XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1972

УДК 519.2

СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

А. И. Каткаускайте

Определение. *Вещественное случайное поле* $\xi(t, s)$, *определенное на* $[a_1, a_2]\times[b_1, b_2]$ *будем называть полем с независимыми приращениями, если для всех* $a_1=t_0<t_1< \dots <t_n\leqslant a_2$, $b_1=s_0<s_1< \dots <s_m\leqslant b_2$ *случайные величины* $\xi(t_0, s_0)$,

$$\xi(t_1, s_0)-\xi(t_0, s_0), \dots, \xi(t_n, s_0)-\xi(t_{n-1}, s_0), \xi(t_0, s_1)-\xi(t_0, s_0), \dots,$$
$$\xi(t_0, s_m)-\xi(t_0, s_{m-1}), \Delta^{t_0}\Delta^{s_0}\xi(t_1, s_1), \dots, \Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k, s_l), \dots,$$
$$\Delta^{t_{n-1}}\Delta^{s_{m-1}}\xi(t_n, s_m)$$

независимы; здесь

$$\Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k, s_l)=\xi(t_k, s_l)-\xi(t_{k-1}, s_l)-\xi(t_k, s_{l-1})-\xi(t_{k-1}, s_{l-1})-$$

смешанная разность, которую дальше будем называть приращением, $k=\overline{1, n}$, $l=\overline{1, m}$.

Заметим, что если $t_n=t$, $s_m=s$, то

$$\xi(t, s)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k, s_l)+\Big(\xi(t, s_0)-\xi(t_0, s_0)\Big)+$$
$$+\Big(\xi(t_0, s)-\xi(t_0, s_0)\Big)+\xi(t_0, s_0);$$

$$\Delta^{t_{i-r}}\Delta^{s_{j-p}}\xi(t_i, s_j)=\sum_{k=i-r+1}^{i}\sum_{l=j-p+1}^{j}\Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k, s_l);$$

$$\xi(t_i, s_j)-\xi(t_{i-r}, s_j)=\sum_{k=i-r+1}^{i}\sum_{l=1}^{j}\Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k, s_l)+$$
$$+\xi(t_i, s_0)-\xi(t_{i-r}, s_0),$$

где $0\leqslant r\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant p\leqslant j\leqslant m$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\xi(t, b_1)=\xi(a_1, s)=\xi(a_1, b_1)=0$.

Конечномерные распределения поля с независимыми приращениями определяются распределениями приращений:

$$f_{t_1,\ldots,t_n;\,s_1,\ldots,s_m}(\lambda_{11},\ \ldots,\ \lambda_{nm})=M\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\lambda_{jk}i\xi(t_j,\ s_k)=\right.$$

$$=M\exp\left\{i\left[\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\lambda_{pr}\Delta^{t_0}\Delta^{s_0}\xi(t_1,\ s_1)+\ldots+\sum_{p=j}^{n}\sum_{r=k}^{m}\lambda_{pr}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\Delta^{t_{j-1}}\Delta^{s_{k-1}}\xi(t_j,\ s_k)+\ldots\right\}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}\varphi_{t_{j-1},\,s_{k-1};\,t_j,\,s_k}\left(\sum_{p=j}^{n}\sum_{r=k}^{m}\lambda_{pr}\right),$$

где

$$\varphi_{t_{j-1},\,s_{k-1};\,t_j,\,s_k}(\lambda)=M\exp\{i\lambda\Delta^{t_{j-1}}\Delta^{s_{k-1}}\xi(t_j,\ s_k)\}.$$

Примерами такого случайного поля могут служить винеровское случайное поле (см. [5]) или случайное поле $\xi(t,\ s)=\sum_{t_i\leqslant t}\sum_{s_j\leqslant s}\xi_{ij}$, где ξ_{ij} — независимые случайные величины

$$a_1=t_0<t_1<\ldots<t_n\leqslant a_2,\ b_1=s_0<s_1<\ldots<s_m\leqslant b_2,$$

$$\xi_{00}=\xi_{0j}=\xi_{i0}=0,\ i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{1,\ m}.$$

Пусть

$$M\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2,\ s_2)=0,\quad \lim_{\substack{t_1\to t_2-0\\ s_1\to s_2-0}}M|\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2,\ s_2)|^2=0,$$

где $\xi(t,\ s)$ — поле с независимыми приращениями, удовлетворяющее (1).

Полагая

$$F(t,\ s)=M|\Delta^{t_0}\Delta^{s_0}\xi(t,\ s)|^2,$$

$$\zeta\Big([t_1,\ t_2)\times[s_1,\ s_2)\Big)=\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2,\ s_2),$$

$$m\Big([t_1,\ t_2)\times[s_1,\ s_2)\Big)=\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}F(t_2,\ s_2),$$

можно легко убедиться, что $F(t,\ s)$ является функцией распределения на $[a_1,\ a_2)\times[b_1,\ b_2)$. Таким образом, получаем, что ζ — элементарная ортогональная стохастическая мера, определенная на разложимом классе полуинтервалов $[t_1,\ t_2)\times[s_1,\ s_2)$, структурная функция m которой допускает продолжение до меры, определенной на σ-алгебре борелевских множеств из $[a_1,\ a_2]\times[b_1,\ b_2]$.

Определение. *Будем говорить, что $f(t,\ s)$ имеет на $[a_1,\ a_2]\times[b_1,\ b_2]$ не менее k ε-колебаний по переменной t, если существуют такие точки $t_1<t_2<\ldots<t_{k+1}$, принадлежащие $[a_1,\ a_2]$, что $\sup_{b_1\leqslant s\leqslant b_2}|f(t_i,\ s)-f(t_{i-1},\ s)|\geqslant\varepsilon$, $i=\overline{2,\ k+1}$. Максимальное из чисел k назовем числом ε-колебаний по переменной t.*

Определение. *Функцию $f(t,\ s)$ будем называть квазинепрерывной, если для каждого $\varepsilon>0$ $f(t,\ s)$ имеет лишь конечное число ε-колебаний по каждой переменной (см. [6]).*

Если $f(t, s)$ – квазинепрерывная функция, то можно показать, что для каждого $t\in[a_1, a_2]$, $s\in[b_1, b_2]$ существуют пределы при $t'\to t\pm 0$, $s'\to s\pm 0$, и сходимость $f(t', s)$ к $f(t\pm 0, s)$ равномерна относительно s, а $f(t, s')$ сходится к $f(t, s\pm 0)$ равномерно относительно t.

Пусть $f(t, s)$ – функция, сепарабельная относительно множества $N = T\times S$, всюду плотного на $[a_1, a_2]\times[b_1, b_2]$, где $T=\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}$, $S=\{s_0, s_1, \ldots, s_j, \ldots\}$, $a_1<t_i<t_{i+1}\leqslant a_2$, $b_1<s_j<s_{j+1}\leqslant b_2$, $i, j=1, 2, \ldots$.

Обозначим $n=\nu_\varepsilon^t(N)$ число ε-колебаний функции $f(t, s)$ на N по переменной t. Тогда существуют точки $t_1'>t_2'< \ldots <t_{n+1}'$, принадлежащие T, такие, что

$$\sup_{s\in[b_1, b_2]} |f(t_k', s)-f(t_{k+1}', s)|\geqslant\varepsilon, \quad k=\overline{1, n}.$$

Из сепарабельности $f(t, s)$ относительно $T\times S$ следует, что

$$\sup_{s\in[b_1, b_2]} |f(t_k', s)-f(t_{k+1}', s)| = \sup_{s_l\in S}|f(t_k', s_l)-f(t_{k+1}', s_l)|. \tag{2}$$

Используя равенство (2), аналогично теореме 2 § 9 [3], можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если $f(t, s)$ – сепарабельная относительно $N=T\times S$ функция, то $\nu_{6\varepsilon}^t([a_1, a_2]\times[b_1, b_2])\leqslant 3\nu_\varepsilon^t(T\times S)+1$. Имеет место аналогичное утверждение и для $\nu_{6\varepsilon}^s$.*

Предположим, что $\xi(t, s)$ – стохастически непрерывное поле. Тогда можно показать, что для всякого плотного множества существует случайное поле $\xi'(t, s)$, сепарабелное и стохастически эквивалентное $\xi(t, s)$.

Лемма. *Пусть $\xi(t, s)$ – поле с независимыми приращениями,*

$$P\{|\Delta^{t_k}\Delta^{s_l}\xi(t_n, s_j)|\geqslant\varepsilon\}<\alpha \tag{3}$$

для всех $k<n$, $l<j<m$, где $a_1\leqslant t_1<t_2< \ldots <t_n\leqslant a_2$, $b_1=s_0<s_1< \ldots <s_m\leqslant b_2$. Тогда

$$P\{\sup_{\substack{2\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} |\xi(t_k, s_j)-\xi(t_1, s_j)|\geqslant 2\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{P\{\sup\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|\xi(t_n, s_j)-\xi(t_1, s_j)|\geqslant\varepsilon\}}{1-\alpha}.$$

Доказательство. Обозначим

$$\xi_{ij}=\Delta^{t_{i-1}}\Delta^{s_{j-1}}\xi(t_i, s_j), \quad i=\overline{2, n},\ j=\overline{1, m}.$$

Заметим, что

$$\xi(t_k, s_l)-\xi(t_1, s_l)=S_{kl}=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_{ij}.$$

Тогда

$$P\{\sup_{\substack{2\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant l\leqslant m}}|S_{kl}|\geqslant 2\varepsilon\}=P\{|S_{21}|\geqslant 2\varepsilon\}+$$

$$+\sum_{l=2}^{m}P\{|S_{21}|<2\varepsilon\},\ \ldots,\ |S_{2l-1}|<2\varepsilon,\ |S_{2l}|\geqslant 2\varepsilon\}+$$

$$+\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=1}^{m}P\{|S_{21}|<2\varepsilon,\ \ldots,\ |S_{2m}|<2\varepsilon,\ \ldots,\ |S_{k-1m}|<2\varepsilon,$$

$$|S_{k1}|<2\varepsilon,\ \ldots,\ |S_{kl-1}|<2\varepsilon,\ |S_{kl}|\geqslant 2\varepsilon\}.$$

Ввиду независимости ξ_{ij} и условия (3)

$$P\{|S_{21}|<2\varepsilon,\ \ldots,\ |S_{2m}|<2\varepsilon,\ \ldots,\ |S_{kl-1}|<2\varepsilon,\ |S_{kl}|\geqslant 2\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-\alpha}P\{|S_{21}|<2\varepsilon,\ldots,|S_{2m}|<2\varepsilon,\ldots,|S_{kl-1}|<2\varepsilon,$$

$$|S_{kl}|\geqslant 2\varepsilon,\ |S_{nl}-S_{kl}|<\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-\alpha}P\{|S_{21}|<2\varepsilon,\ \ldots,\ |S_{kl-1}|<2\varepsilon,\ |S_{kl}|\geqslant 2\varepsilon,\ |S_{nl}|\geqslant\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-\alpha}P\{|S_{21}|<2\varepsilon,\ \ldots,\ |S_{kl-1}|<2\varepsilon,\ |S_{kl}|\geqslant 2\varepsilon,\ \sup_{1\leqslant l\leqslant m}|S_{nl}|\geqslant\varepsilon\}.$$

Суммируя обе стороны последнего неравенства по k и l, получаем:

$$P\{\sup_{\substack{2\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant l\leqslant m}}|S_{kl}|\geqslant 2\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\Big[P\{|S_{21}|\geqslant 2\varepsilon,\ \sup_{1\leqslant l\leqslant m}|S_{nl}|\geqslant\varepsilon\}+$$

$$+\sum_{l=2}^{m}P\{|S_{21}|<2\varepsilon,\ \ldots,\ |S_{2l}|\geqslant 2\varepsilon,\ \sup_{1\leqslant l\leqslant m}|S_{nl}|\geqslant\varepsilon\}+$$

$$+\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=1}^{m}P\{|S_{21}|<2\varepsilon,\ \ldots,\ |S_{kl}|\geqslant 2\varepsilon,\ \sup_{1\leqslant l\leqslant m}|S_{nl}|\geqslant\varepsilon\}\Big]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-\alpha}P\{\sup_{2\leqslant k\leqslant n}|S_{kl}|\geqslant 2\varepsilon,\ \sup_{1\leqslant l\leqslant m}|S_{nl}|\geqslant\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-\alpha}P\{\sup_{1\leqslant l\leqslant m}|S_{nl}|\geqslant\varepsilon\},$$

откуда и следует доказательство.

Теорема 2. *Сепарабельное стохастически непрерывное на* $[a_1,\ a_2]\times\times[b_1,\ b_2]$ *поле с независимыми приращениями квазинепрерывно с вероятностью 1.*

Доказательство. Ввиду вышеизложенных заметок достаточно доказать утверждение на множестве сепарабельности $N=T\times S$. Докажем, например, квазинепрерывность по переменной t. Для этого достаточно показать, что число ε-колебаний для любого $\varepsilon>0$ по переменной t конечно на интервале изменения t такой длины, что

$$P\left\{|\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2,\ s_2)|\geqslant\frac{\varepsilon}{8}\right\}\leqslant\frac{1}{3},\ P\left\{|\xi(t_2,\ s_2)-\xi(t_1,\ s_2)|\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}\leqslant\frac{1}{3}. \quad (4)$$

Возможность такого выбора следует из стохастической непрерывности поля.

Пусть $a_1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant a_2$, $b_1 < s_1 < s_2 < \ldots < s_m \leqslant b_2$, где $t_i \in T$, $s_j \in S$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Обозначим A_k событие, заключающееся в том, что

$$\sup_{s_j \in S_m} |\xi(t_2, s_j) - \xi(t_1, s_j)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ldots, \ \sup_{s_j \in S_m} |\xi(t_{k-1}, s_j) - \xi(t_1, s_j)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{s_j \in S_m} |\xi(t_k, s_j) - \xi(t_1, s_j)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$\xi(t, s)$ на множестве $\{t_k, t_{k+1}, .., t_n\} \times S_m$ имеет не менее $r-1$ ε-колебаний, где $S_m = \{s_1, \ldots, s_m\}$, а p_r — вероятность того, что на множестве $N_{nm} = \{t_1, \ldots, t_n\} \times S_m \xi(t, s)$ имеет не менее $r\varepsilon$-колебаний по переменной t. Тогда

$$p_r \leqslant \sum_{k=1}^{r} P\{A_k\}.$$

Ввиду независимости приращений число ε-колебаний на $\{t_k, \ldots, t_n\} \times S_m$ не зависит от $\xi(t_i, s)$ при $i \leqslant k$.

Таким образом,

$$P\{A_k\} \leqslant p_{r-1} P \left\{ \sup_{s \in S_m} |\xi(t_2, s) - \xi(t_1, s)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ldots, \right.$$

$$\left. \sup_{s \in S_m} |\xi(t_{k-1}, s) - \xi(t_1, s)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \sup_{s \in S_m} |\xi(t_k, s) - \xi(t_1, s)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

откуда по вышедоказанной лемме

$$p_r \leqslant p_{r-1} P \left\{ \sup_{\substack{2 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} |\xi(t_k, s_j) - \xi(t_1, s_j)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2} \ p_{r-1} P \left\{ \sup_{1 \leqslant l \leqslant m} |S_{nl}| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

Из теоремы 2 § 3 гл. 2 [3] и (4) следует, что

$$P \left\{ \sup_{1 \leqslant l \leqslant m} |S_{nl}| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} \right\} \leqslant \frac{1}{2}$$

и, значит,

$$p_r \leqslant \frac{3}{4} p_{r-1} \leqslant \left(\frac{3}{4} \right)^r.$$

Пусть L_k — последовательность монотонно возрастающих конечных множеств таких, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k = N' = N \cap [t_1, t_2] \times [b_1, b_2].$$

Тогда

$$P \left\{ \nu_\varepsilon^t(N') \geqslant r \right\} = \lim_{k \to \infty} P\{\nu_\varepsilon^t(L_k) \geqslant r\} \leqslant \left(\frac{3}{4} \right)^r,$$

откуда следует конечность с вер. 1 $\nu_\varepsilon^t(N')$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы сепарабельное стохастически непрерывное поле с независимыми приращениями было непрерывно с вер. 1, необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon>0$ *и* $a_1=t_0<t_1<\ldots<t_n=a_2$, $b_1=s_0<<s_1<\ldots<s_m=b_2$

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}P\{|\Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k,\ s_l)|>\varepsilon\}=0, \tag{5}$$

где

$$h=\max_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant m}}(t_k-t_{k-1})(s_l-s_{l-1}).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\xi(t,s)$ — непрерывное с вер. 1 с независимыми приращениями поле. Тогда

$$P\{\sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant m}}|\Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k,\ s_l)|>\varepsilon\}\leqslant P\{\Delta_h>\varepsilon\},$$

где

$$\Delta_h=\sup_{|t_1'-t_2'||s_1'-s_2'|<h}|\Delta^{t_1'}\Delta^{s_1'}\xi(t_2',\ s_2')|.$$

Далее заметим, что

$$P\{\sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant m}}|\Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k,\ s_l)|>\varepsilon\}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}P\{|\Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k,\ s_l)|>\varepsilon\}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}P\{|\Delta^{t_{i-1}}\Delta^{s_{j-1}}\xi(t_i,\ s_j)|\leqslant\varepsilon\}.$$

Так как

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}P\{|\Delta^{t_{i-1}}\Delta^{s_{j-1}}\xi(t_i,\ s_j)|\leqslant\varepsilon\}\leqslant P\{\Delta_h\leqslant\varepsilon\},$$

то

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}P\{|\Delta^{t_{k-1}}\Delta^{s_{l-1}}\xi(t_k,\ s_l)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{P\{\Delta_h>\varepsilon\}}{P\{\Delta_h\leqslant\varepsilon\}}\to 0$$

при $h\to 0$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть ν_ε^t — число таких t, для которых $\sup_s|\xi(t+0,s)-\xi(t-0,\ s)|>\varepsilon$ на $[a_1,\ a_2]\times[b_1,\ b_2]$. Ввиду стохастической непрерывности поля (тогда по одной из доказанных теорем оно квазинепрерывно с вер. 1) ν_ε^t конечно с вер. 1. Для непрерывности поля достаточно показать, что

$$P\{\nu^t_{\frac{1}{k}}=0\}=1,\ P\{\nu^s_{\frac{1}{k}}=0\}=1$$

для каждого $k=1,\ 2,\ \ldots$. Докажем, например, что

$$P\{\nu^t_{\frac{1}{k}}=0\}=1.$$

Пусть

$$a_1=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}=a_2, \quad b_1=s_0^{(m)}<s_1^{(m)}<\ldots<s_m^{(m)}=b_2,$$

$$\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}(t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)})(s_j^{(m)}-s_{j-1}^{(m)})\to 0,\ nm\to\infty.$$

Обозначим ν_ε^{nm} число тех индексов i, для которых

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant m}|\xi(t_{i+1}^{(n)},\ s_j^{(m)})-\xi(t_i^{(n)},\ s_j^{(m)})|>\frac{\varepsilon}{2}.$$

Легко заметить, что

$$\nu_\varepsilon^t\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\nu_\varepsilon^{n_i m},$$

где n_i — любая последовательность, стремящаяся к бесконечности.

$$M\nu_\varepsilon^{n_i m}=\sum_{k=1}^{n_i}M\psi_\varepsilon\left(\sup_{1\leqslant l\leqslant m}|\xi(t_k^{(n_i)},\ s_l^{(m)})-\xi(t_{k-1}^{(n_i)},\ s_l^{(m)})|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{m}P\left\{|\Delta^{t_{k-1}^{(n_i)}}\Delta^{s_{l-1}^{(m)}}\xi(t_k^{(n_i)},\ s_l^{(m)})|>\frac{\varepsilon}{2m}\right\},$$

где

$$\psi_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\\ 1, & |x|>\frac{\varepsilon}{2}.\end{cases}$$

Из условия (5) следует, что для каждого $\delta>0$, $\varepsilon>0$ можно выбрать такое n_i, чтобы последняя сумма не превосходила $\frac{\delta}{2^{im}}$, откуда

$$M\nu_\varepsilon^t\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^{im}}=\delta.$$

Так как $\delta>0$ любое число, то $M\nu_\varepsilon^t=0$. Значит, $P\{\nu_\varepsilon^t=0\}=1$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если $\xi(t,\ s)$ непрерывное с вер. 1 поле с независимыми приращениями, определенное на $[a_1,\ a_2]\times[b_1,\ b_2]$, то приращения распределены по нормальному закону.*

Доказательство. Обозначим

$$\xi_{ij}^{nm}=\chi_{\frac{1}{k}}(\Delta^{t_{ni-1}}\Delta^{s_{mj-1}}\xi(t_{ni},s_{mj}),$$

где $\chi_\rho(x)=0$ при $|x|>\rho$, $\chi_\rho(x)=x$ при $|x|\leqslant\rho$, а

$$t_1=t_{n0}<t_{n1}<\ldots<t_{nn}=t_2,\ s_1=s_{m0}<\ldots<s_{mm}=t_2,$$

$$\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}(t_{ni}-t_{ni-1})(s_{mj}-s_{mj-1})\to 0 \text{ при } nm\to\infty.$$

Тогда на основании (5) можно найти такие n_k, m_k, стремящиеся к бесконечности при $k\to\infty$, что

$$\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{m_k} P\left\{|\Delta^{t_{n_k i-1}}\Delta^{s_{m_k j-1}}\xi(t_{n_k i}, s_{m_k j}) > \frac{1}{k}\right\} < \frac{1}{k},$$

откуда следует сходимость по вероятности суммы

$$\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{m_k} \xi_{ij}^{n_k m_k} \text{ к } \Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2, s_2).$$

Дальнейшие рассуждения, аналогичные т. 5 § 5 [1], приводят к доказательству теоремы.

Заметим, что если $\xi(t, s)$ — стохастически непрерывное с независимыми нормальными приращениями поле, то $M\xi(t, s)$, $D\xi(t, s)$ являются непрерывными функциями. Действительно, из нормальности приращений вытекает, что

$$P\{|\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2, s_2)| > \varepsilon\} = \frac{1}{2\pi}\int_A e^{\frac{u^2}{2}}\,du,$$

где

$$A = \left\{u : \left|u + \frac{M\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2, s_2)}{D\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2, s_2)}\right| > \frac{\varepsilon}{D\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2, s_2)}\right\}.$$

Значит, $D\Delta^{t_1}\Delta^{s_1}\xi(t_2, s_2)\to 0$ при $t_1\to t_2$ или $s_1\to s_2$ (откуда следует непрерывность $D\xi(t, s)$), так как в противном случае интеграл также не стремился бы к нулю, что противоречило бы стохастической непрерывности). Непрерывность $M\xi(t, s)$ следует аналогичным путем.

Теорема 5. *Пусть $\xi(t, s)$ — стохастически непрерывное с нормальными независимыми приращениями. Тогда $\xi(t, s)$ непрерывно с вер. 1.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $M\xi(t, s) = 0$. Пусть ε — любое положительное число. Используя неравенство Чебышева, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P\{|\Delta^{t_{i-1}}\Delta^{s_{j-1}}\xi(t_i, s_j)| > \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M|\Delta^{t_{i-1}}\Delta^{s_{j-1}}\xi(t_i, s_j)|^4 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{\varepsilon^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [D\Delta^{t_{i-1}}\Delta^{s_{j-1}}\xi(t_i, s_j)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{\varepsilon^4}\sup_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} D\Delta^{t_{i-1}}\Delta^{s_{j-1}}\xi(t_i, s_j)\, D\Delta^{a_1}\Delta^{b_1}\xi(a_2, b_2) \to 0,$$

при $nm\to\infty$, так как ввиду стохастической непрерывности поля и нормальности приращений $D\xi(t, s)$ является непрерывной. Сходимость последнего ряда к нулю достаточна для непрерывности поля.

Пусть $\xi(t, s)$ — сепарабельное стохастически непрерывное поле с независимыми приращениями на $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Тогда оно равномерно непрерывно, и $\varphi_{t_1, s_1; t_2, s_2} \to 1$ равномерно по s_1, s_2, t_1, t_2, если $(t_1-t_2)(s_1-s_2) \to 0$.

Таким образом, используя вышеопределенные обозначения, имеем, что

$$\xi(t, s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Delta^{t}_{i-1} \Delta^{s}_{j-1} \xi(t_i, s_j)$$

является суммой равномерно малых величин. Следовательно, $\xi(t, s)$ безгранично делимо. Известно (22.3 гл. VI [2]), что тогда

$$\log f_{ts} = \Phi_{ts} = iu\alpha_{ts} + \int \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) d\psi_{ts}(x) = (\alpha_{ts}, \psi_{ts}),$$

где α_{ts} — действительное число, $\psi_{ts}(x)$ с точностью до постоянного множителя является функцией распределения, а из области интегрирования исключается нуль.

Так как $\log f_{ts}$ непрерывен по t и s, то α_{ts}, ψ_{ts} тоже непрерывны в силу теоремы сходимости 22.1, гл. VI [2]. Заметим, что

$$\log \varphi_{t_1, s_1; t_2, s_2} = (\alpha_{t_1, s_1; t_2, s_2}, \psi_{t_1, s_1; t_2, s_2}), \text{ где } \psi_{t_1, s_1; t_2, s_2} \geqslant 0$$

и не убывает по x, откуда следует, что $\psi_{ts}(x)$ не убывает по t, s, x.

Будем говорить, что $\xi(t, s)$ имеет скачок в точке (t, s), если $\Delta^{t-0} \Delta^{s-0} \xi(t+0, s-0) \neq 0$. Обозначим $\nu_{ts}(x)$ число скачков на $[a_1, t) \times [b_1, s)$, размером меньше x при $x<0$ и не менее x при $x>0$. Положим

$$\nu^{nm}_{ts}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} I[\Delta^{t}_{i-1} \Delta^{s}_{j-1} \xi(t_i, s_j) < x] \quad \text{при} \quad x<0,$$

где I_A — индикатор множества A. Аналогично определяется $\nu^{nm}_{ts}(x)$ для $x>0$. Пусть $x \in C(L_{ts})$, где $C(L_{ts})$ — множество точек непрерывности $L_{ts}(x)$, определяемой из условия $dL_{ts}(x) = \frac{1+x^2}{x^2} d\psi_{ts}(x)$ при $x \neq 0$. Тогда аналогично теоремам § 37.3 гл. XI [2] легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

1) $|L_{ts}(x)| = M\nu_{ts}(x)$;

2) числа $\nu_{t_1, s_1; t_2, s_2}[x, y)$ скачков на интервале $[t_1, t_2) \times [s_1, s_2)$ и размеров, лежащих в $[x, y)$, $xy>0$, являются пуассоновскими случайными величинами с параметрами $L_{t_1, s_1; t_2, s_2}$, независимыми при непересекающихся $[t_1, t_2) \times [s_1, s_2)$ и независимыми при непересекающихся интервалах размеров скачков $[x, y)$;

3) интегралы

$$I_{ts} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ x d\nu_{ts}(x) - \frac{x}{1+x^2} dL_{ts}(x) \right\}$$

существуют и являются безгранично делимыми случайными величинами с

$$\log M \exp\{iuI_{ts}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) dL_{ts}(x);$$

4) каждое стохастически непрерывное на $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ поле с независимыми приращениями $\xi(t, s)$ представимо в виде суммы двух независимых полей:

$$\xi(t, s) = \eta_{ts} + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ x d\nu_{ts}(x) - \frac{x}{1+x^2} dL_{ts}(x) \right\},$$

где η_{ts} — непрерывное нормальное поле с независимыми приращениями; имеет место и обратное утверждение;

5) $$M \exp i\lambda\xi(t, s) = \exp\left\{ ia_{ts}\lambda - \frac{1}{2} b_{ts}\lambda^2 \right\} +$$
$$+ \int_{|x| \leq 1} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x)\, dL_{ts}(x) + \int_{|x|>1} (e^{i\lambda x} - 1)\, dL_{ts}(x),$$

где a_{ts}, b_{ts}, L_{ts} — непрерывные по t, s; b_{ts} не убывает по t и s, $L_{ts}(x)$ является функцией распределения при каждых t, s, для которой

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 dL_{ts}(x) < \infty.$$

Замечание. Аналогичные теоремы можно доказать для полей с любым конечным числом параметров. Условие (1) можно заменить менее жестким ограничением, например, требованием непрерывности с вер. 1 на координатных осях.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило
30.XI.1971

Литература

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, М., „Наука“, 1971.
2. М. Лоэв, Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962.
3. А. В. Скороход, Случайные процессы с независимыми приращениями, М., „Наука“, 1964.
4. А. В. Скороход, Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями, Теория вероятностей и ее применение **11**, Вып. 2 (1957).
5. Н. Н. Ченцов, Винеровские случайные поля от нескольких параметров, ДАН СССР, **106**, № 4 (1956).
6. Н. Н. Ченцов, Предельные теоремы для некоторых классов случайных функций, Труды Всесоюзного совещания по теории вероятностей и мат. статистике, Ереван, 1960.

ATSITIKTINIAI LAUKAI SU NEPRIKLAUSOMAISIAIS POKYČIAIS

A. Katkauskaitė

(*Reziumė*)

Darbe apibrėžiamas atsitiktinis laukas su nepriklausomaisiais pokyčiais.

Keli rezultatai, liečiantys atsitiktinius procesus su nepriklausomaisiais pokyčiais, apibendrinti atsitiktiniams laukams. Gautas tokių laukų (esant tam tikriems apribojimams) charakteringosios funkcijos skleidinys.

RANDOM FIELDS WITH INDEPENDENT INCREMENTS

A. Katkauskaitė

(*Summary*)

Random fields with independent increments are defined in this paper.

Some of the results concerning stochastic processes with independent increments are generalized for random fields.

In particular, the representation of the characteristic function of such fields (with some restrictions imposed) is obtained.