованиями. Положим далее

$$\left.\begin{aligned} \beta_{0F} &= 1-F(+0)=\frac{1}{2}\left(w_{0F}(0)+w_{1F}(0)\right), \\ \beta_{1F} &= F(0)=\frac{1}{2}\left(w_{0F}(0)-w_{1F}(0)\right), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} F_0(x) &= \frac{F(e^x)-F(+0)}{\beta_{0F}}, \quad \text{если} \quad \beta_{0F}\neq 0, \\ F_1(x) &= \frac{F(0)-F(-e^x+0)}{\beta_{1F}}, \quad \text{если} \quad \beta_{1F}\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$F_0(x)$ и $F_1(x)$ являются, очевидно, функциями распределения. Если $f_0(t)$ и $f_1(t)$ — характеристические функции, соответствующие $F_0(x)$ и $F_1(x)$, то

$$w_{kF}(t)=\beta_{0F}f_0(t)+(-1)^k\beta_{1F}f_1(t) \quad (k=0,\ 1). \tag{5}$$

Эта формула справедлива и в том случае, когда какой-либо из β_{kF} или оба равны 0, если условиться, что соответствующие члены в правой части равны 0.

В дальнейшем воспользуемся следующими обозначениями: c_1, c_2, ... — соответственно подобранные положительные постоянные, зависящие лишь от функции $g(m)$, B — число, не всегда одно и то же, ограниченное по модулю константой, которая зависит лишь от $g(m)$, если не оговорено другое.

Известно (см. [1], [4]), что пара характеристических преобразований однозначно определяет функцию распределения и по близости характеристических преобразований можно судить о близости функций распределения. Для оценки разности между функциями распределения понадобится аналог хорошо известного неравенства Эссеена. Среди различных обобщений этого неравенства наиболее общие результаты принадлежат А. С. Файнлейбу и В. В. Петрову. Мы дадим аналог неравенства Эссеена в форме А. С. Файнлейба [5].

Лемма 1. *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения,*

$$L_0=\sup_{0<x<\infty}|F(x)-G(x)|,$$

$$L_1=\sup_{-\infty<x\leqslant 0}|F(x)-G(x)|.$$

Тогда для любого $T>0$ и $k=0$, 1

$$L_k\leqslant|\beta_{kF}-\beta_{kG}|+R_{kFG},$$

где

$$R_{kFG}=\begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad \beta_{kF}\beta_{kG}=0, \\ c_1\dfrac{\beta_{kF}}{\beta_{kG}}\sup\limits_{t\geqslant T}\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t|W_{kG}(u)|\,du+ \\ \quad +c_2\beta_{kF}\displaystyle\int_0^T|W_{kFG}(t)|\,\frac{dt}{t}, \quad \text{если} \quad \beta_{kF}\beta_{kG}\neq 0, \end{cases}$$

$$W_{kG}(u)=w_{0G}(u)+(-1)^k w_{1G}(u),$$

$$W_{kFG}(t)=\frac{w_{0F}(t)+(-1)^k w_{1F}(t)}{\beta_{kF}}-\frac{w_{0G}(t)+(-1)^k w_{1G}(t)}{\beta_{kG}}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\beta_{kF}\beta_{kG}\neq 0$. Повторяя рассуждения доказательства леммы 1 работы [4], имеем, что

$$L_k \leqslant |\beta_{kF}-\beta_{kG}|+\beta_{kF}\sup_{-\infty<y<\infty}|F_k(y)-G_k(y)|,$$

где F_k, G_k — функции распределения, определенные формулами (4). Применение неравенства Эссеена в форме А. С. Файнлейба [5] (см. следствие 2 теоремы 1) дает, что для любого $T>0$

$$L_k \leqslant |\beta_{kF}-\beta_{kG}|+$$
$$+2c_1\beta_{kF}\sup_{t\geqslant T}\frac{1}{t}\int_0^t |g_k(u)|\,du+2c_2\beta_{kF}\int_0^T |f_k(t)-g_k(t)|\,\frac{dt}{t}.$$

Здесь f_k и g_k — характеристические функции, соответствующие F_k и G_k. Остается, воспользовавшись (5), выразить $f_k(t)$ и $g_k(t)$ через характеристические преобразования.

Случай, когда хотя бы одно из β_{kF}, β_{kG} равно нулю, исследован в работе [4].

Для оценки близости характеристических преобразований используем некоторые асимптотические формулы средних значений мультипликативных функций.

Пусть f и g — арифметические функции. Мы можем ввести алгебраическую операцию-свертку $f{*}g$ (произведение Дирихле), которая определяется следующим образом:

$$f*g=\sum_{kl=m} f(k)g(l). \tag{6}$$

Если $e=e(m)$ — единичная функция, т.е.

$$e(m)=\begin{cases}1, & \text{если } m=1,\\ 0, & \text{если } m\neq 1,\end{cases}$$

то будем говорить, что f^{-1} является функцией, обратной f, если $f*f^{-1}=e$ Легко видеть, что обратимы те и только те функции, для которых $f(1)\neq 0$.

Легко проверить, что множество всех арифметических мультипликативных функций составляет абелеву группу относительно введенной выше операции-свертки. Кроме того, мультипликативные функции вполне определяются заданием их значений для целых положительных степеней простых чисел p^α.

Если f и g — мультипликативные функции и $h=f*g$, то формула (6) эквивалентна системе равенств

$$h(p^\alpha)=\sum_{\beta=0}^{\alpha} f(p^\beta)\,g(p^{\alpha-\beta}), \tag{7}$$

где p — простые числа, $\alpha=1, 2, \ldots$.

В дальнейшем будем считать, что $0^{it}=0$ для всех t, $\operatorname{sgn}^k x=0$ при $x=0$, $k=0$.

Лемма 2. *Пусть $g(m)$ — вещественная мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям:* 1) *ряд по простым p*

$$\sum_{g(p)>0} \frac{|\ln g(p)|}{p}$$

сходится, 2) *существует такое положительное постоянное c, что ряд*

$$\sum_{g(p)\leqslant 0} \frac{1}{p^{1-c}}$$

сходится (число слагаемых во второй сумме может быть и конечным). Тогда, если y — вещественное число, $3\ln\ln n \leqslant \ln y \leqslant c_3 \ln n$, где c_3 — достаточно малое постоянное, то характеристические преобразования функции распределения

$$F_n(x) = \frac{1}{n} N\{m \leqslant n, \quad g(m) < x\}$$

равны

$$w_{kF_n}(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} |g(m)|^{it} \operatorname{sgn}^k g(m) = w_{kF}(t) +$$

$$+ B \ln^2 y \left\{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\ln n}{\ln y} \ln \frac{\ln n}{\ln y}\right) + y^{-c}\right\} + B|t| \sum_{\substack{p>y \\ g(p)>0}} \frac{|\ln g(p)|}{p}$$

равномерно по t, где

$$w_{kF}(t) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|^{it} \operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right).$$

Доказательство. Введем мультипликативную функцию $g_y(m)$, которую определим следующими условиями:

$$g_y(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p > y, \quad \alpha = 1, \\ g(p^\alpha) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{8}$$

Для краткости обозначим $g_k(m) = |g(m)|^{it} \operatorname{sgn}^k g(m)$, $g_{ky}(m) = |g_y(m)|^{it} \times \operatorname{sgn}^k g(m)$ $(k=0, 1)$. Пусть μ — функция Мёбиуса, $h_{ky} = \mu * g_{ky}$. Если $1 = 1(m)$ — функция, тождественно равная единице, то $\mu * 1 = e$, или $g_{ky} = h_{ky} * 1$. Очевидно, что все введенные выше функции мультипликативные. Из (6) следует, что

$$\sum_{m\leqslant n} g_{ky}(m) = \sum_{m\leqslant n} \sum_{d\mid m} h_{ky}(d).$$

Меняя порядок суммирования, получаем:

$$\sum_{m\leqslant n} g_{ky}(m) = \sum_{d\leqslant n} h_{ky}(d) \sum_{\substack{m\leqslant n \\ m\equiv 0 \bmod d}} 1 =$$

$$= n \sum_{d\leqslant n} \frac{h_{ky}(d)}{d} + B \sum_{d\leqslant n} |h_{ky}(d)|. \tag{9}$$

Согласно (7)

$$h_{ky}(p^\alpha) = g_{ky}(p^\alpha) - g_{ky}(p^{\alpha-1}). \tag{10}$$

Введем еще две мультипликативные функции $r_{ky}(m)$ и $s_{ky}(m)$, которые для натуральных степеней простых чисел p^α определим следующим образом:

$$r_{ky}(p^\alpha)=\begin{cases} h_{ky}(p^\alpha), & \text{если } p\leqslant y,\\ 0, & \text{если } p>y,\end{cases}$$

$$s_{ky}(p^\alpha)=\begin{cases} 0, & \text{если } p\leqslant y,\\ h_{ky}(p^\alpha), & \text{если } p>y.\end{cases}$$

Используя (7), можно проверить, что $h_{ky}=r_{ky}*s_{ky}$, а ввиду (10) и (8)

$$r_{ky}(p^\alpha)=\begin{cases} g_k(p^\alpha)-g_k(p^{\alpha-1}), & \text{если } p\leqslant y,\\ 0, & \text{если } p>y,\end{cases} \tag{11}$$

$$s_{ky}(p^\alpha)=\begin{cases} g_k(p^\alpha)-g_k(p^{\alpha-1}), & \text{если } p>y,\ \alpha=2,\ 3,\ \ldots,\\ -1, & \text{если } p>y,\ \alpha=1,\ g(p)=0,\\ (-1)^k-1, & \text{если } p>y,\ \alpha=1,\ g(p)<0,\\ 0 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases} \tag{12}$$

Согласно (6) формула (9) принимает вид:

$$\sum_{m\leqslant n} g_{ky}(m)=n\sum_{d\leqslant n}\frac{1}{d}\sum_{l\mid d} r_{ky}(l)\,s_{ky}\left(\frac{d}{l}\right)+B\sum_{d\leqslant n}\left|\sum_{l\mid d} r_{ky}(l)\,s_{ky}\left(\frac{d}{l}\right)\right|=$$
$$=n\sum_{l\leqslant n}\frac{r_{ky}(l)}{l}\sum_{m\leqslant \frac{n}{l}}\frac{s_{ky}(m)}{m}+B\sum_{l\leqslant n}\left|r_{ky}(l)\right|\sum_{m\leqslant\frac{n}{l}}\left|s_{ky}(m)\right|. \tag{13}$$

Далее

$$\sum_{m\leqslant u}\frac{s_{ky}(m)}{m}=1+\sum_{1<m\leqslant u}\frac{s_{ky}(m)}{m}=1+B\left|\sum_{m\leqslant u}\frac{|s_{ky}(m)|}{m}-1\right|.$$

Из (12) и условий леммы следует, что

$$\sum_{m\leqslant u}\frac{s_{ky}(m)}{m}=1+B\left\{\prod_{p>y}\left(1-\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|s_{ky}(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)-1\right\}=$$
$$=1+B\left\{\exp\sum_{p>y}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|s_{ky}(p^\alpha)|}{p^\alpha}-1\right\}=$$
$$=1+B\left\{\exp 2\left(\sum_{\substack{p>y\\ g(p)\leqslant 0}}\frac{1}{p}+\sum_{p>y}\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}\right)-1\right\}=$$
$$=1+\frac{B}{y^c}+\frac{B}{y\ln y}=1+By^{-c}$$

при $c<1$.

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $c\leqslant\frac{1}{3}$. Тогда

$$\sum_{m\leqslant u}|s_{ky}(m)|\leqslant u^{1-c}\sum_{m\leqslant u}\frac{|s_{ky}(m)|}{m^{1-c}}\leqslant u^{1-c}\prod_{p\leqslant u}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|s_{ky}(p^\alpha)|}{p^{(1-c)\alpha}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant u^{1-c}\exp 2\left(\sum_{\substack{p>y\\ g(p)\leqslant 0}}\frac{1}{p^{1-c}}+\sum_{p}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{p^{(1-c)\alpha}}\right)=Bu^{1-c},$$

и равенство (13) превращается в

$$\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} g_{ky}(m)=\sum_{l\leqslant n}\frac{r_{ky}(l)}{l}+By^{-c}\sum_{l\leqslant n}\frac{|r_{ky}(l)|}{l}+Bn^{-c}\sum_{l\leqslant n}\frac{|r_{ky}(l)|}{l^{1-c}}\,.$$

Обозначая

$$P_k(y)=\prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{r_{ky}(p^\alpha)}{p^\alpha}\right), \tag{14}$$

ввиду (11), получаем, что

$$\sum_{l\leqslant n}\frac{r_{ky}(l)}{l}=P_k(y)+B\sum_{\substack{l>n\\ l\in D_y}}\frac{|r_{ky}(l)|}{l}\,,$$

где D_y — множество тех натуральных l, в канонические разложения которых входят только $p\leqslant y$ (с учетом кратности). Следовательно,

$$\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} g_{ky}(m)=P_k(y)+B\sum_{\substack{l>n\\ l\in D_y}}\frac{|r_{ky}(l)|}{l}+$$

$$+By^{-c}\sum_{\substack{l\leqslant n\\ l\in D_y}}\frac{|r_{ky}(l)|}{l}+Bn^{-c}\sum_{\substack{l\leqslant n\\ l\in D_y}}\frac{|r_{ky}(l)|}{l^{1-c}}=$$

$$=P_k(y)+BT+By^{-c}\sum_{\substack{l\leqslant n\\ l\in D_y}}\frac{|r_{ky}(l)|}{l}\,,$$

где

$$T=\sum_{\substack{l>n\\ l\in D_y}}\frac{|r_{ky}(l)|}{l}+n^{-c}\sum_{\substack{l\leqslant n\\ l\in D_y}}\frac{|r_{ky}(l)|}{l^{1-c}}\,.$$

Если $0<\delta\leqslant c$, то

$$T\leqslant\sum_{\substack{l>n\\ l\in D_y}}\frac{|r_{ky}(l)|}{l}\left(\frac{l}{n}\right)^{\delta}+n^{-c}\sum_{\substack{l\leqslant n\\ l\in D_y}}\frac{|r_{ky}(l)|}{l^{1-c}}\left(\frac{n}{l}\right)^{c-\delta}\leqslant$$

$$\leqslant n^{-\delta}\sum_{l\in D_y}\frac{|r_{ky}(l)|}{l^{1-\delta}}=Bn^{-\delta}\prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|r_{ky}(p^\alpha)|}{p^{\alpha(1-\delta)}}\right).$$

При $p\geqslant p_0$, где p_0 — достаточно большое постоянное,

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|r_{ky}(p^\alpha)|}{p^{\alpha(1-\delta)}}<1.$$

Поэтому

$$\prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|r_{ky}(p^\alpha)|}{p^{\alpha(1-\delta)}}\right)=B\exp\sum_{p_0\leqslant p\leqslant y}\ln\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|r_{ky}(p^\alpha)|}{p^{\alpha(1-\delta)}}\right)=$$

$$=B\exp\sum_{p\leqslant y}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|r_{ky}(p^\alpha)|}{p^{\alpha(1-\delta)}}=B\exp 2\left(\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^{1-\delta}}+\sum_{p\leqslant y}\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{1}{p^{\alpha(1-\delta)}}\right)=$$

$$=B\exp 2\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^{1-\delta}}\,.$$

Аналогичным образом

$$\sum_{\substack{l\leqslant n\\ l\in D_y}} \frac{|r_{ky}(l)|}{l} \leqslant \prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|r_{ky}(p^{\alpha})|}{p^{\alpha}}\right)=B\ln^2 y.$$

Тогда

$$\dot{T}=Bn^{-\delta}\exp\left(2\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^{1-\delta}}\right).$$

Выполнив элементарные преобразования, получаем

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^{1-\delta}}=\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}+\sum_{p\leqslant y}\left(\frac{1}{p^{1-\delta}}-\frac{1}{p}\right)=$$

$$=\ln\ln y+B+\sum_{p\leqslant y}\frac{1-e^{-\delta\ln p}}{p^{1-\delta}}.$$

Ввиду неравенства

$$1-e^{-u}\leqslant u,$$

справедливого для всех положительных u,

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^{1-\delta}}\leqslant\ln\ln y+B+\delta\sum_{p\leqslant y}\frac{\ln p}{p^{1-\delta}}.$$

Так как $\delta>0$, то, применяя частичное суммирование, находим, что

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\ln p}{p^{1-\delta}}=\frac{\ln y}{y^{1-\delta}}\sum_{p\leqslant y}1-\int_2^y\sum_{p\leqslant u}1d\left(\frac{\ln u}{u^{1-\delta}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant By^{\delta}+(1-\delta)\int_2^y\frac{du}{u^{1-\delta}}=\frac{By^{\delta}}{\delta}.$$

Следовательно,

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^{1-\delta}}=\ln\ln y+By^{\delta}+B,$$

а тогда

$$T=Bn^{-\delta}\exp(2\ln\ln y+c_4y^{\delta})=B\ln^2 y\cdot\exp(-\delta\ln n+c_4y^{\delta}).$$

Подбирая $\delta=\frac{1}{\ln y}\ \ln\frac{\ln n}{\ln y}$, имеем, что

$$T=B\ln^2 y\cdot\exp\left(-\frac{\ln n}{\ln y}\ \ln\frac{\ln n}{\ln y}+c_4\frac{\ln n}{\ln y}\right).$$

Согласно условиям леммы, при $c_3=e^{-2c_4}$, $e^{2c_4}\leqslant\frac{\ln n}{\ln y}$, или $2c_4\leqslant\ln\frac{\ln n}{\ln y}$. Поэтому

$$c_4\frac{\ln n}{\ln y}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln n}{\ln y}\ \ln\frac{\ln n}{\ln y}$$

и

$$T=B\ln^2 y\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln n}{\ln y}\ \ln\frac{\ln n}{\ln y}\right).$$

Собирая последние оценки вместе, получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} g_{ky}(m)=P_k(y)+B\ln^2 y\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\;\frac{\ln n}{\ln y}\;\ln\;\frac{\ln n}{\ln y}\right)+y^{-c}\right\}. \quad (15)$$

Теперь оценим разность

$$w_{kF_n}(t)-\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} g_{ky}(m).$$

Из (8) следует, что

$$\left|w_{kF_n}(t)-\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} g_{ky}(m)\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ g(m)\neq 0}}|g_k(m)-g_{ky}(m)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ g(m)\neq 0}}\left|\frac{g_k(m)}{g_{ky}(m)}-1\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ g(m)\neq 0}}\left|\prod_{\substack{p\mid m\\ p>y}}|g(p)|^{it}\operatorname{sgn}^k g(p)-1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{n}\sum_{m\leqslant n}\sum_{\substack{p\mid m\\ p>y\\ g(p)<0}}1+\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\left|\exp\left(it\sum_{\substack{p\mid m\\ p>y\\ g(p)>0}}\ln g(p)-1\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{n}\sum_{\substack{y<p\leqslant n\\ g(p)<0}}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ m\equiv 0 \bmod p}}1+\frac{|t|}{n}\sum_{m\leqslant n}\sum_{\substack{p\mid m\\ p>y\\ g(p)>0}}|\ln g(p)|=$$

$$=B\sum_{\substack{p>y\\ g(p)<0}}\frac{1}{p}+\frac{B|t|}{n}\sum_{\substack{y<p\leqslant n\\ g(p)>0}}|\ln g(p)|\sum_{\substack{m\leqslant n\\ m\equiv 0 \bmod p}}1=$$

$$=By^{-c}\sum_{g(p)<0}\frac{1}{p^{1-c}}+B|t|\sum_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\frac{|\ln g(p)|}{p}.$$

Согласно условиям леммы

$$w_{kF_n}(t)=\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} g_{ky}(m)+By^{-c}+B|t|\sum_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\frac{|\ln g(p)|}{p}. \quad (16)$$

Наконец, используя (14) и (11), получаем:

$$P_k(y)-w_{kF}(t)=B\left|\prod_{p>y}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{g_k(p^\alpha)-g_k(p^{\alpha-1})}{p^\alpha}\right)-1\right|=$$

$$=B\left|\prod_{\substack{p>y\\ g(p)\leqslant 0}}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{g_k(p^\alpha)-g_k(p^{\alpha-1})}{p^\alpha}\right)\right|\left|\prod_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{g_k(p^\alpha)-g_k(p^{\alpha-1})}{p^\alpha}\right)-1\right|.$$

Так как согласно условиям леммы

$$\left|\prod_{\substack{p>y\\ g(p)\leqslant 0}}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|g_k(p^\alpha)-g_k(p^{\alpha-1})|}{p^\alpha}\right|=B\exp\left\{2\sum_{\substack{p>y\\ g(p)\leqslant 0}}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}\right\}=B,$$

и

$$\left|\prod_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{g_k(p^\alpha)-g_k(p^{\alpha-1})}{p^\alpha}\right)-1\right|=$$

$$=B\left|\exp\sum_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{g_k(p^\alpha)-g_k(p^{\alpha-1})}{p^\alpha}-1\right|=$$

$$=B\left|\exp\left\{\sum_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\frac{g(p)^{it}-1}{p}+2\sum_{p>y}\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}\right\}-1\right|=$$

$$=B\,|t|\sum_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\frac{|\ln g(p)|}{p}+\frac{B}{y\ln y},$$

то

$$P_k(y)=w_{kF}(t)+B\,|t|\sum_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\frac{|\ln g(p)|}{p}+\frac{B}{y\ln y}.$$

Подставляя последнюю оценку и (15) в (16), получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Если $g(m)$ – вещественная мультипликативная функция и ряд*

$$\sum_{p}\sum_{\substack{\alpha=1\\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty}\frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha}$$

сходится, то

$$w_{kF_n}(t)=w_{kF_n}(0)+B\,|t| \tag{17}$$

для всех t,

$$w_{kF}(t)=\omega_k+B\,|t| \tag{18}$$

при $|t|\leqslant c_5$, где c_5 – достаточно малое постоянное,

$$\omega_k=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right), \tag{19}$$

а $w_{kF_n}(t)$ и $w_{kF}(t)$ имеют те же значения, что и в лемме 2.

Доказательство. Из определения характеристических преобразований следует, что

$$w_{kF_n}(t)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ g(m)\neq 0}}e^{it\ln|g(m)|}\operatorname{sgn}^k g(m)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ g(m)\neq 0}}\operatorname{sgn}^k g(m)+\frac{B\,|t|}{n}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ g(m)\neq 0}}\big|\ln|g(m)|\big|=$$

$$=w_{kF_n}(0)+\frac{B\,|t|}{n}S, \tag{20}$$

где

$$S=\sum_{\substack{m\leqslant n\\ g(m)\neq 0}}\Big|\ln|g(m)|\Big|.$$

Функция $\ln|g(m)|$ — аддитивная, поэтому

$$S=\sum_{\substack{m\leqslant n\\ g(m)\neq 0}}\Big|\sum_{p^{\alpha}\|m}\ln|g(p^{\alpha})|\Big|\leqslant\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqslant n\\ g(p^{\alpha})\neq 0}}\Big|\ln|g(p^{\alpha})|\Big|\sum_{\substack{m\leqslant n\\ m\equiv 0 \bmod p^{\alpha}}}1=$$

$$=Bn\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqslant n\\ g(p^{\alpha})\neq 0}}\frac{\big|\ln|g(p^{\alpha})|\big|}{p^{\alpha}}=Bn$$

согласно условиям леммы. Подставляя эту оценку в (20), получаем (17).

Пусть

$$\chi_{kp}(t)=\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|g(p^{\alpha})|^{it}\operatorname{sgn}^k g(p^{\alpha})}{p^{\alpha}}\Big).$$

Тогда

$$\chi_{kp}(t)=\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{\substack{\alpha=1\\ g(p^{\alpha})\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{it\ln|g(p^{\alpha})|}\operatorname{sgn}^k g(p^{\alpha})}{p^{\alpha}}\Big)=\chi_{kp}(0)+\rho_p(t),$$

где

$$\chi_{kp}(0)=\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}^k g(p^{\alpha})}{p^{\alpha}}\Big),$$

$$|\rho_p(t)|=B|t|\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{\alpha=1\\ g(p^{\alpha})\neq 0}}^{\infty}\frac{\big|\ln|g(p^{\alpha})|\big|}{p^{\alpha}}.$$

Нетрудно заметить, что при достаточно большом p $\chi_{kp}(0)>\frac{1}{2}$, а $|\rho_p(t)|\leqslant$ $\leqslant c_6$, где c_6 — достаточно малое постоянное. Следовательно, если p_0 — достаточно большое простое число, то

$$w_{kF}(t)=\prod_{p}\chi_{kp}(t)=\prod_{p\leqslant p_0}\big(\chi_{kp}(0)+\rho_p(t)\big)\prod_{p>p_0}\big(\chi_{kp}(0)+\rho_p(t)\big)=$$

$$=\Big(\prod_{p}\chi_{kp}(0)+B|t|\Big)\exp\Big\{\sum_{p>p_0}\ln\Big(1+\frac{\rho_p(t)}{\chi_{kp}(0)}\Big)\Big\}=$$

$$=\Big(\prod_{p}\chi_{kp}(0)+B|t|\Big)\exp\{B|t|\}\Big)=\omega_k+B|t|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $g(m)$ — вещественная мультипликативная функция такая, что*

$$\Big|\ln\Big|\frac{g(m)}{g(n)}\Big|\Big|\geqslant\frac{1}{(mn)^{c_7}}$$

для всех бесквадратных m и n, когда $g(m)\neq 0$, $g(n)\neq 0$, $m\neq n$, то

$$\frac{1}{T}\int_0^T |w_{kF}(t)|\,dt=\frac{B\ln\ln T}{\ln T\ln\ln\ln T},$$

где $w_{kF}(t)$ — характеристические преобразования, определенные в условиях леммы 2.

Доказательство. Для любого $M\geqslant 2$ имеем, что

$$|w_{kF}(t)|\leqslant\prod_{p\leqslant M}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left|1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|g(p^\alpha)|^{it}\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right|=$$

$$=\frac{B}{\ln M}\prod_{p\leqslant M}\left|1+\frac{|g(p)|^{it}\operatorname{sgn}^k g(p)}{p}\right|=$$

$$=\frac{B}{\ln M}\prod_{\substack{p\leqslant M\\ g(p)\neq 0}}\left|1+\frac{e^{it\ln|g(p)|}\operatorname{sgn}^k g(p)}{p}\right|=$$

$$=\frac{B}{\ln M}\left|\sum_{\substack{m\mid\pi_M\\ g(m)\neq 0}}\frac{\mu^2(m)\,e^{it\ln|g(m)|}\operatorname{sgn}^k g(m)}{m}\right|,$$

где $m|\,\pi_M$ означает, что все простые делители m не превосходят M. Поэтому

$$\frac{1}{T}\int_0^T|w_{kF}(t)|^2\,dt=\frac{B}{T\ln^2 M}\int_0^T\left|\sum_{\substack{m\mid\pi_M\\ g(m)\neq 0}}\frac{\mu^2(m)\,e^{it\ln|g(m)|}\operatorname{sgn}^k g(m)}{m}\right|^2 dt=$$

$$=\frac{B}{T\ln^2 M}\sum_{\substack{m\mid\pi_M\\ g(m)\neq 0}}\ \sum_{\substack{n\mid\pi_M\\ g(n)\neq 0}}\frac{\mu^2(m)\,\mu^2(n)\operatorname{sgn}^k g(m)\operatorname{sgn}^k g(n)}{mn}\int_0^T e^{it\left(\ln|g(m)|-\ln|g(n)|\right)}\,dt=$$

$$=\frac{B}{\ln^2 M}\sum_{\substack{m\mid\pi_M\\ g(m)\neq 0}}\ \sum_{\substack{n\mid\pi_M\\ g(n)\neq 0}}\frac{\mu^2(m)\,\mu^2(n)\operatorname{sgn}^k g(m)\operatorname{sgn}^k g(n)}{mn}\times$$

$$\times\min\left(1,\ \frac{1}{T|\ln|g(m)|-\ln|g(n)||}\right)=$$

$$=\frac{B}{\ln^2 M}\sum_{\substack{m\mid\pi_M\\ g(m)\neq 0}}\frac{\mu^2(m)\operatorname{sgn}^{2k} g(m)}{m^2}+$$

$$+\frac{B}{\ln^2 M}\sum_{\substack{m\mid\pi_M\\ g(m)\neq 0}}\ \sum_{\substack{n\mid\pi_M\\ m\neq n\\ g(n)\neq 0}}\frac{\mu^2(m)\,\mu^2(n)\operatorname{sgn}^k g(m)\operatorname{sgn}^k g(n)}{mn}\times$$

$$\times\min\left(1,\ \frac{1}{T\left|\ln\left|\frac{g(m)}{g(n)}\right|\right|}\right)=$$

$$=\frac{B}{\ln^2 M}\left\{1+\sum_{m\mid\pi_M}\sum_{n\mid\pi_M}\frac{1}{mn}\min\left(1,\ \frac{(mn)^{c_7}}{T}\right)\right\},$$

согласно условиям леммы.

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 4 работы [5], получим утверждение леммы.

Теорема. *Пусть $g(m)$ — вещественная мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям:*

1) *ряд по простым p*

$$\sum_p \sum_{\substack{\alpha=1 \\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty} \frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha}$$

сходится,

2) *существует такое положительное постоянное c, что ряд*

$$\sum_{g(p)\leqslant 0} \frac{1}{p^{1-c}}$$

сходится,

3)

$$\left|\ln\left|\frac{g(m)}{g(n)}\right|\right| \geqslant \frac{1}{(mn)^{c_7}}$$

для всех бесквадратных m и n, когда $g(m)\neq 0$, $g(n)\neq 0$, $m\neq n$.

Тогда равномерно по x

$$\frac{1}{n} N\{m\leqslant n,\ g(m)<x\} = F(x) + \frac{B\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}{\ln\frac{1}{\rho_n}\ \ln\ln\ln\frac{1}{\rho_n}},$$

где $F(x)$ — функция распределения, определенная характеристическими преобразованиями

$$w_{kF}(t) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|^{it}\operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) \qquad (k=0,\ 1),$$

$$\rho_n = \sum_{g(p)>0} \frac{|\ln g(p)|}{p}.$$

$$p > \exp\frac{\ln n \ln\ln\ln n}{3c\ln\ln n}$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$w_{kF_n}(0) = \omega_k + B\ln^2 y\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\ln y}\ln\frac{\ln n}{\ln y}\right) + y^{-c}\right\},$$

$$w_{kF}(0) = \omega_k \quad (k=0,\ 1),$$

где ω_k определены равенствами (19). Тогда

$$\beta_{kF_n} = \frac{1}{2}\left(\omega_0 + (-1)^k\omega_1\right) + B\ln^2 y\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\ln y}\ln\frac{\ln n}{\ln y}\right) + y^{-c}\right\},$$

$$\beta_{kF} = \frac{1}{2}\left(\omega_0 + (-1)^k\omega_1\right).$$

Если $\beta_{kF}\neq 0$, то $\beta_{kF_n}\neq 0$ при $n\geqslant c_8$, где c_8 — достаточно большое постоянное. Оценим интеграл из леммы 1:

$$\int_0^T |W_{kF_nF}(t)|\frac{dt}{t} = \left(\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{T}\right)|W_{kF_nF}(t)|\frac{dt}{t}.$$

Согласно (18) для достаточно малых t

$$W_{kF_n F}(t)=B\,|\,t\,|,$$

а из леммы 2 для всех t

$$W_{kF_n F}(t)=B\ln^2 y\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\ln n}{\ln y}\,\ln\frac{\ln n}{\ln y}\right)+y^{-c}\right\}+$$

$$+B\,|\,t\,|\sum_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\frac{|\ln g(p)|}{p}.$$

Следовательно,

$$\int_0^T |W_{kF_n F}(t)|\,\frac{dt}{t}=B\varepsilon+B\ln\frac{T}{\varepsilon}\,\ln^2 y\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\ln n}{\ln y}\,\ln\frac{\ln n}{\ln y}\right)+\right.$$

$$\left.+y^{-c}\right\}+BT\sum_{\substack{p>y\\ g(p)>0}}\frac{|\ln g(p)|}{p}.$$

Положим теперь $\varepsilon=\frac{1}{y}$,

$$y=\exp\frac{\ln n\ln\ln\ln n}{3c\ln\ln n}.$$

Пусть

$$\rho_n=\sum_{\substack{p>y(n)\\ g(p)>0}}\frac{|\ln g(p)|}{p},\quad T=\frac{\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}{\rho_n\ln\frac{1}{\rho_n}\,\ln\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}. \tag{21}$$

Тогда

$$\int_0^T |W_{kF_n F}(t)|\,\frac{dt}{t}=\frac{B}{y}+B\ln T\ln^3 y\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\ln n}{\ln y}\,\ln\frac{\ln n}{\ln y}\right)+$$

$$+\frac{B\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}{\ln\frac{1}{\rho_n}\,\ln\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}.$$

Так как $|\ln g(p)|\geqslant p^{-c_7}$, если $g(p)>0$, то

$$\rho_n>\exp\left(-c_9\,\frac{\ln n\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\right),$$

и оценка интеграла принимает вид

$$\int_0^T |W_{kF_n F}(t)|\,\frac{dt}{t}=\frac{B\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}{\ln\frac{1}{\rho_n}\,\ln\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}. \tag{22}$$

Ввиду (21), применение леммы 4 дает:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |W_{kF}(t)|\,dt=\frac{B\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}{\ln\frac{1}{\rho_n}\,\ln\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}.$$

Подставляя последнюю оценку и (22) в лемму 1, получаем утверждение теоремы в случае $\beta_{kF}\neq 0$.

Если $\beta_{kF}=0$ ($k=0$ или 1), то из леммы 1 следует, что

$$L_k \leqslant |\beta_{kF_n}-\beta_{kF}|.$$

Отсюда легко получаем теорему и в этом случае.

Приведем несколько примеров.

1. $g(m)=\frac{\varphi(m)}{m}$, где $\varphi(m)$ — функция Эйлера. Условия теоремы выполнены при $c=\frac{1}{3}$ и

$$\rho_n=B \sum_{p>\exp\frac{\ln n \ln\ln\ln n}{\ln\ln n}} \frac{1}{p^2}=B\exp\left(-\frac{\ln n \ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\right).$$

Применяя доказанную теорему, имеем:

$$\frac{1}{n} N\left\{m\leqslant n,\ \frac{\varphi(m)}{m}<x\right\}=F(x)+\frac{B}{\ln n}\left(\frac{\ln\ln n}{\ln\ln\ln n}\right)^2,$$

где характеристические преобразования предельного закона $F(x)$ равны

$$w_{0F}(t)=w_{1F}(t)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{it}\right).$$

2. Пусть $I(m)$ — число решений уравнения

$$m=p_1+p_2+p_3,$$

где m — целое положительное число, p_1, p_2, p_3 — простые числа. И. М. Виноградов [3] в 1937 г. доказал, что существует такое постоянное c_{10}, что для всех $m\geqslant c_{10}$

$$I(m)=\frac{m^2}{2\ln^2 m}c_{11}S(m)+\frac{Bm^2}{\ln^{3,5-\varepsilon} m},$$

где

$$S(m)=\prod_{p\,\vdots\,m}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right).$$

Тогда

$$S(p^\alpha)=\begin{cases}0, & \text{если } p=2,\\ 1-\frac{1}{p^2-3p+3}>0, & \text{если } p>2.\end{cases}$$

Условия теоремы выполнены при $c=\frac{1}{3}$ и

$$\rho_n=B\sum_{p>\exp\frac{\ln n\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}}\frac{1}{p^3}=B\exp\left(-2\ \frac{\ln n\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n}N\{m\leqslant n,\ S(m)<x\}=F(x)+\frac{B}{\ln n}\left(\frac{\ln\ln n}{\ln\ln\ln n}\right)^2,$$

где характеристические преобразования закона $F(x)$ равны

$$w_{0F}(t)=w_{1F}(t)=\frac{1}{2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right)^{it}\right).$$

3. В 1923 г. английские математики Г. Харди и Дж. Литтлвуд предложили асимптотическую формулу

$$Q(m) \sim \pi \frac{m}{\ln m} c_{12} \sigma(m),$$

где $Q(m)$ — число решений уравнения

$$m = p + \xi^2 + \eta^2,$$

m — натуральное, p — простое, ξ, η — целые числа,

$$\sigma(m) = \prod_{p \mid m} \frac{(p-1)\left(p - \chi_4(p)\right)}{p^2 - p + \chi_4(p)},$$

$$\chi_4(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = 2, \\ 1, & \text{если } p \equiv 1 \bmod 4, \\ -1, & \text{если } p \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

В 1960 г. Ю. В. Линник [6] доказал эту гипотезу.

Так как $\sigma(m)$ — мультипликативная функция и

$$\sigma(p) = 1 - \frac{p\chi_4(p)}{p^2 - p + \chi_4(p)},$$

легко показать, что условия теоремы при $c = \frac{1}{3}$ выполнены и

$$\rho_n = B \sum_{p > \exp \frac{\ln n \ln \ln \ln \ln n}{\ln \ln n}} \frac{1}{p^2} = B \exp\left(- \frac{\ln n \ln \ln \ln \ln n}{\ln \ln n}\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{n} N\{m \leqslant n, \ \sigma(m) < x\} = F(x) + \frac{B}{\ln n}\left(\frac{\ln \ln n}{\ln \ln \ln n}\right)^2,$$

где характеристические преобразования закона $F(x)$ равны

$$w_{0F}(t) = w_{1F}(t) = \prod_p \left\{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{p\chi_4(p)}{p^2 - p + \chi_4(p)}\right)^{it}\right\}.$$

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
30.VIII.1971

Литература

1. А. Бакштис, О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций, Liet. matem. rink., VIII, № 1, 2, 4 (1968), 5–39, 201–219, 643–680.
2. И. М. Виноградов, Избранные труды, Изд. АН СССР, 1952.
3. В. М. Золотарев, Общая теория перемножения независимых случайных величин ДАН СССР, 142 (1962), 788–791.
4. Й. Кубилюс, З. Юшкис, О распределении значений мультипликативных функций Liet. matem. rink., XI, № 2 (1971), 261–273.
5. А. С. Файнлейб, Обобщение неравенства Эссеена и его применение в вероятностной теории чисел, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 4 (1968), 859–879.
6. Ю. В. Линник, Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Изд. Ленинградского университета, 1961.

APIE MULTIPLIKATYVINIŲ ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ PASISKIRSTYMĄ

Z. Juškys

(Reziumė)

Tarkime, kad $g(m)$ – reali multiplikatyvinė aritmetinė funkcija; be to,

$$\sum_{p} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty} \frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha}, \quad \sum_{g(p)\leqslant 0} \frac{1}{p^{1-c}},$$

(čia sumuojama pagal pirminius skaičius) konverguoja, tinkamai parinkus konstantą $c>0$, ir

$$\left|\ln\left|\frac{g(m)}{g(n)}\right|\right| \geqslant \frac{1}{(mn)^{c_7}}$$

mant visus natūrinius m ir n, nesidalijančius iš pirminio skaičiaus kvadrato, kai $g(m)\neq 0$, $g(n)\neq 0$, $m\neq n$ (c_7 – teigiama konstanta). Tada, esant bet kokiam x, skaičius natūrinių skaičių $m\leqslant n$, kuriems $g(m)<x$, yra lygus

$$nF(x)+O\left(\frac{n\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}{\ln\frac{1}{\rho_n}\cdot\ln\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}\right);$$

čia $F(x)$ – pasiskirstymo funkcija, apibrėžiama charakteringosiomis transformacijomis

$$w_{kF}(t)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{g(p^\alpha)^{it}\operatorname{sng}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) \quad (k=0,1),$$

$$\rho_n=\sum_{\substack{g(p)>0 \\ p>\exp\frac{\ln n\ln\ln\ln\ln n}{3c\ln\ln n}}}\frac{|\ln g(p)|}{p}.$$

ZUR VERTEILUNG DER WERTE VON MULTIPLIKATIVEN ZAHLENTHEORETISCHEN FUNKTIONEN

Z. Juškys

(Zusammenfassung)

Es sei $g(m)$ eine reele multiplikative zahlentheoretische Funktion. Wir nehmen an, daß die Reihen über Primzahlen

$$\sum_{p} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ g(p^\alpha)\neq 0}}^{\infty} \frac{|\ln|g(p^\alpha)||}{p^\alpha}, \quad \sum_{g(p)\leqslant 0} \frac{1}{p^{1-c}}$$

bei geeigneter Konstante $c>0$ konvergieren und

$$\left|\ln\left|\frac{g(m)}{g(n)}\right|\right| \geqslant \frac{1}{(mn)^{c_7}}$$

für alle kvadratfreien m und n, wenn $g(m)\neq 0$, $g(n)\neq 0$, $m\neq n$, wo c_7 eine positive Konstante ist. Unter diesen Bedingungen für alle x die Anzahl der positiven ganzen Zahlen $m\leqslant n$, welche die Ungleichung $g(m)<x$ genügen, ist gleich

$$nF(x)+O\left(\frac{n\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}{\ln\frac{1}{\rho_n}\ \ln\ln\ln\frac{1}{\rho_n}}\right).$$

Hier bezeichnet man $F(x)$ – eine Verteilungsfunktion, die durch charakteristische Transformationen definiert ist

$$w_{kF}(t) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|^{it} \operatorname{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) \quad (k=0,1),$$

$$\rho_n = \sum_{\substack{g(p)>0 \\ p>\exp \frac{\ln n \ln \ln \ln n}{3c \ln \ln n}}} \frac{|\ln g(p)|}{p}.$$