1972

УДК 519.21

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО УСТОЙЧИВОГО ЗАКОНА

П. С. Вайткус

1. Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1.1}$$

с функциями распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$, ... соответственно и математическими ожиданиями, равными нулю.

(A) Пусть функция распределения $F_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ принадлежит нормальной области притяжения устойчивого закона $G_{\alpha j}(x)$ $(1<\alpha\leqslant 2)$, для которого

$$f_{\alpha j}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dG_{\alpha j}(x)=\exp\left\{-\lambda_j|t|^{\alpha}\left(1+i\beta_j\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}, \tag{1.2}$$

где $|\beta_j|\leqslant 1$, $\lambda_j>0$.

Вводим обозначения:

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j,\qquad B_n^{\alpha}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j,$$

$$\nu_t(G_{\alpha j})=t\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_j(x)-G_{\alpha j}(x)|\,|x|^{t-1}\,dx,$$

μ_j — медиана случайной величины ξ_j $(j=1, 2, \ldots, n)$.

В работе [1] было получено следующее неравенство: если $c_{tj}=\mathbf{M}\,|\xi_j|^t<\infty$, $t>2$ и $\mu_j=0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, то при любом γ, $0<\gamma<1$, и $x>0$

$$\mathbf{P}\left\{S_n\geqslant x\left(\sum_{j=1}^{n}c_{2j}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant 1-\Phi\left((1-\gamma)x\right)+$$

$$+\exp\left\{-K_1\frac{\gamma^2x^2\left(\sum\limits_{j=1}^{n}c_{2j}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_t(G_{2j})}\right\}+K_2\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_t(G_{2j})}{\gamma^t x^t\left(\sum\limits_{j=1}^{n}c_{2j}\right)^{\frac{t}{2}}}. \tag{1.3}$$

Здесь предельным выступает нормальный закон $\Phi(x)$, который является устойчивым с характеристическим показателем $\alpha=2$.

В настоящей заметке неравенство (1.3) и другие неравенства работы [1] получены для случая предельного устойчивого закона $G_\alpha(x)$ с характеристическим показателем

$$1<\alpha\leqslant 2, \text{ и с } f(t)=\exp\left\{-|t|^\alpha\left(1+i\beta\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}.$$

Теорема 1. *Если последовательность* (1.1) *удовлетворяет условию* (A) *с* $\beta_j=0\ (j=1,2,\ldots)$ *и, кроме того,* $\mu_j=0\ (j=1,2,\ldots)$, *то при любом* γ, $0<\gamma<1$, *и* $x>0$

$$\mathbf{P}\{S_n\geqslant B_n x\}\leqslant 1-G_\alpha\left((1-\gamma)x\right)+\frac{L_{nt}}{x^t\gamma^t}+$$

$$+\exp\left\{1-\left(1+\frac{L_{nt}}{\gamma^t x^t}\right)\ln\left(\frac{x^t\gamma^t}{L_{nt}}+1\right)\right\}, \tag{1.4}$$

где

$$1\leqslant t<\alpha \quad \text{и} \quad L_{nt}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_t(G_{\alpha j})}{B_n^t}.$$

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся основным неравенством работы [1]:

$$\mathbf{P}\{S_n\geqslant xB_n\}\leqslant\mathbf{P}\{\hat\eta_1+\ \ldots\ +\hat\eta_n\geqslant(1-\gamma)xB_n\}+$$

$$+\mathbf{P}\{(\hat\xi_1-\hat\eta_1+\ \ldots\ +\hat\xi_n-\hat\eta_n)\geqslant\gamma xB_n\}, \tag{1.5}$$

где

$$\hat\xi_j=F_j^{-1}(Z_j),\qquad \hat\eta_j=G_{\alpha j}^{-1}(Z_j),$$

а $Z_j\ (j=1,2,\ldots)$ – независимые равномерно распределенные на [0, 1] случайные величины.

Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{\hat\eta_1+\ \ldots\ +\hat\eta_n\geqslant(1-\gamma)xB_n\}=1-G_\alpha\left((1-\gamma)x\right). \tag{1.6}$$

Далее воспользуемся неравенством Нагаева–Фука [2]. Имеем

$$\mathbf{P}\{\hat\xi_1-\hat\eta_1+\ \ldots\ +\hat\xi_n-\hat\eta_n)\geqslant\gamma xB_n\}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}\{\hat\xi_j-\hat\eta_j\geqslant\gamma xB_n\}+$$

$$+\exp\left\{1-\left(1+\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbf{M}|\hat\xi_j-\hat\eta_j|^t}{x^t\gamma^tB_n^t}\right)\ln\left(\frac{x^t\gamma^tB_n^t}{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbf{M}|\hat\xi_j-\hat\eta_j|^t}+1\right)\right\},$$

$$1\leqslant t<\alpha\leqslant 2. \tag{1.7}$$

По неравенству Чебышева получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}\{\hat\xi_j-\hat\eta_j\geqslant\gamma xB_n\}\leqslant\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbf{M}|\hat\xi_j-\hat\eta_j|^t}{\gamma^t x^t B_n^t}. \tag{1.8}$$

Так как $\mu_j=0$ $(j=1, 2, \ldots)$, то из леммы 1 [1] следует, что

$$\mathbf{M}\,|\hat{\xi}_j-\hat{\eta}_j|^t\leqslant \nu_t(G_{\alpha j}) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots), \qquad t\geqslant 1. \tag{1.9}$$

Из соотношений (1.5) – (1.9) получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

2. Избавимся от ограничений $\mu_j=0$, $\beta_j=0$ $(j=1, 2, \ldots)$. В дальнейшем будем предполагать, что для всех n

$$\mathbf{M}\,|S_n|^t\leqslant B_n^t, \tag{2.1}$$

когда $1\leqslant t<\alpha\leqslant 2$.

Тогда, воспользовавшись неравенством Чебышева, получаем, что

$$\mathbf{P}\{|S_n|\geqslant 2^{\frac{1}{t}}B_n\}\leqslant \frac{\mathbf{M}\,|S_n|^t}{2B_n^t}\leqslant \frac{1}{2},$$

и медиана μ_n суммы S_n удовлетворяет неравенству

$$\mu_n\leqslant 2^{\frac{1}{t}}\,B_n. \tag{2.2}$$

Пусть $\xi_j^s=\xi_j-\xi_j$ $(j=1, 2, \ldots)$ – симметризованные случайные величины. Тогда при $x\geqslant 2^{\frac{1+t}{t}}$ в силу (2.2) имеем

$$\mathbf{P}\{S_n\geqslant xB_n\}=\mathbf{P}\{S_n-\mu_n\geqslant xB_n-\mu_n\}\leqslant \mathbf{P}\left\{S_n-\mu_n\geqslant \frac{xB_n}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{\xi_1^s+\ \ldots\ +\xi_n^s\geqslant \frac{xB_n^{(s)}}{2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}\right\}, \tag{2.3}$$

где $B_n^{(s)}$ – нормирующая константа для суммы симметризованных случайных величин ξ_j^s $(j=1, 2, \ldots)$.

Лемма.

$$\nu_t\,(G_{\alpha j}^s)=t\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_j^s(x)-G_{\alpha j}^s(x)|\,|x|^{t-1}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant t2^{t+1}\nu_1\,(G_{\alpha j})\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|^{t-1}dF_j(y)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|^{t-1}dG_{\alpha j}(y)\right]+2^{t+1}\nu_t(G_{\alpha j}).$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 [1], только вместо неравенства

$$|x+y|^\gamma\leqslant 2^{\gamma-1}(|x|^\gamma+|y|^\gamma), \qquad \gamma\geqslant 1,$$

в нашем случае применяем неравенство

$$|x+y|^l\leqslant 2^l(|x|^l+|y|^l), \qquad 0\leqslant l\leqslant 1.$$

Теорема 2. *Если последовательность* (1.1) *удовлетворяет условию* (A), *а нормирующая константа* B_n *соотношению* (2.1), *то для любого* γ, $0<\gamma<1$, *и при* $x\geqslant 2^{\frac{t+1}{t}}$

$$\mathbf{P}\{S_n\geqslant xB_n\}\leqslant 2\left[1-G_\alpha\left((1-\gamma)\,x2^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right)\right]+\frac{L_{nt}^s}{x^t\gamma^t}\,2^{t+1}+$$

$$+2\cdot\exp\quad-\left(1+\frac{L_{nt}^s\,2^t}{x^t\gamma^t}\right)\ln\left(\frac{x^t\gamma^t}{2^tL_{nt}^s}+1\right)\Big\}, \tag{2.4}$$

где $1 \leqslant t < \alpha$ *и*

$$L_{nt}^s = \frac{\sum_{j=1}^{n} \nu_t (G_{\alpha j}^s)}{B_n^t}.$$

Замечание 1. Воспользовавшись леммой, L_{nt}^s можем оценить сверху через псевдомоменты $\nu_t (G_{\alpha j})$.

Доказательство теоремы 2. В силу неравенства (2.3) достаточно оценить вероятность

$$q = \mathbf{P}\left\{ (\hat{\xi}_1^s - \hat{\eta}_1^s + \ \dots \ + \hat{\xi}_n^s - \hat{\eta}_n^s) \geqslant x\gamma \frac{B_n^{(s)}}{2^{1+\frac{1}{\alpha}}} \right\}.$$

Применяя неравенство Нагаева—Д. Фука и неравенство Чебышева, как и при доказательстве теоремы 1, получаем соотношеиие (2.4). Теорема доказана.

Замечание 2. В теоремах 1, 2 для определенности можно взять

$$t = \frac{2(2\alpha^2+1)}{3\alpha+3},$$

или $t = k\alpha^2 - (3k-1)\alpha + 2k$, $(k > 0)$ и т.п. Тогда при $\alpha = 2$ имеем $t = 2$, и если возьмем в (2.1) равенство, то получим определение нормирующей константы в случае предельного нормального закона.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
25.I.1972

Литература

1. Ш. С. Эбралидзе, Неравенства для больших уклонений в терминах псевдомоментов, Теория вероятн. и ее примен., XVI, 4(1971), 760—765.
2. Д. Х. Фук, С. В. Нагаев, Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., XVI, 4(1971), 660—675.

NEPRIKLAUSOMŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ DIDŽIŲJŲ NUKRYPIMŲ TIKIMYBIŲ NELYGYBĖS STABILIOJO RIBINIO DĖSNIO ATVEJU

P. Vaitkus

Reziumė)

Straipsnyje Š. Ebralidzės [1] gautosios nelygybės apibendrinamos stabiliojo ribinio dėsnio atveju.

INEQUALITIES FOR PROBABILITIES OF LARGE DEVIATION FOR SUMS OF RANDOM VARIABLES IN THE CASE LIMITING STABLE DISTRIBUTION

P. Vaitkus

(*Summary*)

Š. Ebralidze's inequalities [1] are generalized in the present paper for the case of a stable limiting distribution.