УДК 519.21.

О ЛОКАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ВЕЛИЧИН

П. С. Вайткус

Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, установленные В. М. Золотаревым [1], в настоящей заметке обобщены на случай независимых неодинаково распределенных дискретных величин.

Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n, \tag{1}$$

принимающих только целочисленные значения с вероятностями

$$p_{k,\,m}=P\{\xi_k=m\}.$$

Пусть имеется семейство устойчивых распределений $\{G_{\alpha k}(x),\ 0<\alpha<2,\ \alpha\neq 1,\ \beta=-1\}$, для которых

$$R_{\alpha k}(h)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{hx}\,dG_{\alpha k}(x)=\exp\{\psi_k(h)\}, \tag{2}$$

где $\psi_k(h)=\lambda_k h^\alpha \operatorname{sign}(\alpha-1)$, $\lambda_k>0$, $h>0$, $k=1, 2, \ldots$.
В дальнейшем будем предполагать, что функция распределения $F_k(x)$ случайной величины ξ_k принадлежит нормальной области притяжения устойчивого закона $G_{\alpha k}(x)$.

Вводим обозначения:

$$S_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n,\quad P_n(m)=\mathbf{P}\{S_n=m\},\quad B_n^\alpha=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k,$$

$$R_k(h)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{hm}p_{k,\,m},\quad \Omega_k(x)=F_k(x)-G_{\alpha k}(x),$$

$$\mu_k(m)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^m\,d\,\Omega_k(x),\quad \nu_k(a)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^a|d\Omega_k(x)|,$$

$g_\alpha(x)$ – плотность предельного устойчивого закона $G_\alpha(x)$.

На последовательность (1) налагаем условия.

1°. Существуют положительные числа l, $K<\infty$, $B<\infty$, такие, что

$$l<R_k(h)<K,\ \text{когда}\ 0<h<B\ (k=1, 2, \ldots).$$

2°. Существуют положительные числа $L<\infty$ и

$$a>\begin{cases}\alpha, & \text{когда}\ 1<\alpha<2,\\ 1, & \text{когда}\ 0<\alpha<1,\end{cases}$$

такие, что $|\nu_k(a)|<L$, $k=1, 2, \ldots$.

3°. При $n \to \infty$ и любом $q \geqslant 2$

$$\frac{1}{\ln B_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k(h)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{hrq} p_{k,rq} \to \infty,$$

когда $0<h<B$.

4°. Для каждого n

$$\frac{B_n^\alpha}{n} \geqslant \delta > 0.$$

Теорема 1. *Если последовательность* (1) *удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3°, 4°, то при $n \to \infty$ равномерно по $x_n = \frac{m}{B_n}$ в интервале $\left(1, o(B_n^{\alpha-1})\right)$, когда $1<\alpha<2$, и в интервале $\left(-1, -o(B_n^{\alpha-1})\right)$, когда $0<\alpha<1$, имеет место асимптотическое представление*

$$\frac{B_n P_n(m)}{g_\alpha(x_n)} = \prod_{k=1}^{n} R_k(h) \exp\left\{-x_n h B_n + (\alpha-1)\operatorname{sign}(\alpha-1)(x_n\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}\left(1+o(1)\right), \quad (3)$$

где h является единственным решением уравнения

$$B_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \ln' R_k(h).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при $n \to \infty$ отношение $\frac{B_n P_n(m)}{g_\alpha(x_n)}$ эквивалентно единице равномерно по x_n в интервале $\left(1, o\left(\Lambda_n(a')\right)\right)$, когда $1<\alpha<2$, где*

$$\Lambda_n(a') = B_n^{\frac{1}{a'}(\alpha-1)(a'-\alpha)},$$

и a' определено согласно (13).

Доказательство теоремы 1. Из условия 1° следует, что производящая функция моментов $R_k(z)$ случайной величины ξ_k аналитична в полосе $0<\mathrm{Re}\, z<<B$. Соответствующей функцией для суммы $Z_n = B_n^{-1} S_n$ будет

$$M(z) = \prod_{k=1}^{n} R_k\left(\frac{z}{B_n}\right).$$

Справедлива формула обращения

$$B_n P_n(m) = \frac{B_n}{2\pi i} \int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi} \prod_{k=1}^{n} R_k(z)\, e^{-zB_n x_n}\, dz,$$

где $0<\gamma<B$, $z=\gamma+it$, $x_n = \frac{m}{B_n}$.

Решаем уравнение перевала

$$x_n B_n = \sum_{k=1}^{n} \ln' R_k(z). \quad (4)$$

Так как $x_n \in R_1$, то можно ограничиться реальными z. Существование решения уравнения (4) показано в [4]. Пусть $z=h$ является корнем уравнения (4). Возьмем $\gamma=h$ и преобразуем последний интеграл

$$B_n P_n(m) = \frac{B_n \prod_{k=1}^{n} m_k}{2\pi i} \int_{h-i\pi}^{h+i\pi} \prod_{k=1}^{n} \frac{R_k(z) e^{-za_k}}{m_k} dz, \tag{5}$$

где $m_k = R_k(h)\, e^{-ha_k}$, $a_k = \ln' R_k(h)$.

Нетрудно проверить, что $R_k(z)\, e^{-za_k} m_k^{-1}$ является характеристической функцией для случайной величины $\bar{\xi}_k$, принимающей только целочисленные значения с вероятностями

$$\bar{p}_{k,m} = \frac{e^{hm}}{m_k} p_{k,m+a_k}. \tag{6}$$

Следовательно, интеграл (5) представляет собой значение плотности $\nu_n(y)$ суммы $\bar{\xi}_1+\bar{\xi}_2+\ldots+\bar{\xi}_n$ в точке $y=0$,

$$\nu_n(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\pi}^{h+i\pi} \prod_{k=1}^{n} \frac{R_k(z)\, e^{-za_k}}{m_k} dz. \tag{7}$$

Из (6) следует, что $\mathbf{M}\bar{\xi}_k=0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, а из условия 1° – что функция распределения случайной величины $\bar{\xi}_k$ удовлетворяет условию Крамера. Исходя из этого, для плотности $\nu_n(y)$ можно выписать асимптотическое разложение [5, т. 2]: при любом $N_n \geqslant 4\bar{B}_n \bar{L}_{3,n}$ имеем

$$\bar{B}_n \nu_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} + |\Theta_1| \bar{L}_{3,n} +$$

$$+ N_n \Theta_2 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \min_{a,q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\left(a, q, \frac{\pi}{4} N_n\right) \right\}, \tag{8}$$

где обозначено

$$\bar{B}_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\bar{\xi}_k, \quad \bar{B}_n^3 \bar{L}_{3,n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M} |\bar{\xi}_k - M\bar{\xi}_k|^3,$$

$$\alpha_k\left(a, q, \frac{\pi}{4} N_n\right) = \frac{1}{q^2} \sum_{-\frac{q}{2} < r \leqslant \frac{q}{2}} r^2 \mathbf{P}\left\{ a\bar{\xi}_k^s \equiv r \,(\mathrm{mod}\, q),\ |\bar{\xi}_k^s| \leqslant \frac{\pi}{4} N_n \right\},$$

$\bar{\xi}_k^s$ – симметризованная случайная величина, для которой

$$\mathbf{P}\{\bar{\xi}_k^s = m\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{p}_{k,m+n} \bar{p}_{k,n},$$

и минимум берется по всем таким a и q, что $a \leqslant \frac{1}{2} q$, $1 \leqslant q \leqslant 2N_n$, $(a, q)=1$.

Из [2] имеем, что $\bar{L}_{3,n} < \bar{L}_{4,n}^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому можем взять $N_n = 4 \bar{B}_n^2 \bar{L}_{4,n}^{\frac{1}{2}}$. В работе [5] для $\alpha_k \left(a,\ q,\ \frac{\pi}{4} N_n\right)$ приводится неравенство:

$$\alpha_k \left(a,\ q,\ \frac{\pi}{4} N_n\right) \geqslant \frac{1}{q^2} \sum_{-\frac{q}{2} < r \leqslant \frac{q}{2}} r^2 \mathbf{P} \left\{ a \bar{\xi}_k^s \equiv r \pmod q \right\} -$$

$$- \frac{1}{4} \mathbf{P} \left\{ |\bar{\xi}_k^s| > \frac{\pi}{4} N_n \right\}.$$

Для установления порядка последнего члена в (8), покажем, что в наших условиях

$$\frac{1}{\ln N_n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{-\frac{q}{2} < r \leqslant \frac{q}{2}} r^2 \mathbf{P} \left\{ |a \bar{\xi}_k^s \equiv r \pmod q \right\} \to \infty \ (n \to \infty), \tag{9}$$

а

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P} \left\{ |\bar{\xi}_k^s| > N_n \right\} < \infty. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{D} \bar{\xi}_k = \ln'' R_k(h), \quad \ln R_k(h) = \psi_k(h) + \ln \left[1 + \frac{\omega_k(h)}{R_{\alpha k}(h)}\right],$$

где $\omega_k(h) = R_k(h) - R_{\alpha k}(h)$.

Далее

$$\ln' R_k(h) = \lambda_k \alpha h^{\alpha-1} \operatorname{sign}(\alpha - 1) + \frac{\omega_k'(h) - \omega_k(h) \psi_k'(h)}{\omega_k(h) + R_{\alpha k}(h)}, \tag{11}$$

и

$$\ln'' R_k(h) = \lambda_k \alpha |\alpha - 1| h^{\alpha-2} + \frac{\omega_k''(h) - \omega_k'(h) \psi_k'(h) - \omega_k(h) \psi_k''(h)}{\omega_k(h) + R_{\alpha k}(h)} -$$

$$- \frac{\omega_k'(h)^2 - \omega_k(h) \omega_k'(h) \psi_k'(h) + \omega_k'(h) R_{\alpha k}'(h) - \omega_k(h) \psi_k'(h) R_{\alpha k}'(h)}{[\omega_k(h) + R_{\alpha k}(h)]^2}. \tag{12}$$

Очевидно, что $\mu_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Не ограничивая общности, можно предположить, что $\mu_k(1) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Вообще, всегда найдутся такие $l_k \geqslant 1$, что $\mu_k(0) = \mu_k(1) = \ldots = \mu_k(l_k) = 0$, а $\mu_k(l_k + 1)$ отличны от нуля или не существуют. Пусть

$$l = \min_k l_k, \quad a' = \min(a,\ l + 1). \tag{13}$$

Тогда при достаточно малом h из условия 2° получим

$$\omega_k(h) = h^{a'} \nu_k(a',\ h),$$

где $|\nu_k(a', h)|$ равномерно ограничены при всех $h \in (0, B')$ для некоторого $B' < B$. Следовательно,

$$\omega_k(h) = O(h^{a'}), \quad \omega_k'(h) = O(h^{a'-1}). \tag{14}$$

Исходя из этого, уравнение перевала (4) примет вид

$$x_n = \alpha \operatorname{sign}(\alpha - 1)(hB_n)^{\alpha-1} + B_n^{\alpha-1} [c_1(n) h^{a'-1} + c_2 h^{a'+\alpha-1}], \tag{15}$$

где $c_1(n)$ может стремиться к нулю.

Если $x_n > 1$, то следует, что

$$h > B_n^{-1}.$$

Так как случайная величина ξ_k имеет нулевое среднее, нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{M}\xi_k^4 = \ln^{IV} R_k(h) + 3[\ln'' R_k(h)]^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{16} N_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \ln^{IV} R_k(h) + 3 \sum_{k=1}^{n} [\ln'' R_k(h)]^2.$$

Установим верхние и нижние пределы для N_n, когда

$$h \in (B_n^{-1}, B').$$

В случае, когда $0 < \alpha < 1$, имеем

$$-R'_{\alpha k}(h) \leqslant \frac{\alpha}{2} h^{-1}. \tag{16}$$

Используя это и (12), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} [\ln'' R_k(h)]^2 = \alpha^2 (\alpha - 1)^2 h^{2\alpha - 4} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 [1 + c_3(n) + h^{2a' - 2\alpha} + ch^{2a'}],$$

где $c_3(n)$ может стремиться к нулю, а $a' > \alpha$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Big(1 + o(1)\Big) < \sum_{k=1}^{n} [\ln'' R_k(h)]^2 < B_n^1 \Big(1 + o(1)\Big). \tag{17}$$

В случае, когда $1 < \alpha < 2$, соотношение (12) можем переписать следующим образом:

$$\ln'' R_k(h) = \lambda_k \alpha |\alpha - 1| h^{\alpha - 2} - \frac{\omega_k'(h)^2 + 2\omega_k(h)\omega_k'(h)\psi_k'(h) + \omega_k^2(h)\psi_k'(h)^2}{[1 + \omega_k(h)\exp\{-\psi_k(h)\}]^2} \times$$

$$\times e^{-2\psi_k(h)} + \frac{\omega_k''(h) - 2\omega_k'(h)\psi_k'(h) - \omega_k(h)\psi_k''(h) + \omega_k(h)\psi_k'(h)^2}{1 + \omega_k(h)\exp\{-\psi_k(h)\}} e^{-\psi_k(h)}. \tag{18}$$

Если $h \in (B_n^{-1}, B')$, то

$$|\omega_k(h) e^{-\psi_k(h)}| < \frac{1}{2}, \tag{19}$$

и справедливы неравенства:

$$\psi_k'(h) e^{-\psi_k(h)} < \frac{\alpha}{2} h^{-1}; \quad \psi_k''(h) e^{-\psi_k(h)} < \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} h^{-2}.$$

Исходя из этого, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} [\ln'' R_k(h)]^2 = \alpha^2 (\alpha - 1)^2 h^{2\alpha - 4} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 [1 + c_4(n) h^{2a' - 2\alpha} + c_5 h^{2a'}],$$

где $c_4(n)$ может стремиться к нулю. Следовательно, когда $h \in (B_n^{-1}, B')$, справедлива оценка (17).

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^{IV} R_k(h)$. В случае, когда $0<\alpha<1$, имеем

$$\ln^{IV} R_k(h) = \alpha(1-\alpha)(\alpha-2)(\alpha-3)\lambda_k h^{\alpha-4} +$$

$$+\frac{\omega_k^{IV}(h)-\omega_k'''(h)\psi_k'(h)-3\omega_k''(h)\psi_k''(h)-3\omega_k'(h)\psi_k'''(h)-\omega_k(h)\psi_k^{IV}(h)}{\omega_k(h)+R_{\alpha k}(h)}-$$

$$-\frac{3\omega_k''(h)^2+4\omega_k'(h)\omega_k'''(h)-6\omega_k'(h)\omega_k''(h)\psi_k'(h)-\omega_k(h)\omega_k'''(h)\psi_k'(h)-6\omega_k'(h)^2\psi_k''(h)}{[\omega_k(h)+R_{\alpha k}(h)]^2}+$$

$$+3\,\frac{\omega_k(h)\omega_k''(h)\psi_k''(h)+\omega_k(h)\omega_k'(h)\psi_k'''(h)+\omega_k'''(h)R_{\alpha k}'(h)+\omega_k''(h)R_{\alpha k}''(h)+2\omega_k'(h)\psi_k''(h)R_{\alpha k}'(h)}{[\omega_k(h)+R_{\alpha k}(h)]^2}-$$

$$-\frac{\omega_k'(h)R_{\alpha k}'''(h)+\omega_k''(h)\psi_k'(h)R_{\alpha k}'(h)-2\omega_k'(h)\psi_k'(h)R_{\alpha k}''(h)}{[\omega_k(h)+R_{\alpha k}(h)]^2}-$$

$$-\frac{3\psi_k'''(h)R_{\alpha k}'(h)+\omega_k'(h)\psi_k'(h)R_{\alpha k}''(h)+3\omega_k(h)\psi_k''(h)R_{\alpha k}''(h)+\omega_k(h)\psi_k'(h)R_{\alpha k}'''(h)}{[\omega_k(h)+R_{\alpha k}(h)]^2}+$$

$$+\left[\frac{\left(2\omega_k'(h)^2+\omega_k(h)\omega_k'(h)\psi_k'(h)+\omega_k'(h)R_{\alpha k}'(h)-\omega_k(h)\psi_k'(h)R_{\alpha k}'(h)\right)\left(\omega_k'(h)+R_{\alpha k}'(h)\right)}{[\omega_k(h)+R_{\alpha k}(h)]^3}\right]'.$$

Отсюда видно, что при $h=B'$ главную роль будет играть член

$$\omega_k(h)\psi_k'(h)R_{\alpha k}'''(h).$$

Имеем

$$-R_{\alpha k}'''(h)=[\lambda_k\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)h^{\alpha-3}+3\lambda_k^2\alpha^2(1-\alpha)h^{2\alpha-3}+\lambda_k^3\alpha^3h^{3\alpha-3}]\,e^{-\lambda_k h^{\alpha}},$$

но

$$\lambda_k h^{\alpha} e^{-\lambda_k h^{\alpha}}<\frac{1}{2},$$

следовательно,

$$-R_{\alpha k}'''(h)<\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)(2-\alpha)h^{-3}+\frac{3}{2}\lambda_k\alpha^2(1-\alpha)h^{\alpha-3}+\frac{1}{2}\lambda_k^2\alpha^3h^{2\alpha-3}.$$

Так как

$$\psi_k'(h)=-\alpha h^{\alpha-1}\lambda_k, \qquad \omega_k(h)=O(h^{\alpha'}),$$

то при $h=B'$ получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n}\ln^{IV}R_k(h)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^3\Big(1+o(1)\Big).$$

В другом крайнем случае, когда $h=B_n^{-1}$, получим

$$h^{4\alpha-4+\alpha'}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^3=h^{\alpha-4}\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^3}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{3+\frac{x'}{\alpha}}}<h^{\alpha-4}.$$

Следовательно, в этом случае главную роль играет первый член и

$$\sum_{k=1}^{n}\ln^{IV}R_k(h)=B_n^4\Big(1+o(1)\Big).$$

Так как мы рассматриваем случай, когда $0<\alpha<1$, то

$$B_n^4 > \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^3 > \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Окончательно получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^3 \left(1+o(1)\right) < \sum_{k=1}^{n} \ln^{IV} R_k(h) + 3\left[\ln'' R_k(h)\right]^2 < B_n^4 \left(1+o(1)\right), \tag{20}$$

когда $0<\alpha<1$.

Далее рассмотрим поведение суммы $\sum_{k=1}^{n} \ln^{IV} R_k(h)$, когда $1<\alpha<2$. Из соотношения (18) получаем, что

$$\ln^{IV} R_k(h) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\lambda_k h^{\alpha-4} +$$

$$+\sum_{l=1}^{4} \frac{K_l(h, \lambda_k)}{[1+\omega_k(h)\exp\{-\psi_k(h)\}]^l}\, e^{-l\psi_k(h)}, \tag{21}$$

где $K_l(h, \lambda_k)$ зависит от функций $\omega_k(h)$ и $\psi_k(h)$ и их производных по четвертой степени. Если рассмотреть структуру $K_l(h, \lambda_k)$, то можно установить, что при $h=B'$ главную роль в (21) будут играть члены, в которые входят $[\psi_k'(h)]^4$. После несложных вычислений становится ясным, что $K_1(h, \lambda_k)$ содержит $\omega_k(h)^2\,[\psi_k'(h)]^4$, а $K_l(h, \lambda_k)$ содержит $\omega_k(h)^l\,[\psi_k'(h)]^4$, $l=2, 3, 4$. Но

$$[\psi_k'(h)]^4 e^{-l\psi_k(h)} < \frac{\alpha^4}{2^l} \lambda_k^{4-l} h^{(4-l)\alpha-4}.$$

Исходя из этого и (19), при $h=B'$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \ln^{IV} R_k(h) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^3 \left(1+o(1)\right).$$

При $h=B_n^{-1}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{4-l} h^{(4-l)\alpha-4+la'} < h^{\alpha-4},$$

так как $a'>\alpha$.

В этом случае получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \ln^{IV} R_k(h) = B_n^4 \left(1+o(1)\right).$$

Таким образом, и в случае $1<\alpha<2$ справедливо неравенство (20). Окончательно для N_n имеем

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right]^{\frac{1}{2}} < N_n < B_n^3. \tag{22}$$

В работе [5] показано, что

$$\sum_{-\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}} r^2 \mathbf{P}\{a\bar{\xi}_k^s \equiv r \pmod q\} \geqslant \min_{0<r\leqslant q} \mathbf{P}\{\bar{\xi}_k \not\equiv r \pmod q\}.$$

Следовательно, верхняя оценка для N_n из (22) и условие 4° показывает, что выполняется соотношение (9).

Далее докажем справедливость соотношения (10). Для этого воспользуемся слабым неравенством симметризации [6, стр. 259]. Имеем

$$\mathbf{P}\{|\bar{\xi}_k^s| \geqslant N_n\} \leqslant 2\mathbf{P}\left\{|\bar{\xi}_k| \geqslant \frac{N_n}{2}\right\}.$$

Исходя из неравенства Чебышева, находим, что

$$\mathbf{P}\left\{\bar{\xi}_k \geqslant \frac{N_n}{2}\right\} \leqslant e^{-\frac{u}{2}N_n} \mathbf{M} e^{u\bar{\xi}_k}.$$

Но случайная величина $\bar{\xi}_k$ удовлетворяет условию Крамера и

$$\mathbf{M} e^{u\bar{\xi}_k} = \frac{R_k(u+h)}{R_k(h)},$$

где $0<u+h<B$. Следовательно, используя условие 1°, получаем, что

$$\mathbf{P}\left\{\bar{\xi}_k \geqslant \frac{N_n}{2}\right\} \leqslant \frac{K}{l} e^{-\frac{u}{2}N_n}.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для $\mathbf{P}\{\bar{\xi}_k \leqslant -N_n\}$. Таким образом, имеем оценку

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\bar{\xi}_k^s| \geqslant N_n\} \leqslant n \frac{k}{l} e^{-\frac{u}{2}N_n}.$$

Но

$$N_n^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2,$$

а так как $B_n^\alpha \geqslant n\delta$, то существует константа $C<\infty$ такая, что для всех n

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\bar{\xi}_k^s| \geqslant N_n\} < C.$$

Исходя из этого и соотношений (5), (8), получаем, что при $n \to \infty$

$$B_n P_n(m) = \frac{B_n}{\bar{B}_n\sqrt{2\pi}} \prod_{k=1}^{n} R_k(h) e^{-x_n hB_n}\left(1+o(1)\right).$$

Так как плотность предельного устойчивого закона имеет асимптотическое представление

$$g_\alpha(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sum_{k=1}^{n} \ln'' R_{\alpha k}(\rho B_n)}} \exp\{-\operatorname{sign}(\alpha-1)(1-\alpha)(\rho B_n^\alpha)\}\left(1+o(1)\right),$$

где ρ — решение уравнения

$$B_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \ln' R_{\alpha k}(\rho), \tag{23}$$

то

$$\frac{B_n P_n(m)}{g_\alpha(x_n)} = \frac{B_n \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \ln'' R_{\alpha k}(\rho B_n)}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \ln'' R_k(h)}} \prod_{k=1}^{n} R_k(h) \exp\{-x_n h B_n +$$

$$+ \operatorname{sign}(\alpha-1)(1-\alpha)(\rho B_n)^\alpha\}\left(1+o(1)\right). \tag{24}$$

При помощи оценок (14), (16), (19) получаем при $h\to 0$, что

$$B_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \ln'' R_k(h) = \alpha\,|\,\alpha-1\,|\,h^{\alpha-2} + c_5(n) h^{\alpha'-\alpha} + O(h^{2\alpha'+\alpha-2} + h^{\alpha'+2\alpha-2}).$$

Следовательно,

$$\frac{B_n \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \ln'' R_{\alpha k}(\rho B_n)}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \ln'' R_k(h)}} = \frac{h\sqrt{\rho^\alpha}}{\rho\sqrt{h^\alpha}}\left(1 + c_5(n) h^{\alpha'-\alpha}\right), \tag{25}$$

где $c_5(n)$ ограничено и может стремиться к нулю при $n\to\infty$.

Из соотношения (15) имеем

$$x_n B_n^{1-\alpha} = \alpha \operatorname{sign}(\alpha-1) h^{\alpha-1} + c_1(n) h^{\alpha'-1} + O(h^{\alpha'+\alpha-1}),$$

где $c_1(n)$ может стремиться к нулю при $n\to\infty$.

Из уравнения (23) получаем, что

$$x_n B_n^{1-\alpha} = \alpha \operatorname{sign}(\alpha-1)\rho^{\alpha-1}.$$

Тогда

$$\rho^{\alpha-1} = h^{\alpha-1} + \Theta h^{\alpha'-1},$$

или

$$\rho = h(1 + \Theta_1 h^{\alpha'-\alpha}), \tag{26}$$

где Θ и Θ_1 — ограниченные постоянные. Согласно (26) имеем

$$\frac{h\sqrt{\rho^\alpha}}{\rho\sqrt{h^\alpha}} = 1 + O(h^{\alpha'-\alpha}), \tag{27}$$

а так как

$$(\rho B_n^\alpha) = \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

то из (24), (25) и (27) получаем утверждение теоремы 1. Область изменения x_n получается из (15). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 получается как следствие из теоремы 1. Действительно имеем

$$\frac{B_n P_n(m)}{g_\alpha(x_n)}=\exp\left\{B_n^\alpha\left[\frac{x_n}{B_n^{\alpha-1}}(\rho-h)+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{R_k'(h)}{R_{\alpha k}(\rho)}\right)\right]\right\}\left(1+o(1)\right)=$$

$$=\exp\left\{B_n^\alpha\left[\frac{x_n}{B_n^{\alpha-1}}(\rho-h)+(h^\alpha-\rho^\alpha)+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\omega_k(h)}{R_{\alpha k}(h)}\right)\right]\right\}\left(1+o(1)\right).$$

Так как

$$\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\omega_k(h)}{R_{\alpha k}(h)}\right)=o(h^{a'}),$$

когда h достаточно мало, то, воспользовавшись оценкой (26), получаем, что

$$\frac{B_n P_n(m)}{g_\alpha(x_n)}=\exp\left\{B_n^\alpha O(h^{a'})\right\}=\exp\left\{o(1)\right\}\to 1,\qquad n\to\infty,$$

если только

$$x_n\in\left(1,\ o\left(B_n^{\frac{1}{a'}(\alpha-1)\cdot(a'-\alpha)}\right)\right).$$

Теорема 2 доказана.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность проф. Й. Кубилюсу за постановку задачи и постоянное внимание.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
25.I.1972

Литература

1. В. М. Золотарев, Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и математ. статистике, Вильнюс, 1962, 43–48.
2. В. А. Статулявичус, Об асимптотическом разложении характеристической функции суммы независимых случайных величин, Liet. matem. rink., **II**, 2(1962), 227–231.
3. П. Сурвила, Большие уклонения в локальной теореме для решетчатых распределений, Liet. matem. rink., **IX**, 2(1969), 407.
4. А. Алешкявичене, О предельных теоремах для больших уклонений, Liet. matem. rink., **II**, 2(1962), 5–13.
5. А. А. Миталаускас, В. А. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин, Liet. matem. rink., **VI**, 4(1966), 569–583.
6. М. Лоэв, Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962.

APIE NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DISKRETINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ DIDŽIŲJŲ NUKRYPIMŲ RIBINES LOKALINES TEOREMAS

P. Vaitkus

(*Reziumė*)

Straipsnyje apibendrintos rėtiniu atveju kai kurios V. Zolotariovo [1] ir A. Aleškevičienės [4] teoremos.

Sakykime, kad ξ_i, $i=1, 2,\ldots,n$, yra seka nepriklausomų atsitiktinių diskretinių dydžių, kurių pasiskirstymo funkcijos $F_i(x)$ priklauso atitinkamo stabiliojo dėsnio $G_{\alpha i}(x)$ $(0<\alpha<2,\ \alpha\neq 1,\ \beta=-1)$ normalinės traukos sričiai.

Jei ξ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ tenkina sąlygas 1°, 3°, 4°, 2°, tai tolygiai pagal $x_n=\frac{m}{B_n}$ iš intervalo $\left(1, o(B_n^{\alpha-1})\right)$, kai $1<\alpha<2$, ir iš intervalo $\left(-1, \ -o(B_n^{\alpha-1})\right)$, kai $0<\alpha<1$, galioja asimptotinė priklausomybė (3), kai $n\to\infty$.

Intervale $\left(1, \ o\left(B_n^{\frac{1}{\alpha'}(\alpha-1)(\alpha'-\alpha)}\right)\right)$ santykis $\frac{B_n P_n(m)}{g_\alpha(x_n)}$ ekvivalentus vienetui, kai $1<\alpha<2$ ir $n\to\infty$.

ON THE LIMIT THEOREMS OF LARGE DEVIATION FOR SUMS OF RANDOM DISCRETE VARIABLES

P. Vaitkus

Summary)

Limit theorems of large deviations for sums of random discrete non-identically distributed variables in the case of stable limiting distribution $G_\alpha(x)$ $(0<\alpha<2, \alpha\neq 1, \beta=-1)$ are given.

Let ξ_i, $i=1,2,\ldots,n$ be a sequence cf independent random discrete variables, the distribution function $F_i(x)$ belonging to the domain of normal attraction of correspondent stable distribution

$$G_{\alpha i}(x)\,(0<\alpha<2, \ \alpha\neq 1, \ \beta=-1).$$

The paper presents an asymptotic expansion for ratio $\frac{B_n P_n(m)}{g_\alpha(x_n)}$, when $\xi_i(i=1, 2, \ldots, n)$ statisfy conditions 1°, 3°, 4°, 2°, and $x_n=\frac{m}{B_n}$ belongs to the interval $\left(1, o(B_n^{\alpha-1})\right)$, if $1<\alpha<2$, and belongs to the interval $\left(-1, \ -o(B_n^{\alpha-1})\right)$, if $0<\alpha<1$.